СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 8371

И.В.Полубаринов

ОБ ОПЕРАТОРЕ КООРДИНАТЫ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 8371

И.В.Полубаринов

ОБ ОПЕРАТОРЕ КООРДИНАТЫ
В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

I. ВВЕДЕНИЕ

Первоначально пространственно-временное описание играло в релятивистской квантовой теории поля незначительную роль. Основным рабочим аппаратом было p-представление, а целью - получение тех или иных распределений по импульсам. Только работы Томонаги, Швингера и Фейнмана и последовавшее затем развитие релятивистской квантовой теории поля (см. /I/) в значительной мере восстановили позиции, утраченные пространственно-временным описанием, и продемонстрировали красоту, выразительность и экономность этого подхода. Тем не менее, до сих пор отсутствует ясность с определением оператора координаты в отличие от оператора импульса. Попытки определить оператор координаты предпринимаются непрерывно. Они концентрировались а) вокруг поиска оператора координаты для одноквантовых состояний /2-I5/ (многоквантовый случай обсуждался недавно в /I6/, б) конструирования его из генераторов группы Пуанкаре наподобие центра тяжести /I7-I9/, в) построения его из генераторов конформной группы для случая массы нуль /20/. С целью регуляризации теории М.А.Марков /2I/ впервые ввел оператор координаты, не коммутирующий с оператором поля. Этим свойством обладают и обсуждаемые ниже операторы (сопоставление см. на стр. I5).

Существенная трудность с определением координаты состоит в том, что не существует ни одноквантовых, ни многоквантовых состояний, строго локализованных в пространстве, т.е. состояний с фиксированной координатой или сосредоточенных лишь в финитной области пространства. Однако, как показал Д.И.Блохинцев /I0/, существуют даже одноквантовые состояния, локализованные сколь угодно точно в том смысле, что они имеют сколь угодно малую дисперсию $\overline{(x-\bar{x})^2}$. Но и эти состояния обладают неограниченно простирающимися "хвостами". Понятно, что правильный оператор координаты не может коммутировать с оператором числа квантов.

Сложность еще и в том, что оператор координаты принадлежит к числу несохраняющихся операторов. Таких величин в физике большинство, но их свойства в теории поля не вполне изучены и привычны[22,23]. В п. 3 настоящей работы для получения оператора координаты для скалярных и спинорных полей мы применяем вариационный принцип, причем так же, как он применялся в[22] для получения других несохраняющихся операторов. Для неквантованного поля Дирака соответствующее выражение обсуждалось с момента возникновения теории Дирака[3-5], и, например, из рассмотрения в книге[24] ясны его черты и для квантованного случая (осциллирующие члены отвечают рождению и уничтожению электронно-позитронных пар). Вместе с тем, вторично квантованная трактовка этого выражения была дана лишь недавно[16].

Представляется естественным требовать соблюдение причинности на операторном уровне (так, она присуща уравнениям движения для операторов поля, хотя довольно глубоко запрятана в амплитудах)[25,26]. Поэтому важно, чтобы при действии оператора координаты на оператор поля (т.е. при образовании неодновременного коммутатора этих величин) получался причинный результат. В п. 3 показано, что найденные при помощи вариационного принципа операторы отвечают этому требованию. Для выполнения требования существенно присутствие членов, рождающих и уничтожающих пары (автор работы[16] склонен отбросить такие члены как нефизические). Наличие этих членов означает только, что собственными векторами таких операторов координаты будут состояния с неопределенным числом квантов типа когерентных состояний. Это представляется естественным для любого правильного оператора координаты.

В п. 3 отмечены также некоторые встретившиеся нам трудности.

Рассмотрению в п.3 предпослан в п.2 с иллюстративными целями более "наивный" подход к конструированию оператора координаты. Этот оператор координаты коммутирует с оператором числа квантов, в применении к одноквантовым состояниям совпадает с координатой Ньютона-Вигнера[6], но не отвечает требованию причинности.

В Приложении рассмотрены необходимые для понимания основного текста эволюция координат и свойства функций преобразования Дирака для спинов 0, $\frac{1}{2}$ и I в релятивистской квантовой механике.

2. ОПЕРАТОР КООРДИНАТЫ, КОММУТИРУЮЩИЙ С ОПЕРАТОРОМ ЧИСЛА КВАНТОВ

Рассмотрим нейтральное скалярное поле $\varphi(x)$, подчиняющееся свободному уравнению Шредингера-Фока-Клейна-Гордона (ШФКГ)

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = 0 \qquad (I)$$

и обычным перестановочным соотношениям

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = 0, \qquad [\varphi(x), \partial_4\varphi(x')] = \delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (t'=t). \qquad (2)$$

Обратим внимание на аналогии в записи оператора числа квантов в $\vec{p}$- и $\vec{x}$-пространствах[x)]

$$N = \int d^3p\, \mathcal{N}(\vec{p}) = \int d^3x\, \mathcal{N}(x) \qquad (3)$$

через операторы числа квантов с заданными значениями $\vec{p}$ и $\vec{x}$

$$\mathcal{N}(\vec{p}) = a^+(\vec{p})a(\vec{p}) \qquad (4.a)$$

$$\mathcal{N}(x) = \sqrt{2\omega}\,\varphi^{(+)}(x)\sqrt{2\omega}\,\varphi^{(-)}(x) \qquad x \equiv (\vec{x}, it) \qquad (4.б)$$

(когда $\vec{p}$ и $\vec{x}$ пробегают все значения, операторы $\mathcal{N}(\vec{p})$ и $\mathcal{N}(x)$ составляют два полных набора коммутирующих операторов), в записи перестановочных соотношений

$$[a(\vec{p}), a(\vec{p}')] = 0, \qquad [a(\vec{p}), a^+(\vec{p}')] = \delta(\vec{p}-\vec{p}') \qquad (5.a)$$

$$[\sqrt{2\omega}\,\varphi^{(-)}(x), \sqrt{2\omega}\,\varphi^{(-)}(x')] = 0, \; [\sqrt{2\omega}\,\varphi^{(-)}(x), \sqrt{2\omega}\,\varphi^{(+)}(x')] = \delta(\vec{x}-\vec{x}') \; (t=t') \qquad (5.б)$$

в записи полных систем состояний[xx)]

$$|\vec{p}_1\vec{p}_2\cdots\vec{p}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}a^+(\vec{p}_1)a^+(\vec{p}_2)\cdots a^+(\vec{p}_n)|0\rangle \qquad (6.a)$$

$$|\vec{x}_1\vec{x}_2\ldots\vec{x}_n t\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\sqrt{2\omega_1}\,\varphi^{(+)}(x_1)\sqrt{2\omega_2}\,\varphi^{(+)}(x_2)\cdots\sqrt{2\omega_n}\,\varphi^{(+)}(x_n)|0\rangle \; (x_{10}=\cdots=x_{n0}=t) \qquad (6.б)$$

– собственных функций соответственно полных наборов (4.а) и (4.б) (вме-

x) Происхождение оператора числа квантов и различные формы его в терминах $\vec{x}$-пространства обсуждаются в Приложении Б к работе[26]. Определение положительно- и отрицательно-частотных частей $\varphi^{(\mp)}(x)$ поля $\varphi(x)$ см. в Приложении А к работе[25]. Здесь и ниже $\omega = \sqrt{-\Delta + m^2}$, $\Delta = \partial_k\partial_k$, латинские индексы пробегают значения I,2,3, греческие – I,2,3,4, $x_4 = it$.

xx) Соотношение полноты приведено в Приложении А к работе[26].

сто (6.б), можно также пользоваться ковариантной системой состояний

$$|x_1 x_2 \dots x_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\varphi^{(+)}(x_1)\varphi^{(+)}(x_2)\dots\varphi^{(+)}(x_n)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}:\varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n):|0\rangle\Big) \qquad (6.в)$$

Оператор 4-импульса выражается через $\mathcal{N}(\vec{p})$ согласно

$$P_\mu = \int d^3p\, p_\mu \mathcal{N}(\vec{p}). \qquad (7)$$

Напрашивается попытка образовать по аналогии оператор координаты^x)

$$X_\mu(t) = \int d^3x\, x_\mu \mathcal{N}(x). \qquad (8)$$

Различные формы записи оператора $X_m(t)$

$$X_m(t) = \frac{1}{2}\int d^3x : \frac{m}{\sqrt{\omega}}\varphi\frac{m}{\sqrt{\omega}}(x_m\varphi) + \frac{\partial_k}{\sqrt{\omega}}\varphi\frac{\partial_k}{\sqrt{\omega}}(x_m\varphi) - \frac{\partial_4}{\sqrt{\omega}}\varphi\frac{\partial_4}{\sqrt{\omega}}(x_m\varphi): = \qquad (9.а)$$

$$= \int d^3x\left(\frac{m}{\sqrt{\omega}}\varphi^{(+)}\frac{m}{\sqrt{\omega}}(x_m\varphi^{(-)}) + \frac{\partial_k}{\sqrt{\omega}}\varphi^{(+)}\frac{\partial_k}{\sqrt{\omega}}(x_m\varphi^{(-)}) - \frac{\partial_4}{\sqrt{\omega}}\varphi^{(+)}\frac{\partial_4}{\sqrt{\omega}}(x_m\varphi^{(-)})\right) = \qquad (9.б)$$

$$= \int d^3x\, x_m\left(\partial_4\varphi^{(+)}\varphi^{(-)} - \varphi^{(+)}\partial_4\varphi^{(-)}\right) = \qquad (9.в)$$

$$= \int d^3x\, x_m\sqrt{2\omega}\,\varphi^{(+)}(x)\,\sqrt{2\omega}\,\varphi^{(-)}(x) \qquad (9.г)$$

соответствуют различным формам записи оператора N в /26/ (Приложение Б). Из выражений (9.в) или (9.г) можно заключить, что в применении к одноквантовым состояниям эта координата совпадает с координатой Ньютона-Вигнера.

