объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-109

А.Д.Донков, Р.М.Ибадов, В.Г.Кадышевский,
М.Д.Матеев, М.В.Чижов

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И НОВЫЙ УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МАСШТАБ В ОБЛАСТИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Калибровочные векторные поля

Направлено в журнал "Nuclear Physics"

1984

§I. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья, как и предыдущая /I/, принадлежит новому циклу наших исследований, посвященных формулировке квантовой теории поля (КТП) с фундаментальной массой M. Этот параметр играет роль нового универсального масштаба теории в области высоких энергий и одновременно является предельно допустимым значением для массы элементарной частицы.

Мы будем придерживаться обозначений, введенных в /I/, а при ссылках на формулы этой работы использовать римскую цифру I, например, (I.I.5), (I.5.II) и т.п. Конкретно здесь нам предстоит перенести в импульсное 4-пространство Лобачевского калибровочную теорию безмассовых векторных полей, а именно свободного электромагнитного поля и поля Янга-Миллса. Решив эту задачу, мы объединим в рамках одной теоретико-полевой схемы идею о существовании фундаментальной массы M с такой плодотворной концепцией, как калибровочная симметрия.

План дальнейшего изложения таков.

В §2 с помощью алгоритма типа (I.7.I) в p-пространстве постоянной кривизны будет построено выражение для действия свободного электромагнитного поля (поля Максвелла) в терминах 5-потенциала $A_L(p,p_5)$. В §3, применяя к каждой компоненте 5-потенциала преобразование Фурье (I.5.II), мы придем к калибровочно-инвариантной локальной 5-формулировке свободной максвелловской теории. Следующий §4 посвящен обобщению развитой абелевой схемы на случай поля Янга-Миллса. §5 содержит заключительные замечания.

§2. ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ СВОБОДНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ИМПУЛЬСНОМ 4-ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Будем исходить из стандартного выражения для действия свободного поля Максвелла в релятивистской теории:

$$S_0 = -\frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)\, d^4x \quad , \mu,\nu = 0,1,2,3, \tag{2.I}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu} . \tag{2.2}$$

Используя разложение Фурье

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ipx} A_\mu(p)\, d^4p ; \; A^+_\mu(p) = A_\mu(-p),$$

функционалу (2.I) можно придать вид интеграла по p-пространству Минковского:

$$S_0 = \pi \int d^4p\, p^2 \left(A_\mu(p) - p_\mu \frac{p\cdot A}{p^2}\right)^+ \left(A^\mu(p) - \frac{p^\mu\, p\cdot A}{p^2}\right). \tag{2.3}$$

Существенно, что и после перехода к p-представлению действие не утратило явной инвариантности относительно калибровочных преобразований, которые теперь выглядят как

$$A_\mu(p) \longrightarrow A_\mu(p) + i p_\mu \lambda(p) , \; \lambda^+(p) = \lambda(-p). \tag{2.4}$$

Варьирование (2.3) по $A_\mu(p)$ приводит, очевидно, к уравнениям Максвелла в импульсном пространстве:

$$p^2 A_\mu(p) - p_\mu(p\cdot A) = 0. \tag{2.5}$$

Далее нам будет удобно рассматривать продольную составляющую поля $p\cdot A$ в (2.3) как независимую переменную*/ :

$$p\cdot A(p) \equiv 2\Phi(p) , \quad \Phi^+(p) = -\Phi(-p) \tag{2.6}$$

Таким образом,

$$S_0 = \pi \int d^4p\, p^2 \left(A_\mu(p) - \frac{2p_\mu \Phi(p)}{p^2}\right)^+ \left(A^\mu(p) - \frac{2p^\mu \Phi(p)}{p^2}\right). \tag{2.7}$$

---

*/ Этот прием восходит, по-видимому, к работе /2/. Поэтому основанную на нем формулировку теории векторных полей мы, для краткости, будем называть штюкельберговой.

Варьирование (2.7) по $A_\mu(p)$ и $\phi(p)$ дает

$$p^2 A_\mu(p) - 2p_\mu \phi(p) = 0, \qquad (2.8)$$
$$p \cdot A(p) - 2\Phi(p) = 0 ,$$

что эквивалентно (2.5)-(2.6). Калибровочные преобразования, относительно которых инвариантно действие (2.7), записываются в виде

$$A_\mu(p) \to A_\mu(p) + i p_\mu \lambda(p), \qquad (2.9)$$
$$\phi(p) \to \phi(p) + \frac{i}{2} p^2 \lambda(p), \quad \lambda^+(p) = \lambda(-p).$$

Подчеркнем, что в силу определения (2.6) размерность поля $\phi(p)$ не является канонической:

$$[\phi(p)] = [A_\mu(p)] \cdot \text{масса} = [\text{масса}]^{-2}. \qquad (2.10)$$

Нетрудно развить евклидову формулировку рассмотренного штюкельбергова описания свободного электромагнитного поля. Очевидно, вместо (2.7) и (2.9) мы просто будем иметь:

$$S_0^{(E)} = \pi \int d^4p \, p^2 \left| A_n(p) - \frac{2p_n \phi(p)}{p^2} \right|^2 \geq 0 , \qquad (2.11a)$$

$$n = 1,2,3,4, \qquad p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2,$$

$$A_n(p) \to A_n(p) + i p_n \lambda(p), \qquad (2.11б)$$
$$\phi(p) \to \phi(p) + \frac{ip^2}{2} \lambda(p),$$

причем

$$A_n(p)^+ = A_n(-p), \quad \phi^+(p) = -\phi(-p), \quad \lambda^+(p) = \lambda(-p). \qquad (2.12)$$

Полагая, по определению, $S_0^E = \int L_0^E(x) d^4x$ и производя над полями $A_n(p)$ и $\phi(p)$ в (2.11а)-(2.11б) евклидово преобразование Фурье

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int A_n(p) e^{ipx} d^4p = A_n(x), \quad \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \Phi(p) e^{ipx} d^4p = i\phi(x) = [i\phi(x)]^+,$$

приходим к евклидову лагранжиану электромагнитного поля в штюкельберговой формулировке

$$L_0^E(x) = \frac{1}{4} F_{kl}^2(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_k(x)}{\partial x_k} - 2i\phi(x) \right)^2 \qquad (2.13a)$$

и калибровочным преобразованиям полей $A_n(x)$ и $\phi(x)$, которые он допускает:

$$A_n(x) \to A_n(x) + \frac{\partial}{\partial x_n} \lambda(x),$$

$$\phi(x) \to \phi(x) - \frac{i}{2} \Box \lambda(x), \quad \lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \lambda(p) e^{ipx} d^4p. \qquad (2.13б)$$

Ясно, конечно, что поле $\phi(x)$ выступает здесь как вспомогательная, чисто калибровочная степень свободы. Если выбрать калибровку

$$\phi(x) = 0 , \qquad (2.13в)$$

то лагранжиан (2.13а) примет фермиевский вид $L_0^E(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_k(x)}{\partial x_l}\right)^2$, причем допустимыми преобразованиями потенциала $A_n(x)$ будут следующие:

$$A_n(x) \to A_n(x) + \frac{\partial}{\partial x_n} \lambda(x), \quad \Box \lambda(x) = 0 .$$

Легко видеть также, что калибровочное условие

$$2i\phi(x) = \frac{\sqrt{\alpha} - 1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\partial A_n(x)}{\partial x_n} , \quad \alpha > 0$$

эквивалентно стандартной α-калибровке, в которой

$$L_0^{(E)}(x) = \frac{1}{4} F_{kl}^2(x) + \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\partial A_n(x)}{\partial x_n} \right)^2 .$$

Штюкельбергова формулировка оказалась подходящим отправным пунктом для построения неевклидова варианта теории свободного электромагнитного поля.

Займемся теперь этим построением непосредственно и найдем неевклидов аналог действия (2.11а). Поскольку в данном случае $\cos\mu = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}} = 1$, а число полевых переменных равно пяти, то алгоритм перехода к неевклидовой версии (2.IIа) сводится к следующей процедуре (ср. (I.7.I)):

$$
\begin{aligned}
&A_n(p) \to A_n(p,p_5),\\
&\Phi(p) \to \Phi(p,p_5) \equiv M A_5(p,p_5),\\
&d^4p \to 2M\,\varepsilon(p_5)\,\delta(p_L p^L - M^2)\,d^5p,\\
&p^2 \to 2M(p_5 - M), \quad L = 1,2,3,4,5.
\end{aligned}
\tag{2.I4}
$$

Производя в (2.IIа) подстановку (2.I4), будем иметь (ср. (I.4.29)):

$$
2\pi M^2 \int \varepsilon(p_5)\,\delta(p_L p^L - M^2)\,d^5p\; 2(p_5 - M)\left| A_n(p,p_5) - \frac{p_n A_5(p,p_5)}{p_5 - M}\right|^2 \equiv S_0(M),
\tag{2.I5}
$$

где все поля $A_n(p,p_5)$, $A_5(p,p_5)$ имеют каноническую размерность (масса)$^{-3}$. Эту совокупность полевых переменных мы будем называть 5-потенциалом и обозначать как $A_L(p,p_5), L=1,2,3,4,5$. В силу (I.4.2), (2.I2) и (2.I4)

$$
\begin{aligned}
&A_n^+(p,p_5) = A_n(-p,p_5),\\
&A_5^+(p,p_5) = -A_5(-p,p_5).
\end{aligned}
\tag{2.I6}
$$

Ясно, что компонента $A_5(p,p_5)$, ведущая свое происхождение от штюкельбергова поля $\Phi(p)$, не может иметь какого-либо физического смысла. Однако в неевклидовой схеме она играет важную вспомогательную роль. Как будет видно из дальнейшего, с помощью этой "лишней" полевой переменной "неевклидовы" калибровочные преобразования удается записать в виде локальных преобразований в <u>пространстве пяти измерений</u> (см. 3.II)).

Легко видеть, что неевклидово действие (2.I5) удовлетворяет условию

$$
S_0(M) \geq 0
$$

и остается инвариантным при следующем калибровочном преобразовании 5-потенциала (ср. (2.IIб)):

$$
\begin{aligned}
&A_n(p,p_5) \to A_n(p,p_5) + i p_n \lambda(p,p_5),\\
&A_5(p,p_5) \to A_5(p,p_5) + i(p_5 - M)\lambda(p,p_5), \quad \lambda(p,p_5)^+ = \lambda(-p,p_5).
\end{aligned}
\tag{2.I7}
$$

Полагая $\sqrt{1+\frac{p^2}{M^2}} = \varkappa$ и совершая в (2.I5) интегрирование по p_5, получаем для $S_0(M)$ выражение, аналогичное (I.4.I4):

$$
\begin{aligned}
S_0(M) = \pi M^2 \int \frac{d^4p}{\varkappa}\Big\{ & 2(\varkappa - 1)\left| A_n^{(1)}(p) - \frac{p_n}{M}\frac{A_5^{(1)}(p)}{\varkappa - 1}\right|^2 +\\
+ & 2(\varkappa + 1)\left| A_n^{(2)}(p) + \frac{p_n}{M}\frac{A_5^{(2)}(p)}{\varkappa + 1}\right|^2 \Big\},
\end{aligned}
\tag{2.I8}
$$

где (ср. (I.3.2))

$$
\begin{pmatrix} A_L^{(1)}(p) \\ A_L^{(2)}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_L(p, M\varkappa) \\ A_L(p, -M\varkappa) \end{pmatrix}, \quad L = 1,2,3,4,5.
\tag{2.I9}
$$

Вводя обозначения

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(p) &= \lambda(p, M\varkappa),\\
\lambda_2(p) &= \lambda(p, -M\varkappa)
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

и учитывая (2.I9), можно расщепить (2.I7) на два независимых калибровочных преобразования:

$$
\begin{aligned}
&A_n^{(1)}(p) \to A_n^{(1)}(p) + i p_n \lambda_1(p),\\
&A_5^{(1)}(p) \to A_5^{(1)}(p) + i M(\varkappa - 1)\lambda_1(p),\\
&\qquad (\lambda_1^+(p) = \lambda_1(-p)),
\end{aligned}
\tag{2.2Iа}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_n^{(2)}(p) \to A_n^{(2)}(p) + i p_n \lambda_2(p),\\
&A_5^{(2)}(p) \to A_5^{(2)}(p) - i M(\varkappa + 1)\lambda_2(p),\\
&\qquad (\lambda_2^+(p) = \lambda_2(-p)).
\end{aligned}
\tag{2.2Iб}
$$

Таким образом, характерное для неевклидовой теории поля удвоение числа степеней свободы, связанное с существованием двух пол у гиперболоида (I.I.5)

$$p_5^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_4^2 = M^2 \quad , \qquad (2.22)$$

распространяется и на фиктивное штюкельбергово поле, и на группу калибровочных преобразований. В итоге функционал (2.I8) выглядит как нетривиальное обобщение евклидова действия (2.IIa).

Из самого способа получения (2.IIa) следует, что если бы мы подвергли этот функционал операции релятивистского разворота (см.примечание на стр. 4 в /I/), то вернулись бы к штюкельберговой форме действия (2.7) и соответствующим уравнениям движения (2.8). Интересно проделать аналогичную процедуру с неевклидовым действием (2.I8), опираясь на соотношения (I.3.I0) - (I.3.II). Учитывая, что при этом $p_n A_n^{(1,2)} \to -p^\mu A_\mu^{(1,2)}$ и $A_5^{(1,2)} \to -A_5^{(1,2)}$, для всех десяти релятивистски развернутых полей $A_\mu^{(1,2)}$, $A_5^{(1,2)}$ мы получим лоренц-инвариантные уравнения движения, справедливые в области $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^{\,2} \leq M^2$:

$$2\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{M^2}} - 1\right) A_\mu^{(1)}(p) + \frac{2}{M} p_\mu A_5^{(1)}(p) = 0 \qquad (2.23а)$$

$$p^\mu A_\mu^{(1)}(p) - M\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{M^2}} + 1\right) A_5^{(1)}(p) = 0 \qquad (2.23б)$$

$$2\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{M^2}} + 1\right) A_\mu^{(2)}(p) - \frac{2}{M} p_\mu A_5^{(2)}(p) = 0 \qquad (2.24а)$$

$$p^\mu A_\mu^{(2)}(p) + M\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{M^2}} - 1\right) A_5^{(2)}(p) = 0. \qquad (2.24б)$$

Нетрудно убедиться, что уравнения (2.23)-(2.24) инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} A_\mu^{(1,2)}(p) &\to A_\mu^{(1,2)}(p) + i p_\mu \lambda_{1,2}(p), \\ A_5^{(1,2)}(p) &\to A_5^{(1,2)}(p) + iM\left(1 \mp \sqrt{1-\frac{p^2}{M^2}}\right)\lambda_{1,2}(p), \end{aligned} \qquad (2.25)$$

где $\lambda_1(p)$ и $\lambda_2(p)$ суть релятивистски развернутые функции (2.20).