Переходя к различным коммутационным соотношениям, прежде всего, отметим

---

x) С этой точки зрения следует придавать прямой смысл также и операторам $N(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} d^3p\,\mathcal{N}(\vec{p})$, $N(\mathcal{Q},t) = \int_{\mathcal{Q}} d^3x\,\mathcal{N}(x)$, $P_\mu(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} d^3p\, p_\mu\mathcal{N}(\vec{p})$ и $X_m(\mathcal{Q},t) = \int_{\mathcal{Q}} d^3x\, x_m\mathcal{N}(x)$, где интегрирование выполняется по тем или иным областям $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ в $\vec{p}$- и $\vec{x}$-пространствах. Если взять бесконечно малые окрестности около каждой точки $\vec{p}$- или $\vec{x}$-пространства, получим четыре полных набора операторов $N(\vec{p})$, $N(\vec{x},t)$, $P_\mu(\vec{p})$ и $X_m(\vec{x},t)$, взамен $\mathcal{N}(\vec{p})$, $\mathcal{N}(x)$, $p_\mu\mathcal{N}(\vec{p})$ и $x_m\mathcal{N}(x)$.

$$[N, \sqrt{2\omega}\,\varphi^{(\mp)}(x)] = \mp\sqrt{2\omega}\,\varphi^{(\mp)}(x), \quad [N,\varphi(x)] = \varphi^{(+)}(x) - \varphi^{(-)}(x) = \frac{\partial_4}{\omega}\varphi(x) \qquad (10)$$

$$[X_m(t), \sqrt{2\omega}\,\varphi^{(\mp)}(x)] = \mp x_m\sqrt{2\omega}\,\varphi^{(\mp)}(x) \qquad (11)$$

и трехмерную алгебру

$$\begin{aligned} &[X_m(t), X_n(t)] = 0, \quad [X_m(t), P_n] = \delta_{mn} I, \quad [P_m, P_n] = 0 \\ &[X_m(t), I] = [P_m, I] = [M_{mn}, I] = 0 \\ &[M_{mn}, X_\ell(t)] = i\left(\delta_{m\ell}X_n(t) - \delta_{n\ell}X_m(t)\right) \\ &[M_{mn}, P_\ell] = i\left(\delta_{m\ell}P_n - \delta_{n\ell}P_m\right), \end{aligned} \qquad (12)$$

где

$$I \equiv iN. \qquad (13)$$

Четырехмерная алгебра не будет столь простой, в нее войдут новые операторы, в частности, оператор скорости $\dot{X}_m$, как например, они появляются во втором из соотношений (эквивалентном $[x_\mu, -i\partial_\nu] = i\delta_{\mu\nu}$)

$$[X_\mu(t), X_\nu(t)] = 0, \qquad [X_\mu(t), P_\nu] = \delta_{\mu\nu} I - i\partial_\nu X_\mu(t). \qquad (14)$$

В то время как операторы N, $\mathcal{N}(\vec{p})$ и P_m коммутируют с гамильтонианом

$$[P_0, N] = 0, \quad [P_0, \mathcal{N}(\vec{p})] = 0, \quad [P_0, P_m] = 0 \qquad (15)$$

и сохраняются, операторы $\mathcal{N}(x)$ и $X_m(t)$ не коммутируют с гамильтонианом

$$\dot{\mathcal{N}}(x) = i\partial_4\mathcal{N}(x) = [P_4, \mathcal{N}(x)] \qquad (16)$$

$$\dot{X}_m = i\partial_4 X_m = [P_4, X_m(t)] = i\int d^3x\left(\partial_m\varphi^{(+)}\varphi^{(-)} - \varphi^{(+)}\partial_m\varphi^{(-)}\right) \qquad (17)$$

и не сохраняются, что естественно для координаты, а потому и для $\mathcal{N}(x)$.

Отметим, что оператор скорости $\dot{X}_m$ уже не зависит от времени

$$\ddot{X}_m = 0, \qquad (18)$$

а поэтому закон эволюции $X_m(t)$ линеен по времени (теорема Эренфеста)

$$X_m(t) = X_m(0) + \dot{X}_m t, \qquad (19)$$

причем оператор скорости коммутирует с оператором 4-импульса

$$[\dot{X}_m, P_\nu] = 0. \tag{20}$$

В применении к одно- и двухквантовым состояниям оператор $\dot{X}_m$ дает

$$\dot{X}_m a^+(\vec{p})|0\rangle = \frac{p_m}{\omega} a^+(\vec{p})|0\rangle, \quad \dot{X}_m a^+(\vec{p}_1) a^+(\vec{p}_2)|0\rangle = \left(\frac{p_{1m}}{\omega_1} + \frac{p_{2m}}{\omega_2}\right) a^+(\vec{p}_1) a^+(\vec{p}_2)|0\rangle \tag{21}$$

Здесь первая формула естественная, а вторая нет, так как должны складываться импульсы, а не скорости.

С помощью законов эволюции положительно- и отрицательно-частотной частей оператора поля (см./25/, Приложение Б)

$$\varphi^{(\mp)}(x) = 2i \int d^3x' \, \partial_4' \Delta^{(\mp)}(x-x') \varphi^{(\mp)}(x') \tag{22}$$

можно вычислить разновременные ($t' \neq t$) коммутаторы

$$[X_m(t'), \sqrt{2\omega}\varphi^{(\mp)}(x)] = \mp 2i \int d^3x' \, \partial_4' \Delta^{(\mp)}(x-x') x_m' \sqrt{2\omega} \varphi^{(\mp)}(x') = \tag{23.а}$$

$$= \left(\mp x_m + (t-t') \frac{-i\partial_m}{\omega}\right) \sqrt{2\omega} \varphi^{(\mp)}(x) = \tag{23.б}$$

$$= \mp \int d^3x'' K_m^{(\mp)}(x,t',x'') \sqrt{2\omega} \varphi^{(\mp)}(x'') \quad \left(x_0'' = t, \; K_m^{(\mp)}(x,t',x'') = (2i)^2 \int d^3x' \, \partial_4' \Delta^{(\mp)}(x-x') x_m' \partial_4'' \Delta^{(\mp)}(x'-x'')\right). \tag{23.в}$$

Выражения (23.б) получены с помощью формул (П.29) Приложения и означают, что на $\sqrt{2\omega}\varphi^{(\mp)}(x)$ действует "квантово-механический" оператор $x_m(t')$ в $x_m(t)$-представлении (гайзенберговская картина). Очевидно, $x_m(t)$ и $x_m(t')$ суть представители полево-теоретических операторов $X_m(t)$ и $X_m(t')$. Операторы $x_m(t)$ и $x_m(t')$ для положительных частот связаны между собой законом "инерции" (П.3) (аналогично для отрицательных). В выражениях (23.в) $X_m(t')$ представлен в форме действующих на $\sqrt{2\omega}\varphi^{(\mp)}(x)$ интегральных операторов с ядрами $K^{(\mp)}$.

Собственные векторы оператора $X_m(t)$ суть состояния (6.б). Если к одноквантовому собственному вектору $X_m(t)$ применить $X_m(t')$, получим

$$X_m(t')\sqrt{2\omega}\varphi^{(+)}(x)|0\rangle = 2i \int d^3x' \, \partial_4' \Delta^{(+)}(x-x') x_m' \sqrt{2\omega}\varphi^{(+)}(x')|0\rangle = \tag{24.а}$$

$$= \left(x_m + (t-t')\frac{-i\partial_m}{\omega}\right)\sqrt{2\omega}\varphi^{(+)}(x)|0\rangle = \tag{24.б}$$

$$= \int d^3x'' K_m^{(+)}(x,t',x'')\sqrt{2\omega}\varphi^{(+)}(x'')|0\rangle. \tag{24.в}$$

Из (24а) видно, что состояние $\sqrt{2\omega}\varphi^{(+)}(x)|0\rangle$ с координатой $\vec{x}$ (если допустимо такое толкование) есть суперпозиция состояний $\sqrt{2\omega}\varphi^{(+)}(x')|0\rangle$ со всеми без исключения значениями $\vec{x}'$ – мгновенное расплывание (для $X_m(\vec{x}', t')$ вывод был бы тем же). Это противоречит причинности, согласно которой должны были бы вносить вклад только $\vec{x}'$, удовлетворяющие условию

$$(\vec{x}-\vec{x}')^2 \leqslant (t-t')^2. \tag{25}$$

Причина, разумеется, в том, что мы рассматриваем положительно-частотное состояние, которое не есть "сигнал" и с самого начала размыто по всему пространству (см./25/, Приложение Б). Но тогда оно не должно было бы быть собственным вектором какого-либо оператора координаты. Указанная трудность с причинностью имеет место и при применении $X_m(t')$ (8) к операторам $\sqrt{2\omega}\varphi^{(\mp)}(x)$ (формула (23)) и к оператору поля $\varphi(x)$ целиком:

$$[X_m(t'), \varphi(x)] = 2i \int d^3x' \, \partial_4' \Delta^{(+)}(x-x') \left(x_m' + \frac{\partial_m'}{2\omega^2}\right) \varphi^{(+)}(x') - 2i \int d^3x' \, \partial_4' \Delta^{(-)}(x-x') \left(x_m' + \frac{\partial_m'}{2\omega^2}\right) \varphi^{(-)}(x')$$

$$= -\int d^3x' x_m' \Delta^{(1)}(x-x') \overleftrightarrow{\partial_4'} \varphi(x') + \frac{\partial_m}{2\omega^2} \int d^3x' \, \partial_4' \left(\Delta^{(1)}(x-x') \varphi(x')\right). \tag{26}$$

То же относится и к коммутаторам N (см. формулы (10)) и к разновременным коммутаторам плотностей этих операторов с полем. В то же время для операторов поля $\varphi(x)$ причинность, свойственная волновой теории, несомненно, имеет место (см./25,26/ и п. 3 ниже). Поэтому оператор координаты (8) представляется неприемлемым, хотя, по-видимому, он правильно воспроизводит матричные элементы истинного оператора между одноквантовыми состояниями, в частности, среднее координаты в таком состоянии.

Для того чтобы коммутатор (разновременный) некоторого оператора с оператором поля $\varphi(x)$ отвечал требованию причинности, необходимо[x] и достаточно, чтобы этот оператор обладал локальной плотностью в x-пространстве, т.е. плотностью, содержащей лишь само поле и его производные конечного порядка. Так, оператор P_μ имеет локальные плотности $T_{4\mu}(x)$. Однако ни $X_m(t)$ (8), ни N локальными плотностями не обладают (см. формулы (9) и Приложение Б к работе/26/). Недостатки $X_m(t)$, по-видимому, обусловлены его коммутацией с N.

Для заряженных скалярного $\varphi(x)$ и спинорного $\psi(x)$ полей (спины 0 и $\frac{1}{2}$) аналогичные операторы числа квантов и координаты отличались бы от (3) и (8) только видом $\mathcal{N}(x)$:

$$\mathcal{N}_0(x) = \sqrt{2\omega}\,\varphi_c^{(+)}(x)\sqrt{2\omega}\,\varphi^{(-)}(x) + \sqrt{2\omega}\,\varphi^{(+)}(x)\sqrt{2\omega}\,\varphi_c^{(-)}(x) \tag{27}$$

---

x) Мы полагаем, что сами плотности имеют физический смысл.

$$\mathcal{N}_{\frac{1}{2}}(x) = \bar{\psi}_c^{(+)}(x)\gamma_4\psi^{(-)}(x) + \bar{\psi}^{(+)}(x)\gamma_4\psi_c^{(-)}(x), \tag{28}$$

где $\varphi_c = \varphi^*$ и $\psi_c = C\bar{\psi}$ – зарядово-сопряженные поля. Можно также разбить эти величины по знаку заряда на $\mathcal{N}_{0-}$, $\mathcal{N}_{0+}$ и $\mathcal{N}_{\frac{1}{2}-}$, $\mathcal{N}_{\frac{1}{2}+}$ и образовать соответствующие операторы (3) и (8) (ср./26/, Приложение Б). Все эти координаты в применении к одноквантовым состояниям сводятся к координате Ньютона-Вигнера и обладают отмеченными выше недостатками.

3. ОПЕРАТОР КООРДИНАТЫ, НЕ КОММУТИРУЮЩИЙ С ОПЕРАТОРОМ ЧИСЛА КВАНТОВ

Оператор координаты – несохраняющийся оператор. Попытаемся ввести его как генератор операции умножения оператора поля, скажем, $\varphi(x)$ на x_μ. С этой целью мы применим вариационный принцип так, как он применялся в/22/для получения других несохраняющихся операторов. Начнем с заряженных полей.

<u>Заряженное скалярное поле</u>. Итак, будем исходить из вариаций[x)]

$$\delta^* \varphi(x) = i\varepsilon_\mu x_\mu \varphi(x). \tag{29}$$

Поскольку лагранжиан

$$L = \int_{\sigma'}^{\sigma} d^4x \, \mathcal{L}(x), \qquad \mathcal{L}(x) = -\partial_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi \tag{30}$$

и уравнения движения для поля $\varphi(x)$ не инвариантны относительно таких преобразований, то искомый оператор, действительно, не будет сохраняться. Применяя вариационный принцип, получаем

$$\begin{aligned}\delta^* L &= \int_{\sigma'}^{\sigma} d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi(x)}\delta^*\varphi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\lambda\varphi(x)}\delta^*\partial_\lambda\varphi(x) + \text{э.с.}\right) = \\ &= \int_{\sigma'}^{\sigma} d^4x \left(\partial_\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\lambda\varphi(x)}\delta^*\varphi(x) + \text{э.с.}\right) + \left(\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi(x)} - \partial_\lambda\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\lambda\varphi(x)}\right)\delta^*\varphi(x) + \text{э.с.}\right)\right) = \\ &= \int_{\sigma} d\sigma_\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\lambda\varphi(x)}\delta^*\varphi(x) + \text{э.с.}\right) - \int_{\sigma'} d\sigma_\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\lambda\varphi(x)}\delta^*\varphi(x) + \text{э.с.}\right) \equiv G(\sigma) - G(\sigma'),\end{aligned} \tag{31}$$

---

x) Подобно тому, как, например, для получения оператора 4-импульса P_μ применяются вариации сдвига в x-пространстве $\delta^*\varphi(x) = \varepsilon_\mu\partial_\mu\varphi(x)$. Аналогично вариации (29) с $\varepsilon_4 = 0$ суть операции сдвига в $\vec{p}$-пространстве $\delta^*\varphi(\vec{p},t) = \varepsilon_m \frac{\partial}{\partial p_m}\varphi(\vec{p},t)$. О вариациях δ^* см./27/.

где третья строка – результат учета уравнений Эйлера и применения теоремы Гаусса. Разлагая $G(\sigma) = i\varepsilon_\mu X_\mu(\sigma)$, получаем[x)] в качестве оператора координаты

$$X_\mu(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_\lambda \, \mathcal{X}_{\lambda\mu}(x), \qquad \mathcal{X}_{\lambda\mu}(x) = x_\mu j_\lambda(x), \tag{32.а}$$

$$X_\mu(n,\alpha) = -\int d^4x \, \delta(n_\nu x_\nu + \alpha)\, x_\mu n_\lambda j_\lambda(x) \qquad (n_\mu^2 = -1) \tag{32.б}$$

$$X_\mu(t) = -i\int d^3x \, x_\mu j_4(x), \tag{32.в}$$

причем

$$X_4(t) = tI \tag{33}$$

$$I = \int d^3x \, j_4(x) = -ie^{-1}Q. \tag{34}$$

Здесь $e j_\lambda(x) = ie(\partial_\lambda\varphi^*(x)\varphi(x) - \varphi^*(x)\partial_\lambda\varphi(x))$ – плотность тока, а Q – оператор заряда. Подобно другим несохраняющимся операторам/22,23/, оператор $X_\mu(\sigma)$ преобразуется как 4-векторный функционал пространственно-подобной поверхности[xx)] σ и неоднозначно определяется своей плотностью (относительность) в отличие от сохраняющихся операторов, например, 4-импульса P_μ. В выражении (32.б) в качестве σ выбрана произвольная плоская пространственно-подобная поверхность, которая задается нормалью n_μ и параметром α, так что функционал свелся к 4-векторной функции от 4-вектора n_μ ($n_\mu^2 = -1$) и скаляра α (см./28/). В (32.в) поверхность σ взята в виде $t = const$, что обычно будет подразумеваться ниже.

Зависимость операторов $X_\mu(t)$ от времени демонстрируется следующими уравнениями движения

$$\partial_\lambda \mathcal{X}_{\lambda\mu}(x) = j_\mu(x), \tag{35}$$

---

x) Вывод пригоден и для случая взаимодействия.

xx) Сопоставим законы лоренцовских преобразований сохраняющегося (константного) 4-вектора P_μ, 4-векторной функции $A_\mu(x)$ и 4-векторного функционала $X_\mu(\sigma)$:

$$P'_\mu = L_{\mu\nu}P_\nu, \qquad A'_\mu(x') = L_{\mu\nu}A_\nu(x), \qquad X'_\mu(\sigma') = L_{\mu\nu}X_\nu(\sigma)$$

(последнему подчиняются и $P_\mu^A(\sigma)$, $P_\mu^\psi(\sigma)$, $K_\mu^A(\sigma)$ и $K_\mu^\psi(\sigma)$ в [22,23]).

$$\dot{X}_\mu(t) = \int d^3x\, \partial_4 \left(x_\mu j_4(x)\right) = \int d^3x\, j_\mu(x) \tag{36}$$

$$\ddot{X}_\mu(t) = \delta_{\mu m} \int d^3x\, \partial_4 j_m(x). \tag{37}$$

Очевидно, она для $X_m(t)$ не является линейной ("дрожание" типа шредингеровского). Операторы I и X_μ удовлетворяют трехмерной алгебре (I2) и соотношениям (I4), обладают локальными плотностями и следующими одновременными коммутациями с полем и его первой производной по времени

$$[I, \varphi(x)] = -i\varphi(x), \qquad [I, \partial_4\varphi(x)] = -i\partial_4\varphi(x), \tag{38}$$

$$[X_\mu(t), \varphi(x)] = -x_\mu\varphi(x), \qquad [X_\mu(t), \partial_4\varphi(x)] = -x_\mu\partial_4\varphi(x). \tag{39}$$

Коммутаторы для оператора скорости суть (ср. Приложение)

$$[\partial_4 X_m(t), \varphi(x)] = 0, \quad [\partial_4 X_m(t), \partial_4\varphi(x)] = -2\partial_m\varphi(x), \quad [\partial_4 X_\mu(t), P_n] = 0. \tag{40}$$