Из (2.23) находим, что поле $A_\mu^{(1)}(p)$ удовлетворяет системе уравнений Максвелла (2.5), а компонента $A_5^{(1)}(p)$ дается выражением

$$A_5^{(1)}(p) = \frac{p\cdot A^{(1)}(p)}{M\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{M^2}} + 1\right)} . \qquad (2.26)$$

Следовательно, уравнения (2.23) обеспечивают стандартное штюкельбергово описание свободного электромагнитного поля (ср. (2.8)). Что касается пары уравнений (2.24), то из первого из них следует:

$$A_\mu^{(2)}(p) = \frac{p_\mu}{M} \frac{A_5^{(2)}(p)}{\left(\sqrt{1-p^2/M^2} + 1\right)} .$$

Будучи чисто продольным, поле $A_\mu^{(2)}(p)$ не может быть наблюдаемым, поскольку

$$F_{\mu\nu}^{(2)}(p) = -i\left[p_\mu A_\nu^{(2)}(p) - p_\nu A_\mu^{(2)}(p)\right] = 0 . \qquad (2.27)$$

Это полностью аналогично исчезновению на массовой поверхности φ_2-компоненты скалярного поля (см. /I/, §4).

Уравнения (2.24) оставляют произвольной величину $A_5^{(2)}(p)$. Однако эта степень свободы может быть устранена калибровочным преобразованием (2.25), если положить

$$\lambda_2(p) = \frac{i}{M} \frac{A_5^{(2)}(p)}{\left(\sqrt{1-p^2/M^2} + 1\right)} .$$

Итак, мы вправе заключить, что избыточные степени свободы, которыми обладает в нашем описании поле Максвелла, в свободном случае никак не проявляются.

Забегая вперед, укажем, что эта картина изменится коренным образом после включения взаимодействия. "Лишние" компоненты поля, имеющие неевклидово происхождение, станут переносчиками новых взаимодействий, играющих важную роль при высоких энергиях $E \gtrsim M$.

§3. ОПИСАНИЕ СВОБОДНОГО ПОЛЯ МАКСВЕЛЛА В ПЯТИМЕРНОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Продолжим исследование неевклидова действия (2.I8) и отвечающих ему калибровочных преобразований (2.2I), концентрируя внимание на локальных свойствах развиваемого формализма (см. /I/, §2, пункт 4). С этой целью перейдем в (2.I8) и (2.2I) к новым полевым переменным (ср. (I.4.22)-(I.4.23))

$$A_L(p) = \frac{1}{\varkappa}\left[A_L^{(1)}(p) + A_L^{(2)}(p)\right], \tag{3.I}$$

$$X_L(p) = A_L^{(1)}(p) - A_L^{(2)}(p), \qquad L = 1,2,3,4,5. \tag{3.2}$$

В результате получим (ср. (I.4.24)):

$$S_0(M) = \pi \int d^4p \left[p^2 \left| A_n - \frac{M p_n (A_5 + X_5)}{p^2} \right|^2 + M^2 \left| A_n - X_n + \frac{p_n A_5}{M} \right|^2 \right], \tag{3.3}$$

$$A_n(p) \to A_n(p) + i p_n \lambda(p)$$
$$A_5(p) \to A_5(p) + i M\big(\mu(p) - \lambda(p)\big), \tag{3.4a}$$

$$X_n(p) \to X_n(p) + i p_n \mu(p),$$
$$X_5(p) \to X_5(p) + i\left(\frac{p^2}{M} + M\right)\lambda(p) - i M \mu(p), \tag{3.4б}$$

где

$$\lambda(p) = \frac{1}{\varkappa}\big(\lambda_1(p) + \lambda_2(p)\big), \quad \mu(p) = \lambda_1(p) - \lambda_2(p). \tag{3.5}$$

Легко убедиться далее, что после преобразований Фурье

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipx} A_L(p)\, d^4p = A_L(x), \tag{3.6}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipx} X_L(p)\, d^4p = X_L(x), \tag{3.7}$$

действие (3.3) представляется в виде

$$S_0(M) = \int L_0(x; M)\, d^4x, \tag{3.8}$$

где $L_0(x; M)$ – локальная функция полей $A_L(x)$ и $X_L(x)$ и их первых производных.

Более того, оказывается, что область локальности функционала (3.3), в точной аналогии со скалярным случаем, может быть естественным образом расширена до пространства пяти измерений. Действительно, полагая (ср. (I.5.II))

$$A_L(x,\tau) = \frac{2M}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ip_N x^N} d^5p\, \delta(p_K p^K - M^2)\, A_L(p, p_5) \tag{3.9}$$

$$x^L = \left(x^l, \frac{\tau}{M}\right) = (x^l, x^5),$$

получим уже знакомую задачу Коши:

$$\left(M^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + M^2\right) A_L(x,\tau) = 0, \tag{3.I0a}$$

$$A_L(x,0) = A_L(x), \quad \frac{\partial A_L}{\partial \tau}(x,0) = -i X_L(x). \tag{3.I0б}$$

Калибровочные преобразования (3.4) приобретают вид локальных градиентных преобразований в конфигурационном 5-пространстве:

$$e^{i\tau} A_L(x,\tau) \to e^{i\tau} A_L(x,\tau) - \frac{\partial}{\partial x^L}\left(e^{i\tau}\lambda(x,\tau)\right), \tag{3.IIa}$$

где

$$\left(M^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + M^2\right)\lambda(x,\tau) = 0,$$

$$\lambda(x,\tau) = \frac{2M}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ip_L x^L} \delta(p_K p^K - M^2)\, \lambda(p, p_5)\, d^5p. \tag{3.IIб}$$

Заметим, что в силу (2.I6), (3.9) и (3.IIб)

$$A_L^+(x,\tau) = \big(A_l(x,-\tau),\ -A_5(x,-\tau)\big).$$

$$\lambda(x,\tau)^+ = \lambda(x,-\tau) \; . \tag{3.12}$$

Функция $\lambda(x,\tau)$ полностью определяется начальными данными

$$\lambda(x,0) = \lambda(x) = \lambda^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipx} \lambda(p)\, d^4p \; ,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}(x,0) = -i\mu(x) = -i\mu^+(x) = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipx} \mu(p)\, d^4p \; . \tag{3.13}$$

В явном виде (ср. (I.5.I9))

$$\lambda(x,\tau) = M \int \frac{\partial \mathcal{D}(x-x',\tau)}{\partial\tau} \lambda(x')\, d^4x' - iM \int \mathcal{D}(x-x',\tau)\mu(x')\, d^4x' \; .$$

Таким образом, калибровочные преобразования (3.IIa) реально зависят от двух вещественных функций $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ (ср. (3.4)).

Нетрудно убедиться, что неевклидово действие (3.3) в терминах 5-потенциала $A_L(x,\tau)$ записывается так:

$$S_0(M) = \int d^4x\, L_0(x,\tau;M) =$$

$$= \int d^4x \left[\frac{1}{4} F_{KL}(x,-\tau) F^{KL}(x,\tau) + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial (e^{i\tau} A_L(x,\tau))}{\partial x_L} - 2iMe^{i\tau} A_5(x,\tau) \right|^2 \right] , \tag{3.14}$$

где

$$F_{KL}(x,\tau) = \frac{\partial (e^{i\tau} A_K(x,\tau))}{\partial x^L} - \frac{\partial (e^{i\tau} A_L(x,\tau))}{\partial x^K} \; , \tag{3.15}$$

$K, L = 1,2,3,4,5.$

причем (см. (3.I2))

$$F_{k\ell}(x,\tau) = F^{k\ell}(x,\tau) = \left(F_{k\ell}(x,-\tau) \right)^+ = e^{i\tau} \left(\frac{\partial A_\ell(x,\tau)}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k(x,\tau)}{\partial x_\ell} \right) , \tag{3.16}$$

$$F_{5\ell}(x,\tau) = -F^{5\ell}(x,\tau) = -\left(F_{5\ell}(x,-\tau) \right)^+ = -e^{i\tau} \left(M \frac{\partial A_\ell(x,\tau)}{\partial\tau} + iMA_\ell(x,\tau) + \frac{\partial A_5(x,\tau)}{\partial x_\ell} \right) . \tag{3.17}$$