Операторы $X_\mu(t)$ генерируют исходные вариации[x)]

$$\delta^*\varphi(x) = -i\,[X_\mu(t), \varphi(x)] = i\varepsilon_\mu x_\mu \varphi(x) \tag{4I.a}$$

$$\delta^*\partial_4\varphi(x) = \partial_4\delta^*\varphi(x) = -i\varepsilon_\mu\left([X_\mu(t), \partial_4\varphi(x)] + [\partial_4 X_\mu(t), \varphi(x)]\right) = \partial_4\left(\varepsilon_\mu x_\mu \varphi(x)\right) \tag{4I.б}$$

Обратимся к разновременным коммутаторам $[X_m(t'), \varphi(x)]$. С помощью закона эволюции для оператора поля

$$\varphi(x) = i\int d^3x' \left(\partial_4' \Delta(x-x')\varphi(x') - \Delta(x-x')\partial_4\varphi(x')\right) \equiv i\int d^3x' \Delta(x-x') \overleftrightarrow{\partial_4'} \varphi(x') \tag{42}$$

находим

$$[X_m(t'), \varphi(x)] = -i\int d^3x'\, x_m' \,\Delta(x-x')\overleftrightarrow{\partial_4'}\varphi(x') = \tag{43.a}$$

$$= -x_m'^{(x)}\,\varphi(x) = \tag{43.б}$$

$$= -\int d^3x''\, K_m(x, t', x'')\overleftrightarrow{\partial_4''}\varphi(x'') \qquad \left(x_0'' = t,\ K_m = -\int d^3x'\, x_m' \,\Delta(x-x')\overleftrightarrow{\partial_4'}\Delta(x'-x'')\right), \tag{43.в}$$

где $x_m'^{(x)}$ – квантово-механический оператор $x_m(t')$ в $x_m(t)$– представлении ($x_m(t)$ и $x_m(t')$ – представители $X_m(t)$ и $X_m(t')$) и соответствует "дрожащей" координате Шредингера для случая скалярного поля (см. Приложение).

---

x) В работе /22/ (стр.46) отмечено, что для получения правильных вариаций $\partial_4 A_\mu(x)$ недостаточно простых коммутаций (формулы (54) и (55)). Однако их можно получить, если учесть, как здесь в (4I.б), коммутаторы с $\partial_4 P_\nu^A(x_0)$ и $\partial_4 P_\nu^\varphi(x_0)$.

Формула (43.а) демонстрирует, что при применении оператора $X_m(t')$ к оператору поля $\varphi(x)$ условие причинности (25) выполняется. Это свойство нам представляется важным в связи с упомянутым во Введении принципом, что причинность должна соблюдаться на операторном уровне. Существенную роль в выполнении этого принципа играют локальность плотностей $X_m(t)$ и присутствие в $X_m(t)$ членов, которые рождают и уничтожают пары

$$X_m(t) = \int d^3x\, x_m \left(\varphi_c^{(-)}\overleftrightarrow{\partial_4}\varphi^{(-)} + \varphi_c^{(+)}\overleftrightarrow{\partial_4}\varphi^{(+)} + \varphi_c^{(+)}\overleftrightarrow{\partial_4}\varphi^{(-)} - \varphi^{(+)}\overleftrightarrow{\partial_4}\varphi_c^{(-)}\right). \tag{44}$$

"Дрожащая" часть оператора $x_m'^{(x)}$ есть представитель этих недиагональных членов. Однако нельзя ожидать строгую причинность при применении $X_m(t)$ к фоковским векторам из-за их положительночастотности.

Так как оператор $X_m(t)$ не коммутирует с оператором числа квантов

$$[X_m(t), N] = 2\int d^3x\, x_m \left(\varphi_c^{(-)}\overleftrightarrow{\partial_4}\varphi^{(-)} - \varphi_c^{(+)}\overleftrightarrow{\partial_4}\varphi^{(+)}\right) \tag{45}$$

$$N = \int d^3x \left(\varphi_c^{(+)}\overleftrightarrow{\partial_4}\varphi^{(-)} + \varphi^{(+)}\overleftrightarrow{\partial_4}\varphi_c^{(-)}\right), \tag{46}$$

то у них нет общих собственных векторов. Собственными векторами $X_m(t)$ будут какие-то состояния с неопределенным числом квантов типа когерентных состояний. К их нахождению мы надеемся вернуться в дальнейшем.

Между собственными векторами N у $X_m(t)$ отличны от нуля лишь матричные элементы

$$\langle n\beta | X_m | n\alpha\rangle = \langle n\beta | \int d^3x\, x_m \left(\varphi_c^{(+)}\overleftrightarrow{\partial_4}\varphi^{(-)} - \varphi^{(+)}\overleftrightarrow{\partial_4}\varphi_c^{(-)}\right) | n\beta\rangle$$

$$\langle n+2\beta | X_m | n\alpha\rangle = \langle n+2\beta | \int d^3x\, x_m\, \varphi_c^{(+)}\overleftrightarrow{\partial_4}\varphi^{(+)} | n\alpha\rangle \tag{47}$$

$$\langle n\beta | X_m | n+2\alpha\rangle = \langle n\beta | \int d^3x\, x_m\, \varphi_c^{(-)}\overleftrightarrow{\partial_4}\varphi^{(-)} | n+2\alpha\rangle,$$

где n – собственное значение N, а α и β – другие квантовые числа. Диагональные по N матричные элементы $X_m(t)$ зависят от времени линейно (теорема Эренфеста), а элементы с рождением или уничтожением пары ответственны за нелинейность (дрожание).

<u>Заряженное спинорное поле</u>. Аналогично вариации вида $\delta^*\psi = i\varepsilon_\mu x_\mu \psi$ ведут к выражениям (32)-(34), но теперь $cj_\lambda = i\bar\psi(x)\gamma_\lambda\psi(x)$. Для коммутаторов находим

$$[I, \psi(x)] = -i\psi(x) \tag{48}$$

$$[X_\mu(t), \psi(x)] = -x_\mu \psi(x) \tag{49}$$

$$[X_m(t'), \psi(x)] = i\int d^3x'\, x'_m S(x-x')\gamma_4\psi(x') = \tag{50.а}$$

$$= -x'^{(x)}_m \psi(x) = \tag{50.б}$$

$$= -\int d^3x'' \mathcal{K}_m(x, t', x'')\gamma_4\psi(x'') \quad \left(x''_0 = t, \mathcal{K}_m = -\int d^3x' S(x-x')\gamma_4 x'_m S(x'-x'')\right), \tag{50.в}$$

где $x'^{(x)}_m$ – дрожащая координата Шредингера (см. Приложение). Этот оператор координаты $X_\mu(t)$ тоже удовлетворяет алгебре (I2) и соотношениям (I4). Подробному обсуждению оператора координаты для спина $\frac{1}{2}$ и алгебре для него посвящены работы /I6/ . Однако там не затрагивался ни способ его получения из вариационного принципа, ни коммутаторы (48)-(50), ни проблема причинности, для обеспечения которой существенны члены, рождающие и уничтожающие электронно-позитронные пары. Автор работ /I6/ считает их нефизическими и склонен отбросить.

<u>Нейтральное скалярное поле</u>. В этом случае вариации берем в виде

$$\delta^*\varphi(x) = \varepsilon_\mu x_\mu \varphi(x) \tag{5I}$$

и вариационный принцип даст нам

$$X_\mu(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_\lambda \mathcal{X}_{\lambda\mu}(x) = -i\int d^3x\, x_\mu \vartheta_4(x) \quad \left(\mathcal{X}_{\lambda\mu} = x_\mu\vartheta_\lambda^{x)}, \vartheta_\lambda = \varphi(x)\partial_\lambda\varphi(x)\right) \tag{52}$$

$$X_4(t) = t\,I(t), \quad I(t) = \int d^3x\, \varphi(x)\partial_4\varphi(x). \tag{53}$$

Снова выполняется алгебра (I2) и соотношения (I4), но теперь не только $X_m(t)$, но и $I(t)$ зависит от времени

---

x) В выборе плотностей имеется произвол /22/, в рамках которого в качестве $\mathcal{X}_{\lambda\mu}(x)$ можно взять $\mathcal{X}_{\lambda\mu} = x_\mu\vartheta_\lambda + \alpha x_\lambda\vartheta_\mu$, где α – произвольное число. Добавок не вносит вклад в X_m, но изменяет X_4. Выбор $\alpha = -1$ приводит к $X_4 = 0$ на поверхности $t = const$, т.е. к координате, удовлетворяющей условию $n_\mu X_\mu = 0$ (тогда оператор I появится лишь в соотношении $[X_m(t), P_n] = \delta_{mn} I(t)$).

$$\partial_\lambda \mathcal{X}_{\lambda\mu} = \varphi\partial_\mu\varphi - 2x_\mu\mathcal{L}, \quad \partial_\lambda\vartheta_\lambda = -2\mathcal{L} \quad \left(\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\nu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi\varphi\right) \tag{54}$$

$$\dot X_m(t) = \int d^3x\, x_m \partial_4(\varphi\partial_4\varphi) = -2\int d^3x\, x_m \mathcal{L}(x) \tag{55.а}$$

$$\ddot X_m(t) = -2i\int d^3x\, x_m\partial_4\mathcal{L}(x) \tag{55.б}$$

$$\dot I(t) = i\int d^3x\, \partial_4(\varphi\partial_4\varphi) = -2i\int d^3x\,\mathcal{L}(x) \qquad I(t) - I(t') = -2i\int_{t'}^{t} d^4x\, \mathcal{L}(x). \tag{56}$$

Одновременные коммутаторы с полем теперь записываются

$$[X_\mu(t), \varphi(x)] = ix_\mu\varphi(x), \qquad [X_\mu(t), \partial_4\varphi(x)] = -ix_\mu\partial_4\varphi(x), \tag{57}$$

$$[I(t), \varphi(x)] = -\varphi(x), \qquad [I(t), \partial_4\varphi(x)] = \partial_4\varphi(x), \tag{58}$$

$$[\dot X_m(t), \varphi(x)] = -2x_m\partial_4\varphi(x),\ [\dot X_m(t), \partial_4\varphi(x)] = -2(\partial_m - x_m\partial_4^2)\varphi(x),\ [\dot X_m(t), P_n] = -2i\delta_{mn}\int d^3x\,\mathcal{L}(x). \tag{59}$$

Первый из них сходен с коммутатором поля и координаты у М.А.Маркова /2I/

$$[X_\mu, \varphi(x)] = i\tau_\mu\varphi(x). \tag{60}$$

Отличие в том, что у М.А.Маркова $X_\mu = x_\mu \neq \tau_\mu$, а здесь $\tau_\mu = x_\mu \neq X_\mu$.