Первое слагаемое в пятимерной лагранжевой плотности $L_0(x,\tau;M)$ имеет максвелловский вид и является инвариантным относительно произвольных 5-градиентных преобразований

$$e^{i\tau} A_L(x,\tau) \to e^{i\tau} A_L(x,\tau) - \frac{\partial}{\partial x^L} \Lambda(x,\tau) , \quad \Lambda^+(x,\tau) = \Lambda(x,-\tau) \; . \tag{3.18}$$

Симметрия второго слагаемого в $L_0(x,\tau;M)$ – ниже. Оно остается инвариантным лишь при таких калибровочных преобразованиях (3.I8), параметры которых $\Lambda(x,\tau)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \Lambda_L(x,\tau)}{\partial x_L} - 2iM\Lambda_5(x,\tau) = 0 \; , \tag{3.19}$$

где

$$\Lambda_L(x,\tau) \equiv \frac{\partial \Lambda(x,\tau)}{\partial x^L} \; . \tag{3.20}$$

Полагая $\Lambda(x,\tau) = e^{i\tau}\lambda(x,\tau)$, получаем отсюда уравнение (3.IIб) для $\lambda(x,\tau)$. Следовательно, максимальная калибровочная симметрия неевклидова действия (3.I4) в самом деле описывается группой (3.II).

Как мы знаем (см. /I/, §5), действие (3.I4) потому не зависит от τ, что оно является интегралом движения для уравнения (3.I0). Вычисляя (3.I4) при $\tau = 0$ и учитывая (3.I0б), (3.I6)-(3.I7), получаем $S_0(M)$ в форме (3.8):

$$S_0(M) = \int d^4x\, L_0(x,0;M) =$$

$$= \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} F_{k\ell}^2(x) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial A_k(x)}{\partial x_k} - 2i\phi(x) \right]^2 + \frac{M^2}{2} \left[X_k(x) - A_k(x) + \frac{i}{M} \frac{\partial A_5(x)}{\partial x_k} \right]^2 \right\} \equiv \int d^4x\, L_0(x;M) , \tag{3.21}$$

где мы ввели обозначение

$$\frac{M}{2} \left(A_5(x) + X_5(x) \right) \equiv \phi(x) \; . \tag{3.22}$$

Калибровочные преобразования, оставляющие (3.2I) инвариантным, имеют вид (см. (3.IIa) и (3.I3)):

$$A_n(x) \to A_n(x) + \frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_n}\ , \tag{3.23а}$$

$$\Phi(x) \to \Phi(x) - i\,\Box\lambda(x)\ ,$$

$$A_5(x) \to A_5(x) + iM\left(\mu(x) - \lambda(x)\right), \tag{3.23б}$$

$$X_n(x) \to X_n(x) + \frac{\partial\mu(x)}{\partial x_n}\ .$$

Сравнивая (3.2I) и (2.I3а), мы вправе заключить, что $L_0(x;M)$ обобщает лагранжиан $L_0^{(E)}(x)$ на случай теории поля с фундаментальной массой. Последний член в $L_0(x;M)$

$$\frac{M^2}{2}\left[X_k(x) - A_k(x) + \frac{i}{M}\frac{\partial A_5(x)}{\partial x_k}\right]^2 = \frac{1}{2}\left|F_{5k}\right|^2,$$

имеющий <u>неевклидову</u> природу, подобен слагаемому $\frac{M^2}{2}\left(\chi(x) - \cos\mu\,\varphi(x)\right)^2$ в скалярном лагранжиане (I.4.27). При этом $X_k(x)$ есть точный аналог скалярного поля $\chi(x)$. Что касается поля $A_5(x)$, то оно, подобно $\Phi(x)$, представляет собой <u>фиктивную</u> <u>калибровочную</u> <u>степень</u> <u>свободы</u>. С помощью подходящего преобразования (3.23б) ее можно вовсе устранить и после этого работать в калибровке (ср. (2.I3в))

$$A_5(x) = 0\ . \tag{3.24}$$

Условие (3.24) остается инвариантным лишь при таких преобразованиях (3.23б), для которых

$$\lambda(x) - \mu(x) = 0\ . \tag{3.25}$$

Ясно, что тем самым группа "неевклидовых" калибровочных преобразований (3.23) сужается до обычной группы (2.I3б), причем закон преобразования поля $X_n(x)$ оказывается таким же, как у $A_n(x)$:

$$X_n(x) \to X_n(x) + \frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_n}\ . \tag{3.26}$$

Обратим внимание на то, что локальные фиктивные поля $\Phi(x)$ и $A_5(x)$, входящие в лагранжиан $L_0(x;M)$, сформировались из исходных штюкельберговых переменных $A_5^{(1)}(p)$ и $A_5^{(2)}(p)$:

$$\Phi(x) = \frac{M}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{ipx}\frac{d^4p}{\varkappa}\left[(1+\varkappa)A_5^{(1)}(p) + (1-\varkappa)A_5^{(2)}(p)\right],$$

$$A_5(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{ipx}\frac{d^4p}{\varkappa}\left[A_5^{(1)}(p) + A_5^{(2)}(p)\right] \tag{3.27}$$

(см. (2.I9), (3.I)-(3.2), (3.6)-(3.7), (3.22)).

Специально подчеркнем также, что "штюкельбергов" член $\frac{1}{2}\left[\frac{\partial A_k(x)}{\partial x_k} - 2i\,\Phi(x)\right]$, принадлежащий евклидовой части лагранжиана $L_0(x;M)$ (см. (2.I3а)), возник в результате проектирования на плоскость $\tau=0$ <u>второго</u> <u>слагаемого</u> из $L_0(x,\tau;M)$ (см. (3.I4)), <u>не</u> <u>инвариантного</u> относительно произвольных абелевых калибровочных преобразований (3.I8) 5-потенциала $e^{i\tau}A_L(x,\tau)$:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial A_k(x)}{\partial x_k} - 2i\,\Phi(x)\right]^2 = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial\left(e^{i\tau}A_L(x,\tau)\right)}{\partial x_L} - 2iMe^{i\tau}A_5(x,\tau)\right|^2_{\tau=0}. \tag{3.28}$$

Вернемся снова к выражению (3.I4) для действия $S_0(M)$ и, пользуясь вновь независимостью $S_0(M)$ от τ, представим (3.I4) в виде

$$S_0(M) = M\int\delta(\tau)\,d^5x\,L_0(x,\tau;M)\ . \tag{3.29}$$

При этом компоненты 5-потенциала $A_L(x,\tau)$ продолжают подчиняться "уравнению связи" (3.I0а). Если разрешить это уравнение, используя в качестве начальных условий соотношения (ср. (3.I0б))

$$\begin{aligned} A_L(x,0) &= A_L(x) = \hat{A}_L(x,\tau)\Big|_{\tau=0}, \\ \frac{\partial A_L}{\partial\tau}(x,0) &= -i\,X_L(x) = \frac{\partial\hat{A}_L}{\partial\tau}(x,\tau)\Big|_{\tau=0}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

где $\hat{A}_L(x,\tau)$ – <u>расширенный</u> <u>5-потенциал</u> в конфигурационном 5-пространстве (см. /I/, приложение)*, то действие (3.I4) примет вид:

$$\begin{aligned} S_0(M) &= M\int\delta(\tau)\,d^5x\,\hat{L}_0(x,\tau;M) = \\ &= M\int\delta(\tau)\,d^5x\left[\frac{1}{4}\hat{F}_{KL}(x,-\tau)\hat{F}^{KL}(x,\tau) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial\left(e^{i\tau}\hat{A}_L(x,\tau)\right)}{\partial x_L} - 2iMe^{i\tau}\hat{A}_5(x,\tau)\right|^2\right], \end{aligned} \tag{3.3I}$$

---

*В импульсном представлении рассмотрение расширенных полей сопряжено, очевидно, с выходом за поверхность гиперболоида (2.22).

$$\hat F_{KL}(x,\tau)=\frac{\partial}{\partial x^L}\left(e^{i\tau}\hat A_K(x,\tau)\right)-\frac{\partial}{\partial x^K}\left(e^{i\tau}\hat A_L(x,\tau)\right). \tag{3.32}$$

Нетрудно убедиться, что после перехода к расширенному 5-потенциалу $\hat A_L(x,\tau)$ калибровочная симметрия действия $S_0(M)$ остается неизменной и описывается по-прежнему преобразованиями (3.I8) с дополнительным условием (3.I9) на 5-градиент $\Lambda_L(x,\tau)=\frac{\partial}{\partial x^L}(e^{i\tau}\lambda(x,\tau))$:

$$e^{i\tau}\hat A_L(x,\tau)\longrightarrow e^{i\tau}\hat A_L(x,\tau)-\Lambda_L(x,\tau),$$
$$\frac{\partial\Lambda_L(x,\tau)}{\partial x_L}-2iM\Lambda_5(x,\tau)=0\ . \tag{3.33}$$

Это условие можно явно учесть в законе преобразования величины $\frac{\partial\hat A_5(x,\tau)}{\partial x_5}$ и вместо (3.33) писать:

$$\hat A_n(x,\tau)\rightarrow\hat A_n(x,\tau)-e^{-i\tau}\Lambda_n(x,\tau),$$
$$\hat A_5(x,\tau)\rightarrow\hat A_5(x,\tau)-e^{-i\tau}\Lambda_5(x,\tau),$$
$$\frac{\partial\hat A_n(x,\tau)}{\partial x_5}\rightarrow\frac{\partial\hat A_n(x,\tau)}{\partial x_5}+iMe^{-i\tau}\Lambda_n(x,\tau)+e^{-i\tau}\frac{\partial\Lambda_5(x,\tau)}{\partial x_n}, \tag{3.34}$$
$$\frac{\partial\hat A_5(x,\tau)}{\partial x_5}\rightarrow\frac{\partial\hat A_5(x,\tau)}{\partial x_5}-iMe^{-i\tau}\Lambda_5(x,\tau)+e^{-i\tau}\frac{\partial\Lambda_n(x,\tau)}{\partial x_n},$$
$$\Lambda_L(x,\tau)=\frac{\partial}{\partial x^L}\left(e^{i\tau}\lambda(x,\tau)\right).$$

Легко видеть, что на плоскости $\tau=0$ соотношения (3.34) эквивалентны (3.23).

Градиентный характер калибровочного преобразования (3.33) 5-потенциала $e^{i\tau}\hat A_L(x,\tau)$ подсказывает, что соответствующее преобразование расширенных заряженных полей должно иметь вид (ср. (I.П.8)-(I.П.9))

$$\hat\varphi(x,\tau)\rightarrow S(x,\tau)\hat\varphi(x,\tau)=e^{ie\,e^{i\tau}\lambda(x,\tau)}\hat\varphi(x,\tau), \tag{3.35}$$

$\lambda(x,\tau)^+=\lambda(x,-\tau)$, e – электрический заряд.

Очевидно,

$$S^+(x,-\tau)=S^{-1}(x,\tau)\ , \tag{3.36}$$

$$\frac{1}{ie}S^{-1}(x,\tau)\frac{\partial S(x,\tau)}{\partial x^L}=\frac{\partial}{\partial x^L}\left[e^{i\tau}\lambda(x,\tau)\right]=\Lambda_L(x,\tau)\ . \tag{3.37}$$

Оператор

$$D_L=\frac{\partial}{\partial x^L}+iee^{i\tau}\hat A_L(x,\tau), \tag{3.38}$$
$$L=1,2,3,4,5.$$

действует на функции $\hat\varphi(x,\tau)$ как ковариантная производная, причем (см. (3.32))

$$[D_K,D_L]=-ie\hat F_{KL}(x,\tau), \tag{3.39}$$
$$K,L=1,2,3,4,5.$$

Отметим, что в контексте калибровочной теории с фундаментальной массой расширенные поля оказываются более предпочтительными переменными по сравнению с полями, подчиняющимися"уравнению связи" (3.IIa), поскольку калибровочные преобразования последних, вообще говоря*/, нелокальны (см. (I.П.9)).

Разумеется, принципиальное значение имеет способ построения 5-плотности $\hat L_0(x,\tau;M)$ в терминах расширенных полей (см. (3.3I) и (I.П.5)). Если исходную электромагнитную 5-плотность $L_0(x,\tau;M)$ из (3.I4) записать в виде

$$L_0(x,\tau;M)=L_0\left(A_K(x,\tau),\frac{\partial A_K(x,\tau)}{\partial x_L}\right), \tag{3.40}$$
$$K,L=1,2,3,4,5,$$

то после расширения 5-потенциала, по определению,

$$L_0\left(\hat A_K(x,\tau),\frac{\partial\hat A_K(x,\tau)}{\partial x_L}\right)\equiv\hat L_0(x,\tau;M)\ . \tag{3.4I}$$

---

*/Исключением является абелев закон преобразования (3.IIa) электромагнитного 5-потенциала $A_L(x,\tau)$.

При построении теории электромагнитных взаимодействий, исходя из требования инвариантности относительно локальных калибровочных преобразований (3.33) и (3.35), мы должны прийти к полной лагранжевой плотности $\hat{L}_{tot}(x,\tau;M)$, <u>локальной в конфигурационном 5-пространстве</u> (ср. (I.II.6)-(I.II.7)). На этом роль пятимерной формулировки можно будет считать законченной. Для возвращения к четырехмерной картине достаточно просто взять интеграл по τ в действии

$$S_{tot}(M) = M\int \delta(\tau)\, d^5x\, \hat{L}_{tot}(x,\tau;M). \tag{3.42}$$

§4. ПОЛЕ ЯНГА-МИЛЛСА В ТЕОРИИ С ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАССОЙ

Нашей задачей теперь является разработка неевклидовой версии теории безмассового поля Янга-Миллса (Я.-М.). Не теряя общности, будем считать здесь, что внутренняя симметрия описывается группой $SU(2)$.

При построении неевклидова действия поля Я.-М. (в наших обозначениях – $S(M)$), возьмем за образец выражение (3.31) для неевклидова действия $S_0(M)$ электромагнитного поля. Это означает, очевидно, что плоским аналогом $S(M)$ следует считать евклидово действие $S^{(E)}$ поля Я.-М. в штюкельберговой формулировке (ср. (2.13а))

$$S^{(E)} = \int L^{(E)}(x)\, d^4x, \tag{4.1а}$$

$$L^{(E)}(x) = \sum_{a=1}^{3}\left[\frac{1}{4}\left(F^a_{k\ell}(x)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A^a_k(x)}{\partial x_k} - 2i\,\phi^a(x)\right)^2\right], \tag{4.1б}$$

где

$$F^a_{k\ell}(x) = \frac{\partial A^a_\ell(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial A^a_k(x)}{\partial x_\ell} + g\,\varepsilon^{abc} A^b_k(x)\, A^c_\ell(x), \tag{4.2}$$

а $\phi^a(x)$ – триплет скалярных штюкельберговых полей $\left(\phi^a(x)^+ = -\phi^a(x)\right)$.

Итак, запишем искомое действие в виде

$$S(M) = M\int \delta(\tau)\, d^5x\, \hat{L}(x,\tau;M), \tag{4.3}$$

где $\hat{L}(x,\tau;M)$ обобщает на неабелев случай электромагнитную плотность $\hat{L}_0(x,\tau;M)$ из (3.31). По своей структуре величина $\hat{L}_0(x,\tau;M)$ подобна каноническому лагранжиану <u>пятимерной</u> теории Максвелла, к которому добавлен член, не инвариантный относительно пятимерных калибровочных преобразований (3.18). Последний, как мы знаем из (3.28), порождает в неевклидовом действии (3.21) штюкельбергову добавку $\frac{1}{2}\int d^4x\left[\frac{\partial A_k}{\partial x_k} - 2i\phi\right]^2$.