Операторы $X_\mu(t)$ генерируют, как и в (4I), исходные вариации x).
Вариации с $\varepsilon_4 = 0$ можно еще единообразно записать как

$$\delta^*\varphi(x) = i\varepsilon_m[I(t)[X_m(t), \varphi(x)]] = i\varepsilon_m[X_m(t)[I(t), \varphi(x)]] = \varepsilon_m x_m \varphi(x) \tag{6I}$$

$$\delta^*\partial_4\varphi(x) = i\varepsilon_m[I(t)[X_m(t), \partial_4\varphi(x)]] = i\varepsilon_m[X_m(t)[I(t), \partial_4\varphi(x)]] = \varepsilon_m x_m\partial_4\varphi(x). \tag{62}$$

С помощью закона эволюции (42) или его расчлененных форм

$$\frac{1}{2}\left(\varphi(x) - [I(t'), \varphi(x)]\right) = i\int d^3x'\, \partial'_4\Delta(x-x')\varphi(x'), \quad \frac{1}{2}\left(\varphi(x) + [I(t'), \varphi(x)]\right) = -i\int d^3x'\,\Delta(x-x')\partial'_4\varphi(x') \tag{63}$$

получаем разновременные коммутаторы в различных формах

$$[I(t'), \varphi(x)] = -i\int d^3x'\, \partial'_4\left(\Delta(x-x')\varphi(x')\right) \qquad [I(t')[I(t'), \varphi(x)]] = \varphi(x) \tag{64}$$

$$[X_m(t'), \varphi(x)] = -\int d^3x'\, x'_m\partial'_4\left(\Delta(x-x')\varphi(x')\right) = \tag{65.а}$$

$$= i\tilde x'^{(x)}_m \varphi(x) = \tag{65.б}$$

$$= i\int d^3x'' \tilde K_m(x, t', x'')\overleftrightarrow{\partial''_4}\varphi(x'') \quad \left(x''_0 = t, \tilde K_m = -\int d^3x'\, x'_m\partial'_4\left(\Delta(x-x')\Delta(x'-x'')\right)\right) \tag{65.в}$$

$$[X_m(t'), [I(t'), \varphi(x)]] = \int d^3x'\, x'_m\Delta(x-x')\overleftrightarrow{\partial'_4}\varphi(x') = \tag{66.а}$$

$$= -ix'^{(x)}_m\varphi(x) = \tag{66.б}$$

$$= -i\int d^3x'' K_m(x, t', x'')\overleftrightarrow{\partial''_4}\varphi(x'') \quad \left(x''_0 = t, K_m = -\int d^3x'\, x'_m\Delta(x-x')\overleftrightarrow{\partial'_4}\Delta(x'-x'')\right) \tag{66.в}$$

---

x) Можно также говорить и о вариациях, генерируемых оператором $I(t)$,
$\delta^*\varphi(x) = \varepsilon[I(t), \varphi(x)] = -\varepsilon\varphi(x)$,
$\delta^*\partial_4\varphi(x) = \partial_4\delta^*\varphi(x) = \varepsilon\left([I(t), \partial_4\varphi(x)] + [\partial_4 I(t), \varphi(x)]\right) = -\varepsilon\partial_4\varphi(x)$.

$$[X_m(t'), \tfrac{1}{2}(\varphi(x) - [I(t'),\varphi(x)])] = -\int d^3x'\, x'_m \partial'_4 \Delta(x-x')\varphi(x') = \tag{67.а}$$

$$= -\left(x_m + (t-t')\frac{-i\partial_m\partial_4}{\omega^2}\right)\int d^3x'\, \partial'_4 \Delta(x-x')\varphi(x') \tag{67.б}$$

$$[X_m(t'), \tfrac{1}{2}(\varphi(x) + [I(t'),\varphi(x)])] = -\int d^3x'\, x'_m \Delta(x-x')\partial'_4 \varphi(x') = \tag{68.а}$$

$$= \left(x_m + (t-t')\frac{-i\partial_m\partial_4}{\omega^2} + \frac{\partial_m}{\omega^2}\right)\int d^3x'\, \Delta(x-x')\partial'_4 \varphi(x'). \tag{68.б}$$

В выражениях (67.б) и (68.б) дрожание присутствует только в послед нем - оно представлено членом ∂_m/ω^2. Формула (65.а) свидетельствует, что и этот оператор $X_m(t)$ действует на $\varphi(x)$ причинным образом. Вместе с тем этот оператор координаты для нейтрального скалярного поля обладает некоторыми странными свойствами. Во-первых, как видно из

$$X_m(t) = -\frac{i}{2}\int d^3x\, x_m \partial_4\left(\varphi^{(+)}\varphi^{(+)} + 2\varphi^{(+)}\varphi^{(-)} + \varphi^{(-)}\varphi^{(-)}\right) =$$

$$= -\frac{i}{2}\int d^3x \left\{x_m \partial_4\left(\varphi^{(+)}\varphi^{(+)} + \varphi^{(-)}\varphi^{(-)}\right) + 2\frac{\partial_m}{\omega}\varphi^{(+)}\varphi^{(-)}\right\}, \tag{69}$$

у него плохая диагональная по числу квантов часть $X^{\text{диаг}}$: она не зависит от времени и коммутирует с P_n, т.е. $[P_\mu, X_n^{\text{диаг}}]=0$. Было бы естественно, чтобы диагональной частью по крайней мере в применении к одноквантовым состояниям служил оператор (8). Во-вторых, хотя оператор $X_m(t)$ формально эрмитов, но, как следует из первого из коммутаторов (58), его собственные значения могут быть только комплексными или мнимыми[x)].

Подобные операторы можно получить и для заряженных полей, если исходить из вариаций типа (5I), т.е. без i. Так, для заряженного скалярного поля нашли бы

$$X_m(t) = -i\int d^3x\, x_m \partial_4(\varphi^*\varphi). \tag{70}$$

В заключение автор сердечно благодарит М.А.Маркова за обсуждения.

---

x) Последним замечанием автор обязан В.Гарчинскому.

ПРИЛОЖЕНИЕ

I. Для пояснения формул (23.б),(43.б) и т.п. начнем с примеров эволюции операторов в квантовой механике в гайзенберговской картине.

I) Нерелятивистская бесспиновая частица (лагранжиан $L(t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2(t)$, гамильтониан $H = \frac{\vec{p}^2}{2m}$):

$$\vec{x}(t) = e^{iHt}\vec{x}(0)e^{-iHt} = \vec{x}(0) + t\frac{\vec{p}}{m}; \quad \dot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{x}}(0) = \frac{\vec{p}}{m}; \quad \ddot{\vec{x}}(t) = \ddot{x}_n(0) = 0$$

$$\langle x | x'\rangle = \left[\frac{m}{2\pi i(t-t')}\right]^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{m}{2}\frac{(\vec{x}-\vec{x}')^2}{t-t'}} \qquad (x \equiv (\vec{x},t)). \tag{П.I}$$

2) Одномерный осциллятор $\left(L(t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2(t) - \omega^2 x^2(t)),\ H = \frac{p^2(t)}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2(t)}{2}\right)$

$$x(t) = e^{iHt}x(0)e^{-iHt} = \cos\omega t\, x(0) + \frac{\sin\omega t}{\omega}\frac{p(0)}{m}, \quad \dot{x}(t) = \cos\omega t\, \dot{x}(0) - \omega\sin\omega t\, x(0)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t); \quad \langle xt | x't'\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\sin\omega t}}\exp\left[\frac{im\omega}{2\sin\omega t}\left((x^2+x'^2)\cos\omega t - 2xx'\right)\right] \tag{П.2}$$

3) Релятивистская бесспиновая частица с положительной энергией $\left(L(t) = m\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2(t)},\ H = \sqrt{\vec{p}^2+m^2} \equiv \omega\right)$:

$$\vec{x}(t) = e^{i\omega(t-t')}\vec{x}(t')e^{-i\omega(t-t')} = \vec{x}(t') + (t-t')\frac{\vec{p}}{\omega}; \quad \dot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{x}}(t') = \frac{\vec{p}}{m}, \quad \ddot{\vec{x}}(t) = \ddot{\vec{x}}(t') = 0,$$

$$\langle x | x'\rangle = 2i\partial'_4\Delta^{(-)}(x-x'). \qquad (x \equiv (\vec{x},t)). \tag{П.3}$$

4) Спин 0, 2-компонентный формализм для уравнения ШФКГ [*)]:

$\Psi(x) = \begin{bmatrix}\varphi(x)\\ \partial_4\varphi(x)\end{bmatrix}$, где $\varphi(x)$ — свободное скалярное поле, $H = -\begin{pmatrix}0 & 1\\ \omega^2 & 0\end{pmatrix}$, $\omega = \sqrt{\vec{p}^2+m^2}$,

$$\dot{\vec{x}}(0) = -2\vec{p}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{x}}^2(t) = 0, \quad \ddot{\vec{x}}(0) = 2i\vec{p}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$\langle x\alpha | x'\alpha'\rangle = -i(\partial_4 - H)_{\alpha\alpha'}\Delta(x-x') = -i\begin{pmatrix}\partial_4 & 1\\ \omega^2 & \partial_4\end{pmatrix}_{\alpha\alpha'}\Delta(x-x') \quad (\omega = \sqrt{-\Delta+m^2}). \tag{П.4}$$

5) Спин $\frac{I}{2}$, $m=0$, двухкомпонентный формализм (уравнение Вейля), $H = \vec{\sigma}\vec{p}$, σ_n - матрицы Паули, $\dot{\vec{x}}(0) = \vec{\sigma}$, $\dot{\vec{x}}^2(t) = 3$, $\ddot{\vec{x}}(0) = 2i(\vec{p} - \vec{\sigma}(\vec{\sigma}\vec{p}))$

$$\langle x\alpha | x'\alpha'\rangle = -i(\partial_4 - H)_{\alpha\alpha'}\Delta(x-x') = -i(\partial_4 + i\sigma_n\partial_n)\Delta(x-x'). \tag{П.5}$$

---

*) Обратим внимание на то, что здесь H, $\dot{x}_n$ и $\ddot{x}_n$ - неэрмитовы матрицы. Данный формализм отличается от более обычного, когда гамильтониан берут в диагональной форме, а $\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix}\varphi^{(-)}(x)\\ \varphi^{(+)}(x)\end{pmatrix}$. Преобразование от одного к другому легко осуществить, например, $\tilde{H} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\omega^{-1}\\ 1 & \omega^{-1}\end{pmatrix} H \begin{pmatrix}1 & 1\\ -\omega & \omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & -\omega\end{pmatrix}$. Однако в обычном формализме причинность перестает быть явной

$$\widetilde{\langle x\alpha | x'\alpha'\rangle} = 2i\begin{pmatrix}\partial'_4\Delta^{(-)}(x-x') & 0\\ 0 & \partial'_4\Delta^{(+)}(x-x')\end{pmatrix}.$$

6) Спин $\frac{1}{2}, m \neq 0$, 4-компонентный формализм (уравнение Дирака)

$$H = \gamma_4 (i \vec{\gamma} \vec{p} + m) = -\sigma_{4\nu} p_\nu + m\gamma_4$$

$$\dot{x}_n(0) = i\gamma_4\gamma_n = \sigma_{n4}, \quad \vec{\dot{x}}^2(t) = 3, \quad \ddot{x}_n(0) = 2(\sigma_{nk} p_k - \gamma_n m) \qquad (\Pi.6)$$

$$\langle x\alpha | x'\alpha' \rangle = -i(\partial_4 - H)_{\alpha\alpha'} \Delta(x-x') = -i\left(S(x-x')\gamma_4\right)_{\alpha\alpha'} \; / S(x) = (\gamma_\mu\partial_\mu - m)\Delta(x) /.$$

7) Спины 0 и I, уравнение Дэффина-Кеммера (ниже гамильтониан и остальные операторы, включая координату, берутся в форме, применимой только к независимым компонентам $\beta_4^2\psi(x)$ поля Дэффина-Кеммера $\psi(x)$)[x]:

$$H = \beta_4\left(\frac{1}{m}(\vec{\beta}\vec{p})^2 + m\right)$$

$$\dot{x}_n = i[H, x_n] = \frac{\partial}{\partial p_n} H = \frac{1}{m}\beta_4\left(\beta_n(\vec{\beta}\vec{p}) + (\vec{\beta}\vec{p})\beta_n\right), \quad \vec{\dot{x}}^2(t) = 0 \text{ при } s = 0$$

$$\langle x\alpha | x'\alpha' \rangle = -i\left(\beta_4^2 \partial_4 - H\right)_{\alpha\alpha'} \Delta(x-x') \qquad (\Pi.7)$$

(для всех компонент вместе, зависимых и независимых, имели бы

$$\left(1 - \frac{1}{m}\beta_n\partial_n\right)_{\alpha\alpha''} \langle x\alpha'' | x'\alpha' \rangle = \left(S(x-x')\beta_4\right)_{\alpha\alpha'} \text{ где } S(x) = \frac{-\beta_\mu\partial_\mu}{m}(-\beta_\nu\partial_\nu + m)\Delta(x) \Big). \qquad (\Pi.8)$$

Закон эволюции оператора $x_n(t)$ в случаях 4)-7) можно записать единым образом[xx)]

---

x) Применительно к спину 0 этот подход эквивалентен подходу 4).

xx) Вывод в основном опирается на соотношение $H^2 = \omega^2\beta_4^2$, где множитель β_4^2 отличен от единицы только в случае 7), но и тогда $\beta_4^2 H = H\beta_4^2 = H$. Из $H^2 = \omega^2\beta_4^2$ следует $\frac{\partial}{\partial p_n}\left(\frac{H}{\omega}\right)^2 = 0$ и $\left\{H, \frac{\partial}{\partial p_n}\frac{H}{\omega}\right\}$, а отсюда с учетом того, что $\dot{x}_n(0) = i[H, x_n(0)] = \frac{\partial}{\partial p_n} H$, находим

$$H\frac{\partial}{\partial p_n}\frac{H}{\omega} = \frac{1}{2}\left[H, \frac{\partial}{\partial p_n}\frac{H}{\omega}\right] = \frac{1}{2\omega}\left[H, \frac{\partial}{\partial p_n}H\right] = \frac{1}{2\omega}\left[H, \dot{x}_n(0)\right] = -\frac{i}{2\omega}\ddot{x}_n(0)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_n}\frac{H}{\omega} = \frac{\dot{x}_n(0)}{\omega} - \frac{p_n H}{\omega^3} = -i\frac{H\ddot{x}_n(0)}{2\omega^3} = i\frac{\ddot{x}_n(0)H}{2\omega^3},$$

а также полезные соотношения (ср. /4/ и /29/)

$$\{\dot{x}_n(0), H\} = \{\dot{x}_n(t), H\} = 2p_n\beta_4^2, \quad \{\ddot{x}_n(t), H\} = 0, \quad \ldots \{x_n^{(k)}(t), H\} = 0, \ldots$$

$$\ddot{x}_n(t) = 2iH\dot{x}_n(t) - 2ip_n\beta_4^2, \quad \dddot{x}_n(t) = 2iH\ddot{x}_n(t), \ldots \; x_n^{(k)}(t) = 2iHx^{(k-1)}(t), \ldots$$

На основании окончательного результата к ним можно добавить

$$\{x_n(t), H\} = \{x_n(0), H\} + 2\beta_4^2 p_n t$$

$$x_n(t)\beta_4^2 = e^{iHt}x_n(0)\beta_4^2 e^{-iHt} = x_n(0)\beta_4^2 + e^{iHt}\left[x_n(0), e^{-iHt}\right] =$$

$$= x_n(0)\beta_4^2 + e^{iHt}\, i\frac{\partial}{\partial p_n} e^{-iHt} = x_n(0)\beta_4^2 + e^{iHt}\, i\frac{\partial}{\partial p_n}\left(\cos(\omega t)\beta_4^2 - i\sin(\omega t)\frac{H}{\omega}\right) =$$

$$= x_n(0)\beta_4^2 + t\frac{p_n H}{\omega^2} + e^{iHt}\sin\omega t\frac{\partial}{\partial p_n}\frac{H}{\omega} =$$

$$= x_n(0)\beta_4^2 + t\frac{p_n H}{\omega^2} e^{iHt}\sin\omega t\left(\frac{1}{\omega}\dot{x}_n(0) - \frac{p_n}{\omega^3}H\right) =$$

$$= x_n(0)\beta_4^2 + t\frac{p_n H}{\omega^2} + \frac{1}{2i}\left(e^{2iHt} - 1\right)\frac{H}{\omega}\left(\frac{1}{\omega}\dot{x}_n(0) - \frac{p_n}{\omega^3}H\right) =$$

$$= x_n(0)\beta_4^2 + t\frac{p_n H}{\omega^2} + \frac{H\dot{x}_n(t)}{2i\omega^2} - \frac{H\dot{x}_n(0)}{2i\omega^2} = x_n(0)\beta_4^2 + t\frac{p_n H}{\omega^2} - \frac{\ddot{x}_n(t)}{4\omega^2} + \frac{\ddot{x}_n(0)}{4\omega^2} =$$

$$= x_n(0)\beta_4^2 + t\frac{p_n H}{\omega^2} - e^{iHt}\frac{\ddot{x}_n(0)}{4\omega^2}e^{-iHt} + \frac{\ddot{x}_n(0)}{4\omega^2} =$$

$$= x_n(0)\beta_4^2 + t\frac{p_n H}{\omega^2} - \left(e^{2iHt} - 1\right)\frac{\ddot{x}_n(0)}{4\omega^2} = x_n(0)\beta_4^2 + t\frac{p_n H}{\omega^2} - \frac{\ddot{x}_n(0)}{4\omega^2}\left(e^{-2iHt} - 1\right) =$$

$$= x_n(0)\beta_4^2 + t\frac{p_n H}{\omega^2} + \frac{\ddot{x}_n(0)}{4\omega^2}(1 - \cos 2\omega t) - \frac{\dddot{x}_n(0)}{8\omega^3}\sin 2\omega t =$$

$$= x_n(0)\beta_4^2 + \dot{x}_n(0)t + \frac{\ddot{x}_n(0)}{4\omega^2}(1 - \cos 2\omega t) + \frac{\dddot{x}_n(0)}{8\omega^3}(2\omega t - \sin 2\omega t) \qquad (\Pi.9)$$

$$\dot{x}_n(t) = e^{iHt}\dot{x}_n(0)e^{-iHt} = \dot{x}_n(0) + \frac{H\ddot{x}_n(t)}{2i\omega^2} - \frac{H\ddot{x}_n(0)}{2i\omega^2} = \frac{p_n H}{\omega^2} + \frac{H\ddot{x}_n(t)}{2i\omega^2} =$$

$$= \frac{p_n H}{\omega^2} + \frac{\ddot{x}_n(0)}{2\omega}\sin 2\omega t - \frac{\ddot{x}_n(0)}{4\omega^2}\cos 2\omega t. \qquad (\Pi.10)$$

Различные выражения для $x_n(t)$ и $\dot{x}_n(t)$ отличаются формой записи шредингеровского дрожания.