Естественно полагать, что неабелева плотность $\hat{L}(x,\tau;M)$ должна строиться на базе соответствующей <u>пятимерной</u> теории Янга-Миллса, причем механизм нарушения калибровочной симметрии нужно выбрать так, чтобы генерировать в искомом действии лишь штюкельбергов член $\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{3}\int d^4x\left[\frac{\partial A^a_k}{\partial x_k} - 2i\,\phi^a\right]^2$.

Сопоставим полю Я.-М. в конфигурационном 5-пространстве матрицу

$$e^{i\tau}\tilde{A}_L(x,\tau) = \frac{1}{2} e^{i\tau}\sigma_a \hat{A}^a_L(x,\tau), \tag{4.4}$$

$$a = 1,2,3;\ L = 1,2,3,4,5,$$

где σ_a – матрицы Паули, а $\hat{A}^a_L(x,\tau)$ – триплет расширенных полей, удовлетворяющих соотношению

$$\left(\hat{A}^a_L(x,\tau)\right)^+ = \left(\hat{A}^a_\ell(x,-\tau), -\hat{A}^a_5(x,-\tau)\right), \tag{4.5}$$

$$\ell = 1,2,3,4.$$

Далее положим (ср. (3.38))

$$D_L = \frac{\partial}{\partial x^L} + ig\,e^{i\tau}\tilde{A}_L(x,\tau), \tag{4.6}$$

$$L = 1,2,3,4,5;$$

и определим 5-тензор Я.-М. как

$$\tilde{F}_{KL}(x,\tau) = \frac{1}{2}\sigma_a \hat{F}^a_{KL}(x,\tau) = -ig\left[D_K, D_L\right] =$$

$$= \frac{\partial\left(e^{i\tau}\tilde{A}_K\right)}{\partial x^L} - \frac{\partial\left(e^{i\tau}\tilde{A}_L\right)}{\partial x^K} - ig\,e^{2i\tau}\left[\tilde{A}_K, \tilde{A}_L\right], \tag{4.7}$$

$$K, L = 1,2,3,4,5;\ a = 1,2,3.$$

Отсюда, с учетом (4.5), находим, что

$$\tilde F_{k\ell}(x,\tau)=\tilde F^{k\ell}(x,\tau)=\left(\tilde F_{k\ell}(x,-\tau)\right)^+=$$

$$=e^{i\tau}\left\{\frac{\partial\tilde A_\ell(x,\tau)}{\partial x_k}-\frac{\partial\tilde A_k(x,\tau)}{\partial x_\ell}-ige^{i\tau}\left[\tilde A_k(x,\tau),\tilde A_\ell(x,\tau)\right]\right\}= \qquad (4.8)$$

$$=e^{i\tau}\frac{\sigma_a}{2}\left\{\frac{\partial\hat A^a_\ell(x,\tau)}{\partial x_k}-\frac{\partial\hat A^a_k(x,\tau)}{\partial x_\ell}+ge^{i\tau}\varepsilon^{abc}\hat A^b_k(x,\tau)\hat A^c_\ell(x,\tau)\right\}=$$

$$=\frac{\sigma_a}{2}\hat F^a_{k\ell}(x,\tau)\ ;\qquad k,\ell=1,2,3,4.$$

$$\tilde F_{5\ell}(x,\tau)=-\tilde F^{5\ell}(x,\tau)=-\left(\tilde F_{5\ell}(x,-\tau)\right)^+=$$

$$=-e^{i\tau}\left\{M\frac{\partial\tilde A_\ell(x,\tau)}{\partial\tau}+iM\tilde A_\ell(x,\tau)+\frac{\partial\tilde A_5(x,\tau)}{\partial x_\ell}+ige^{i\tau}\left[\tilde A_5(x,\tau),\tilde A_\ell(x,\tau)\right]\right\}= \qquad (4.9)$$

$$=-e^{i\tau}\frac{\sigma_a}{2}\left\{M\frac{\partial\hat A^a_\ell(x,\tau)}{\partial\tau}+iM\hat A^a_\ell(x,\tau)+\frac{\partial\hat A^a_5(x,\tau)}{\partial x_\ell}-ge^{i\tau}\varepsilon^{abc}\hat A^b_5(x,\tau)\hat A^c_\ell(x,\tau)\right\}=$$

$$=\frac{\sigma_a}{2}\hat F^a_{5\ell}(x,\tau)\ ;\qquad \ell=1,2,3,4.$$

Теперь, в соответствии со сказанным выше, будем считать, что неевклидово действие поля Я.-М. (4.3) представляет собой следующий неотрицательный функционал (ср. (3.3I)):

$$S(M)=M\int\delta(\tau)d^5x\,\hat L(x,\tau;M)=$$

$$=M\int\delta(\tau)d^5x\left\{\frac12\,\mathrm{Tr}\,\tilde F_{KL}(x,-\tau)\tilde F^{KL}(x,\tau)+\right.$$

$$+\mathrm{Tr}\left[\left(\frac{\partial(e^{i\tau}\tilde A_L(x,\tau))}{\partial x_L}-2iMe^{i\tau}\tilde A_5(x,\tau)\right)^+\right.\cdot$$

$$\left.\left.\left(\frac{\partial(e^{i\tau}\tilde A_K(x,\tau))}{\partial x_K}-2iMe^{i\tau}\tilde A_5(x,\tau)\right)\right]\right\},\qquad (4.10)$$

$$K,L=1,2,3,4,5.$$

Полагая (ср. (3.30))

$$\tilde A_L(x,0)=\tilde A_L(x)=\frac12\sigma_a A^a_L(x),$$

$$i\frac{\partial\tilde A_L}{\partial\tau}(x,0)=\tilde X_L(x)=\frac12\sigma_a X^a_L(x), \qquad (4.11)$$

$$\frac M2\left(A^a_5(x)+X^a_5(x)\right)\equiv\phi^a(x),\quad L=1,2,3,4,5;\ a=1,2,3;$$

и принимая во внимание (4.8)-(4.9), можно записать (4.10) в форме, аналогичной (3.2I):

$$S(M)=\int d^4x\ L(x;M), \qquad (4.12a)$$

$$L(x;M)=\sum_{a=1}^{3}\left\{\frac14\left(F^a_{k\ell}(x)\right)^2+\frac12\left[\frac{\partial A^a_k(x)}{\partial x_k}-2i\phi^a(x)\right]^2+\right. \qquad (4.12б)$$

$$\left.+\frac{M^2}{2}\left[X^a_k(x)-A^a_k(x)+\frac iM\frac{\partial A^a_5(x)}{\partial x_k}-ig\frac{\varepsilon}{M}^{abc}A^b_5(x)A^c_k(x)\right]^2\right\},\quad k,\ell=1,2,3,4.$$

Формула (4.I2б) решает задачу обобщения евклидова лагранжиана Я.-М. (4.Iб) в духе теории поля с фундаментальной массой. Нам остается лишь найти группу калибровочных преобразований, оставляющих лагранжиан (4.I2б) инвариантным.

С этой целью вернемся к пятимерным обозначениям и предположим, что калибровочное преобразование пятимерного поля Я.-М. (4.4) имеет вид (ср. (3.33) и (3.35))

$$e^{i\tau}\tilde A_L(x,\tau)\to S(x,\tau)e^{i\tau}\tilde A_L(x,\tau)S^{-1}(x,\tau)-\frac{1}{ig}\frac{\partial S(x,\tau)}{\partial x^L}S^{-1}(x,\tau), \qquad (4.13)$$

где

$$S(x,\tau)=e^{ige^{i\tau}\tilde\lambda(x,\tau)},\quad \tilde\lambda(x,\tau)=\frac12\sigma_a\lambda_a(x,\tau), \qquad (4.14)$$

$$\lambda^+_a(x,\tau)=\lambda_a(x,-\tau).$$

Очевидно,

$$S(x,\tau)^{+} = S^{-1}(x,-\tau) . \tag{4.15}$$

Вводя обозначение (ср. (3.37))

$$\tilde{\Lambda}_L(x,\tau) = \frac{1}{ig} S^{-1}(x,\tau) \frac{\partial S(x,\tau)}{\partial x^L} , \tag{4.16}$$

соотношение (4.13) можно записать так:

$$e^{i\tau}\tilde{A}_L(x,\tau) \to S(x,\tau)[e^{i\tau}\tilde{A}_L(x,\tau) - \tilde{\Lambda}_L(x,\tau)]S^{-1}(x,\tau). \tag{4.17}$$

Легко видеть, что первое слагаемое в (4.10)

$$M\int \delta(\tau)\, d^5x \left[\frac{1}{2} \operatorname{Tr} \tilde{F}_{KL}(x,-\tau)\tilde{F}^{KL}(x,\tau)\right]$$

остается инвариантным при преобразованиях (4.17), хотя, в отличие от абелевого случая, функцию $\delta(\tau)$ здесь уже приходится принимать в расчет. Второе слагаемое в (4.10), вообще говоря, не инвариантно относительно (4.17). Сузим поэтому группу (4.14) до такой совокупности преобразований G, чтобы для всех $S(x,\tau)\in G$ при преобразованиях (4.17) выполнялось соотношение

$$\frac{\partial(e^{i\tau}\tilde{A}_L(x,\tau))}{\partial x_L} - 2iMe^{i\tau}\tilde{A}_5(x,\tau) \to S(x,\tau)\left[\frac{\partial(e^{i\tau}\tilde{A}_L(x,\tau))}{\partial x_L} - 2iMe^{i\tau}\tilde{A}_5(x,\tau)\right]S^{-1}(x,\tau). \tag{4.18}$$

Ясно, что теперь действие (4.10) уже будет калибровочно инвариантным. Нетрудно убедиться далее, что при таком сужении мы подчиняем параметры $\lambda_a(x,\tau)$ группы (4.14) следующему матричному уравнению (ср. (3.33)):

$$\frac{\partial\tilde{\Lambda}_L(x,\tau)}{\partial x_L} + ige^{i\tau}[\tilde{A}_L(x,\tau),\tilde{\Lambda}^L(x,\tau)] - 2iM\tilde{\Lambda}_5(x,\tau) = 0. \tag{4.19}$$

Условие (4.19) оказывается существенным лишь при рассмотрении закона преобразования величины $\frac{\partial}{\partial x_5}\tilde{A}_5(x,\tau)$ и может быть в нем полностью учтено. В результате мы приходим к следующему калибровочному преобразованию полей Я.-М. и их производных по x_5 в конфигурационном 5-пространстве (ср. 3.34)):

$$\tilde{A}_n(x,\tau) \to S(x,\tau)\left[\tilde{A}_n(x,\tau) - e^{-i\tau}\tilde{\Lambda}_n(x,\tau)\right]S^{-1}(x,\tau)$$

$$\tilde{A}_5(x,\tau) \to S(x,\tau)\left[\tilde{A}_5(x,\tau) - e^{-i\tau}\tilde{\Lambda}_5(x,\tau)\right]S^{-1}(x,\tau)$$

$$\frac{\partial\tilde{A}_n(x,\tau)}{\partial x_5} \to S(x,\tau)\left\{\frac{\partial\tilde{A}_n(x,\tau)}{\partial x_5} + ig[\tilde{\Lambda}_5(x,\tau),\tilde{A}_n(x,\tau)] + iMe^{-i\tau}\tilde{\Lambda}_n(x,\tau) + e^{-i\tau}\frac{\partial\tilde{\Lambda}_5(x,\tau)}{\partial x_n}\right\}S^{-1}(x,\tau)$$

$$\frac{\partial\tilde{A}_5(x,\tau)}{\partial x_5} \to S(x,\tau)\left\{\frac{\partial\tilde{A}_5(x,\tau)}{\partial x_5} - ig[\tilde{A}_n(x,\tau),\tilde{\Lambda}_n(x,\tau)] - iMe^{-i\tau}\tilde{\Lambda}_5(x,\tau) + e^{-i\tau}\frac{\partial\tilde{\Lambda}_n(x,\tau)}{\partial x_n}\right\}S^{-1}(x,\tau), \tag{4.20}$$

где

$$S(x,\tau)\in G .$$

Полагая в (4.20) $\tau=0$ и учитывая (4.11), будем иметь:

$$\tilde{A}_n(x) \to S\left(\tilde{A}_n(x) - \tilde{\Lambda}_n(x,0)\right)S^{-1}$$

$$\tilde{\Phi}(x) \to S\left(\tilde{\Phi}(x) + g[\tilde{A}_n(x),\tilde{\Lambda}_n(x,0)] + i\frac{\partial\tilde{\Lambda}_n(x,0)}{\partial x_n}\right)S^{-1} \tag{4.21a}$$

$$\tilde{A}_5(x) \to S\left(\tilde{A}_5(x) - \tilde{\Lambda}_5(x,0)\right)S^{-1}$$

$$\tilde{X}_n(x) \to S\left(\tilde{X}_n(x) - \frac{g}{M}[\tilde{\Lambda}_5(x,0),\tilde{A}_n(x)] - \tilde{\Lambda}_n(x,0) + \frac{i}{M}\frac{\partial\tilde{\Lambda}_5(x,0)}{\partial x_n}\right)S^{-1}. \tag{4.21б}$$

Нетрудно убедиться, что преобразования (4.20)-(4.21) обладают групповым свойством. Из самого способа получения (4.21) следует, что эти калибровочные преобразования оставляют инвариантным неевклидов лагранжиан Я.-М. (4.12б).

Заметим, что в качестве параметров преобразований (4.21) можно использовать два триплета вещественных функций от x : $\lambda_a(x) = \lambda_a(x,0)$ и $\mu_a(x) = i\frac{\partial\lambda_a}{\partial\tau}(x,0)$ (ср. (3.13) и (3.23)). При этом, в силу (4.14) и (4.16),

$$S = e^{ig\tilde{\lambda}(x)} , \quad \tilde{\lambda}(x) = \frac{1}{2}\sigma_a\lambda_a(x) ,$$

$$\tilde{\Lambda}_n(x,0) = \frac{1}{2}\sigma_a \Lambda^a_n(x,0) = -\frac{1}{ig} S^{-1}\frac{\partial S}{\partial x_n} =$$

$$= -\int_0^1 d\xi\, e^{-i\xi g\tilde{\lambda}(x)} \frac{\partial \tilde{\lambda}(x)}{\partial x_n} e^{i\xi g \tilde{\lambda}(x)} ,$$

$$i\tilde{\Lambda}_5(x,0) = \frac{i}{2}\sigma_a \Lambda^a_5(x,0) = \frac{M}{g} S^{-1}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[e^{ige^{i\tau}\tilde{\lambda}(x,\tau)}\right]\Big|_{\tau=0} = \qquad (4.22)$$

$$= M\int_0^1 d\xi\, e^{-\xi g\tilde{\lambda}(x)}\tilde{\mu}(x) e^{i\xi g\tilde{\lambda}(x)} - M\tilde{\lambda}(x) .$$

В инфинитезимальной области

$$\Lambda^a_n(x,0) \approx -\frac{\partial \lambda_a(x)}{\partial x_n} ,$$

$$i\Lambda^a_5(x,0) \approx M(\mu_a(x) - \lambda_a(x)) . \qquad (4.23)$$

Неевклидов лагранжиан (4.12б) для поля Я.-М. имеет, в принципе, ту же структуру, что и его абелев аналог $L_o(x;M)$ из (3.21). В нем фигурируют два триплета фиктивных скалярных полей $A^a_5(x)$ и $\phi^a(x)$, имеющих смысл калибровочных степеней свободы. От полей $A^a_5(x)$ можно избавиться, если выбрать калибровку (ср. (3.24))

$$A^a_5(x) = 0 . \qquad (4.24)$$

Это влечет за собой сужение "неевклидовой" группы калибровочных преобразований (4.21) до группы стандартных калибровочных преобразований Я.-М. (условие $\Lambda^a_5(x,0) = 0$). Нового детерминанта типа Фаддеева-Попова здесь не возникает.