Рассмотрение выражений 6-й и 7-й строк (П.9) наводит на мысль перенести осциллирующие величины $\frac{H\dot{x}_n(t)}{2i\omega} = e^{iHt}\frac{H\dot{x}_n(0)}{2i\omega}e^{-iHt}$ или $-\frac{\ddot{x}_n(t)}{4\omega^2}$ в левую часть и образовать операторы координаты, линейно меняющиеся со временем и с хорошим оператором скорости (в отличие от парадоксального в (П.4)-(П.7)). Это лишь частные случаи общего выражения

$$\tilde{x}_n(t) = \Lambda_+ x_n(t)\Lambda_+ + \Lambda_- x_n(t)\Lambda_- + \alpha i\frac{p_n}{\omega^2}, \qquad \Lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{H}{\omega}\right)$$

где α – произвольное число. $\tilde{x}_n(t)$ коммутируют со знаком частоты, $\left[\tilde{x}_n(t), \frac{H}{\omega}\right] = 0$, но не коммутируют друг с другом, $[\tilde{x}_n(t), \tilde{x}_m(t)] \neq 0$.

В применении к скалярному полю

$$\tilde{x}_n \begin{bmatrix} \varphi \\ \partial_4 \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(x_n + \alpha \frac{\partial_n}{\omega^2}\right)\varphi \\ \left(x_n + (\alpha - 1)\frac{\partial_n}{\omega^2}\right)\partial_4 \varphi \end{bmatrix}$$

и

$$\left(x_n + \alpha\frac{\partial_n}{\omega^2} - (x_4 - x'_4)\frac{\partial_n \partial_4}{\omega^2}\right)\varphi(x) = \int d^3x' \left\{ \partial'_4 \Delta(x-x')\left(x'_n + \alpha\frac{\partial'_n}{\omega^2}\right)\varphi(x') - \Delta(x-x')\left(x'_n + (\alpha-1)\frac{\partial'_n}{\omega^2}\right)\partial'_4 \varphi(x')\right\}.$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ это – координата Ньютона-Вигнера, которая выделена тем, что в применении к $\sqrt{\omega}\,\varphi^{(\mp)}(x) = \sqrt{\omega}\,\frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{\partial_4}{\omega}\right)\varphi(x)$ сводится к умножению на x_n (см. выражение (9.г), ср./2/, стр. 69).

2. Функции преобразования, которые мы попутно приводили выше, вычисляются по формуле

$$\langle x\alpha | x'\alpha' \rangle = e^{iH(t-t')}\,\delta(\vec{x} - \vec{x}')\,\beta_4^2 \qquad (\text{П.I1})$$

и в случаях 4)–7) с учетом формул $H^2 = \omega^2 \beta_4^2$ и

$$\Delta(x-x') = -\frac{\sin\omega(t-t')}{\omega}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'), \qquad i\partial'_4 \Delta(x-x') = \cos\omega(t-t')\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \quad \left(\omega = \sqrt{-\Delta + m^2}\right) \qquad (\text{П.I2})$$

сводятся к

$$\langle x\alpha | x'\alpha' \rangle = -i\left(\beta_4^2 \partial_4 - H\right)\Delta(x-x'). \qquad (\text{П.I3})$$

Все они удовлетворяют уравнению Шредингера

$$\left(\beta_4^2 \partial_4 + H\right)_{\alpha\beta} \langle x\beta | x'\alpha' \rangle = 0. \qquad (\text{П.I4})$$

Как обычно, эти функции преобразования позволяют перейти из $x_n(t')$-представления в $x_n(t)$-представление (точнее было бы сказать, из $(x_n(t'), \alpha(t'))$- в $(x_n(t), \alpha(t))$-представление)

$$\langle x\alpha | = \int d^3x' \langle x\alpha | x'\alpha' \rangle \langle x'\alpha' |. \qquad (\text{П.I5})$$

Использовавшееся нами в тексте преобразование множителя x'_n (оператор $x_n(t')$ в собственном представлении) в оператор $x_n'^{(x)}$ (тот же оператор в $x_n(t)$-представлении) в формализме Дирака объясняется так

$$\langle x\alpha | x'\alpha' \rangle x'_n = \langle x\alpha | x_n(t') | x'\alpha' \rangle = \langle x\alpha | e^{-iH(t-t')} x_n(t) e^{iH(t-t')} | x'\alpha' \rangle =$$
$$= \left(e^{-iH(t-t')} x_n e^{iH(t-t')}\right)_{\alpha\beta} \langle x\beta | x'\alpha' \rangle \equiv x_n'^{(x)} \langle x\alpha | x'\alpha' \rangle, \qquad (\text{П.I6})$$

где все операторы, вынесенные влево, записаны в $x_n(t)$-представлении ($p_n = -i\partial_n$ и т.д.). Что касается дальнейшего вычисления оператора

$$x_n'^{(x)} \equiv e^{-iH(t-t')} x_n e^{iH(t-t')} \beta_4^2, \qquad (\text{П.I7})$$

то мы можем просто сослаться на готовые формулы (П.I)–(П.3) и (П.9), где нужно лишь заменить t на $-(t-t')$.

Так, в случае 3) (случаи I) и 2) столь же очевидные)

$$\langle x | x' \rangle x'_n = \left(x_n - (t-t')\frac{-i\partial_n}{\omega}\right)\langle x | x' \rangle \qquad \left(\omega = \sqrt{-\Delta + m^2}\right). \qquad (\text{П.I8})$$

В случаях 4)–7) аналогично находим соотношения

$$\left(x_n - x'_n - (x_4 - x'_4)\frac{\partial_n \partial_4}{\omega^2} + \frac{i}{2\omega^2} H v_n - \frac{i}{2\omega^2}\left(H v_n\right)^{\sqcap}\right)\langle x\alpha | x'\alpha' \rangle = 0, \qquad (\text{П.I9})$$

где

$$v_n = \begin{cases} 2i\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\partial_n & \text{для } 4) \\ \sigma_n & \text{для } 5) \\ \sigma_{n4} & \text{для } 6) \\ -\frac{i}{m}\beta_4\left(\beta_n \beta_k \partial_k + \beta_k \partial_k \beta_n\right) & \text{для } 7). \end{cases} \qquad (\text{П.20})$$

Значок $\sqcap$ означает, что матрица умножается справа, например,

$$H\sigma_n \langle x\alpha | x'\alpha' \rangle \equiv (H\sigma_n)_{\alpha\beta} \langle x\beta | x'\alpha' \rangle = \left(H\sigma_n e^{-iH(t-t')}\right)_{\alpha\alpha'} \delta(\vec{x}-\vec{x}') = -i\left(H\sigma_n(\partial_4 - H)\right)_{\alpha\alpha'} \Delta(x-x'),$$

тогда как (П.2I)

$$\left(H\sigma_n\right)^{\sqcap} \langle x\alpha | x'\alpha' \rangle = \left(H\sigma_n\right)_{\beta\alpha'} \langle x\alpha | x'\beta \rangle = \left(e^{-iH(t-t')} H\sigma_n\right)_{\alpha\alpha'} \delta(\vec{x}-\vec{x}') =$$
$$= -i\left((\partial_4 - H)H\sigma_n\right)_{\alpha\alpha'} \Delta(x-x') = \left(H e^{-iH(t-t')} \sigma_n e^{iH(t-t')}\right)_{\alpha\beta} \langle x\beta | x'\alpha' \rangle. \qquad (\text{П.22})$$

Операторы v_n, $v_n^{\sqcap}$, $\frac{Hv_n}{\omega^2}$ и $\frac{(Hv_n)^{\sqcap}}{\omega^2}$ суть представители соответственно операторов $\dot{x}_n(t)$, $\dot{x}_n(t')$, $\frac{H\dot{x}_n(t)}{\omega^2}$ и $\frac{H\dot{x}_n(t')}{\omega^2}$.

Как видно из (П.22), последний член в (П.I9) представляет шредингеровское дрожание. В сумме два последние члена в (П.I9) образуют коммутатор

$$\left(\frac{iH}{\omega^2}\left[v_n, e^{-iH(t-t')}\right]\right)_{\alpha\alpha'} \delta(\vec{x}-\vec{x}') = \left(\frac{H}{\omega^2}\left[H, v_n\right]\right)_{\alpha\alpha'} \Delta(x-x'). \qquad (\text{П.23})$$

Отметим, что формулы, аналогичные по смыслу формулам (П.I8) и (П.I9), для функций $\Delta(x-x')$ и $\partial_4 \Delta(x-x')$ имеют вид

$$\left(x_n - x'_n - (x_4 - x'_4)\frac{\partial_n \partial_4}{\omega^2} + \frac{\partial_n}{\omega^2}\right)\Delta(x-x') = 0 \qquad (\text{П.24})$$

$$\left(x_n - x'_n - (x_4 - x'_4)\frac{\partial_n \partial_4}{\omega^2}\right)\partial_4 \Delta(x-x') = 0, \qquad (\text{П.25})$$

причем последний член в первой из них тоже представляет шредингеровское дрожание.

3. Отметим важный момент: возможность заменить в применении к функции преобразования множитель x_n' (оператор $x_n(t')$ в своем собственном представлении) оператором $x_n'^{(x)}$ (тот же оператор в $x_n(t)$-представлении) есть следствие лоренц-инвариантности (в нерелятивистском случае галилеевской инвариантности). Так, лоренц-инвариантность функций $\Delta^{(-)}$ и $\Delta^{(+)}$ означает

$$\left((x_\mu-x_\mu')\partial_\nu-(x_\nu-x_\nu')\partial_\mu\right)\Delta^{(\mp)}(x-x')=0, \qquad (\text{П}.26)$$

и, в частности,

$$\left((x_n-x_n')\partial_4-(x_4-x_4')\partial_n\right)\Delta^{(\mp)}(x-x')=0. \qquad (\text{П}.27)$$

Отсюда с помощью уравнений (Шредингера)

$$\partial_4\Delta^{(\mp)}(x-x')=\mp\omega\Delta^{(\mp)}(x-x') \qquad (\text{П}.28)$$

получаем[x)]

$$\left(x_n-x_n'\mp(t-t')\frac{-i\partial_n}{\omega}\right)\partial_4\Delta^{(\mp)}(x-x')=0. \qquad (\text{П}.29)$$

Соотношение (П.29) для $\partial_4\Delta^{(-)}$ тождественно соотношению (П.18).

Для $\Delta(x-x')$ и функций преобразования $\langle x\alpha|x'\alpha'\rangle$ в случаях 4)-7) из лоренц-инвариантности вытекают соотношения

$$\left((x_n-x_n')\partial_4-(x_4-x_4')\partial_n\right)\Delta(x-x')=0, \qquad (\text{П}.30)$$

$$\left((x_n-x_n')\partial_4-(x_4-x_4')\partial_n+\frac{i}{2}\upsilon_n+\frac{i}{2}\upsilon_n^{\text{п}}\right)\langle x\alpha|x'\alpha'\rangle=0. \qquad (\text{П}.31)$$

Для случая 6) соотношение (П.31) легко переписать в знакомой форме

$$\left((x_n-x_n')\partial_4-(x_4-x_4')\partial_n+\frac{i}{2}\sigma_{n4}-\frac{i}{2}\sigma_{n4}^{\text{п}}\right)S_{\alpha\alpha'}(x-x')=0. \qquad (\text{П}.32)$$

---

x) Отметим, что этот вывод находится в тесном соответствии с выводом закона движения по инерции в классической механике только из законов сохранения 4-момента и 4-импульса без обращения к уравнениям движения. Действительно, из $M_{n4}-M_{n4}'=(x_n-x_n')p_4-(x_4-x_4')p_n=0$ вытекает, что $x_n(t)=x_n(t')+(t-t')\frac{p_n}{p_0}$ ($M_{mn}=M_{mn}'$ есть следствие). Этот вывод верен и в квантовой механике для операторов.

Отметим, что соотношения (П.31) можно получить из (П.30), если домножить последнее слева на $-i(\beta_4^2\partial_4-H)$. Далее, соотношения (П.19) и (П.24) получаются из (П.31) и (П.30) путем действия на последние оператором ∂_4/ω^2, а (П.25) можно получить либо дифференцированием (П.24), либо непосредственно из (П.30).[x)]

4. Подчеркнем, что к причинной функции преобразования ведет именно "неестественный" "дрожащий" оператор координаты $x_m(t)$, обладающий парадоксальным оператором скорости $\dot{x}_m(t)$ ($\dot{x}^2=3c^2$!) и не отвечающий теореме Эренфеста/3-5,24/. В обкладках между положительно-частотными состояниями он сводится к "естественному" оператору координаты ($\Lambda_+ x_m^{\text{дрож.}}(t)\Lambda_+=\Lambda_+ x_m^{\text{недрож.}}(t)\Lambda_+$), который имеет правильный оператор скорости $\dot{x}_m^{\text{недрож.}}=\frac{p_m}{\omega}$ и линейно зависит от t, т.е. не "дрожит" и отвечает теореме Эренфеста, но расходится с требованием причинности: приводит к непричинной функции преобразования (например, для скалярного поля см. формулы (П.3) и (П.18) и обсуждение в Приложении Б к работе/25/).

5. Соотношение (П.18) для нерелятивистского случая ($\omega=m$, наш случай I)) использовалось как уравнение для нахождения функции преобразования еще в книге Гайзенберга/30/. Подобные соотношения легко записываются с помощью формализма Дирака/31/ (как в п. 2 настоящего Приложения) и широко применялись Швингером/32/ с той же целью и в свободном случае и в случае взаимодействия. Недавно к этому вопросу с оригинальной точки зрения подошли И.А.Малкин и В.И.Манько/33/.

---

x) Отметим, что соотношения (П.24) и (П.25) верны и для $\Delta^{(\mp)}$ и $\Delta^{(1)}$, причем для $\Delta^{(\mp)}$ их можно упростить с помощью (П.28), что превратит (П.25) в (П.29). С помощью формул $\partial_4\Delta(x)=\omega i\Delta^{(1)}(x)$ и $\partial_4 i\Delta^{(1)}(x)=\omega\Delta(x)$ можно было бы аналогично упростить и соотношения (П.24) и (П.25) для Δ и $\Delta^{(1)}$. Однако получились бы соотношения, перепутывающие Δ и $\Delta^{(1)}$.

Литература

1. Н.Н.Боголюбов,Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей, ГИТТЛ, Москва, 1957.
2. С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, Москва, 1963.
3. G.Breit, Proc.Nat.Acad.Amer. 14, 553,1928; 17,70,1931.
4. E.Schrödinger. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, phys.-math.Klasse, 1930, 418; 1931, 63.
5. В.А.Фок. Zs.f.Phys. 55, 127, 1929; 68, 527, 1931.
6. T.D.Newton, E.P.Wigner, Rev.Mod.Phys. 21, 400, 1949.
7. L.L.Foldy, S.A.Wouthuysen, Phys.Rev. 78, 29, 1950.
8. S.Tani. Progr.Theor.Phys. (Japan) 6, 267, 1951.
9. A.S.Wightman, S.Schweber, Phys.Rev. 98, 812, 1955.
10. Д.И.Блохинцев. Сообщения ОИЯИ (Дубна), Р-1091, 1962; Р-2631, 1966.
11. A.S.Wightman. Rev.Mod.Phys. 34, 845, 1962.
12. М.И.Широков. Annalen der Physik 7, 60, 1962; Сообщения ОИЯИ (Дубна) Е-1252, 1963, Р-1934,1965, Е-2478, 1965.
13. R.Fong, E.G.Rowe. Ann.Phys. (New York) 46, 559, 1968.
14. J.E.Johnson.. Phys.Rev. 181, 1755, 1969.
15. E.Papp, Int.J.Theor.Phys. 9, 101, 1974.
16. Bernice Durand, J.Math.Phys. 14, 921, 1973; preprint of University of Wisconsin, 1974.
17. M.Born, L.Infeld, Proc.Roy.Soc. A150, N.869, 141, 1935.
18. M.H.L.Pryce. Proc.Roy.Soc. A150, N.869, 166, 1935; Proc.Roy.Soc. A195, N.1040, 62, 1948.
19. Ю.М.Широков. ЖЭТФ, 21, 748, 1951; 23, 78, 1952.
20. S.Lagu, H.Laue. Nuovo Cim. 20A, 217, 1974.

21. М.А.Марков. ЖЭТФ 10, 1311, 1940. М.А.Марков. Гипероны и К-мезоны, ГИФМЛ, Москва, 1958.
22. И.В.Полубаринов, ТМФ 1, 34, 1969; Сообщения ОИЯИ Р2-4362, Дубна, 1969.
23. И.В.Полубаринов. Сообщения ОИЯИ Р2-7532, Дубна, 1973.
24. Луи де Бройли. Магнитный электрон (теория Дирака, ОНТИ, ДНТВУ, Харьков, 1936.
25. И.В.Полубаринов. Сообщения ОИЯИ Р2-7896, Дубна, 1974.
26. И.В.Полубаринов. Сообщения ОИЯИ Р2-8362, Дубна, 1974.
27. В.Паули. Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, Москва, 1947.
28. F.L.Feinberg. Phys.Rev. 7D, 540, 1973.
29. R.F.Guertin, E.Guth, Phys.Rev. 7D, 1057, 1973.
30. В.Гейзенберг. Физические принципы квантовой теории, ГТТИ, Ленинград-Москва, 1932, стр. 54.
31. П.А.М.Дирак. Принципы квантовой механики, ГИФМЛ, Москва, 1960.
32. Сборник статей "Новейшее развитие квантовой электродинамики", ИЛ, Москва, 1954.
33. И.А.Малкин, В.И.Манько ТМФ 6, 71, 1971; J.Math.Phys. 14, 576, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 ноября 1974 года