Дальнейшее сужение калибровочной симметрии связано с наложением калибровочных условий на поля $A^a_n(x)$ и $\phi^a(x)$. Если использовать стандартные калибровки для поля Я.-М., не зависящие от $\phi^a(x)$, то квадратичный член $\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{3}\left[\frac{\partial A^a_k(x)}{\partial x_k} - 2i\phi^a(x)\right]^2$ в лагранжиане (4.12б) может быть просто опущен.

Таким образом, вместо (4.12б) мы получим в свое распоряжение следующий "эффективный" лагранжиан, описывающий поля Я.-М. в рамках КТП с фундаментальной массой:

$$L_{эфф.}(x;M) = \sum_{a=1}^{3}\left\{\frac{1}{4}\left(F^a_{kl}(x)\right)^2 + \frac{M^2}{2}\left(X^a_k(x) - A^a_k(x)\right)^2\right\} + L_{фаддеев-попов}(x) . \qquad (4.25)$$

При этом калибровочные преобразования обоих триплетов векторных полей $A^a_k(x)$ и $X^a_k(x)$ являются одинаковыми (см. (4.21) при $\tilde{\Lambda}_5(x,0) = 0$).

Интеграл действия $S_{эфф.}(M) = \int d^4x\, L_{эфф}(x;M)$ может быть сопоставлен с действием (I.4.28) скалярной модели. Напомним, что, используя (I.4.28), мы построили в /I/ производящий функционал для скалярных функций Грина, вычислили свободные пропагаторы и продемонстрировали, как неевклидова КТП переходит в обычную евклидову теорию в плоском пределе $M \to \infty$. Аналогичную работу можно было бы проделать и здесь, почти дословно повторяя соответствующие рассуждения из /I/.

§5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе развита калибровочная теория полей Максвелла и Янга-Миллса, содержащая новый универсальный масштаб – фундаментальную массу M. Параметр M имеет отчетливый геометрический смысл: это радиус кривизны неевклидова импульсного 4-пространства теории.

Анализируя построенную неевклидову КТП, можно прийти к следующим выводам.

1. Неевклидовы калибровочные векторные поля Максвелла и Янга-Миллса по-прежнему описываются локальными лагранжианами в четырехмерном x -пространстве, хотя в основу теории положена новая геометрическая концепция импульсного 4-пространства. Неевклидова природа p -пространства проявляется в зависимости лагранжианов от дополнительных полей типа $X_n(x)$ и $X^a_n(x)$. Особенностью данной формулировки является то, что в ней фигурируют штюкельберговы калибровочные степени свободы $\{\phi(x), A_5(x)\}$ и $\{\phi^a(x), A^a_5(x)\}$.

2. Группы калибровочных преобразований в новой схеме оказываются более широкими и зависят от удвоенного числа параметров $\{\lambda(x), \mu(x)\}$ и $\{\lambda_a(x), \mu_a(x)\}$. Параметры $\mu(x)$ и $\mu_a(x)$, имеющие такое же неевклидово происхождение, как и поля $X_n(x)$ и $X^a_n(x)$, могут быть использованы для подавления зависимости от переменных $A_5(x)$ и $A^a_5(x)$.

3. После релятивистского разворота линейная комбинация $A^{(1)}_n(p) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{p^2}{M^2}}A_n(p) - X_n(p)\right)$ переходит в чисто продольное поле.

В результате свободное электромагнитное поле $(p_\mu p^\mu = 0)$ описывается лишь одним 4-потенциалом $A_\mu^{(1)} = \frac{1}{2}\left(A_\mu(p) + X_\mu(p)\right)$. К аналогичным заключениям можно прийти и в неабелевом случае. Этот вопрос будет подробно проанализирован после рассмотрения в рамках неевклидовой КТП хиггсовского механизма нарушения калибровочной симметрии.

4. Подобно скалярной модели [I], неевклидова теория калибровочных векторных полей допускает своеобразную локальную формулировку в пятимерном конфигурационном пространстве. Замечательно, что симметрия теории относительно калибровочных преобразований здесь принимает облик нарушенной локальной калибровочной симметрии в пяти измерениях, причем механизм нарушения имеет универсальный характер. Фундаментальное представление 5-мерной калибровочной группы в случае абелевой $U(1)$ -симметрии есть $S(x,\tau) = e^{ie\lambda(x,\tau)e^{i\tau}}$, а в случае $SU(2)$-симметрии, соответственно, $S(x,\tau) = e^{ig\tilde{\lambda}(x,\tau)e^{i\tau}}$. Предполагая, что поля материи, заданные в 5-пространстве, трансформируются при калибровочных преобразованиях по закону $\hat{\varphi}(x,\tau) \to S(x,\tau)\hat{\varphi}(x,\tau)$, можно прийти к однозначному обобщению на случай теории с фундаментальной массой квантовой электродинамики [3], модели Салама-Вайнберга, КХД и т.д.

5. Ряд соотношений, обсуждаемых в этой работе, был установлен в [4] в рамках эвристического рассмотрения. Это касается самой концепции 5-потенциала, локальных калибровочных преобразований вида (3.II) и (4.I3), уравнений движения типа (2.23)-(2.24) для компонент 5-потенциала.

Авторы выражают искреннюю благодарность Н.Н.Боголюбову, А.А.Логунову, В.А.Мещерякову и П.Физиеву за интерес к работе и плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

I. Кадышевский В.Г., Матеев М.Д. ОИЯИ, Р2-83-644, Дубна, I983.
2. Stückelberg E.G.G. Helv. Phys.Acta, 1938, 11, p.225.
3. Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. Phys.Lett., 1981, 106B, p.139.
4. Kadyshevsky V.G. Nucl.Phys., 1978, B141, p.477.

Донков А.Д. и др. Р2-84-109
Квантовая теория поля и новый универсальный масштаб в области высоких энергий. Калибровочные векторные поля

Работа является второй публикацией в рамках нового цикла наших исследований по квантовой теории поля с фундаментальной массой. В ней развита калибровочная теория свободного электромагнитного поля и поля Янга-Миллса, адекватно учитывающая неевклидов характер импульсного 4-пространства. Подобно скалярной модели [1], данная схема допускает своеобразную локальную формулировку в пятимерном конфигурационном пространстве. Замечательно, что в этой формулировке симметрия теории относительно калибровочных преобразований принимает облик нарушенной локальной симметрии в пяти измерениях, причем механизм нарушения имеет универсальный характер.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Г.Г.Сандуковской

Donkov A.D. et al. P2-84-109
Quantum Field Theory and a New Universal High Energy Scale. Gauge Vector Fields

The present paper is the second of a new series of our publications on quantum field theory with the fundamental mass. Here the theory of the free electromagnetic field and the Yang-Mills field is developed adequately taking into account the noneuclidean character of the momentum 4-space. Similarly to the scalar model [1] this scheme allows a specific local formulation in the five-dimensional configuration space. It is remarkable that the symmetry of the theory with respect to gauge transformations within this formulation looks like a broken local gauge symmetry in five dimensions, the breaking mechanism being of an universal form.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984