ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 8370

А.Б.Пестов, Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

КОНФОРМНЫЙ МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 8370

А.Б.Пестов, Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

КОНФОРМНЫЙ МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Направлено в ТМФ

Данная работа дополняет работу /1/, где изучен конформный момент импульса скалярного и спинорного полей. Поэтому мы не будем долго останавливаться на определениях и разъяснениях, коль скоро они уже даны в /1/. Как и в той работе, все величины мы относим к ортогональному реперу. Но если в скалярном случае размерность n пространственно-временного мира могла быть любой, а в спинорном - любой четной, то здесь, в электромагнитном случае, существенно, чтобы $n=4$.

Итак, пусть $A_{\alpha\beta}$ - бивектор электромагнитного поля. Рассмотрим его производную Ли /2/ вдоль некоторого векторного поля K^α:

$$A'_{\alpha\beta} = K^\mu D_\mu A_{\alpha\beta} + A_{\mu\beta} D_\alpha K^\mu + A_{\alpha\mu} D_\beta K^\mu.$$

Если $A_{\alpha\beta}$ удовлетворяет второй группе уравнений Максвелла, т.е. если

$$D_\alpha A_{\beta\mu} + D_\beta A_{\mu\alpha} + D_\mu A_{\alpha\beta} = 0,$$

(что заведомо выполняется для $A_{\alpha\beta} = D_\alpha A_\beta - D_\beta A_\alpha$, где A_α - векторный потенциал), то

$$A'_{\alpha\beta} = A_{\mu\beta} D_\alpha K^\mu + A_{\alpha\mu} D_\beta K^\mu - $$
$$- K^\mu (D_\alpha A_{\beta\mu} + D_\beta A_{\mu\alpha}) =$$
$$= D_\alpha (K^\mu A_{\mu\beta}) - D_\beta (K^\mu A_{\mu\alpha}).$$

Мы видим, что бивектор $A'_{\alpha\beta}$ имеет однозначный потенциал (равный $K^\mu A_{\mu\alpha}$), если даже сам бивектор $A_{\alpha\beta}$ однозначного потенциала не имеет. Следовательно, вместе с бивектором $A_{\alpha\beta}$

второй группе уравнений Максвелла удовлетворяет и его производная Ли $A'_{\alpha\beta}$.

В том случае, когда для бивектора $A_{\alpha\beta}$ есть однозначный потенциал A_α, производная Ли этого потенциала, равная

$$A'_\alpha = K^\mu D_\mu A_\alpha + A_\mu D_\alpha K^\mu,$$

несущественно отличается от $K^\mu A_{\mu\alpha}$, ибо, как легко видеть,

$$A'_\alpha = K^\mu (D_\mu A_\alpha - D_\alpha A_\mu) + D_\alpha (K^\mu A_\mu),$$

а потенциал определяется как раз с точностью до градиента скалярной функции.

Перейдем теперь к первой группе уравнений Максвелла. Для этого рассмотрим дивергенцию бивектора $A'_{\alpha\beta}$. Имеем

$$D^\alpha (K^\mu D_\mu A_{\alpha\beta}) = (D^\alpha K^\mu)(D_\mu A_{\alpha\beta}) + K^\mu D^\alpha D_\mu A_{\alpha\beta},$$

$$D^\alpha (A_{\mu\beta} D_\alpha K^\mu) = (D^\alpha K^\mu)(D_\alpha A_{\mu\beta}) + A_{\mu\beta} \Box K^\mu,$$

$$D^\alpha (A_{\alpha\mu} D_\beta K^\mu) = (D^\alpha A_{\alpha\mu})(D_\beta K^\mu) + A^{\alpha\mu} D_\alpha D_\beta K_\mu$$

и (см. [I], Приложение)

$$D^\alpha D_\mu A_{\alpha\beta} = D_\mu D^\alpha A_{\alpha\beta} - R^\alpha_\mu A_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta,\mu\nu} A^{\alpha\nu},$$

$$\Box K^\mu = -2F^\mu + 2 D^\alpha K^\mu_\alpha + R^\mu_\alpha K^\alpha,$$

$$D_\alpha D_\beta K_\mu = D_\alpha K_{\beta\mu} + D_\beta K_{\mu\alpha} - D_\mu K_{\beta\alpha} + F_\alpha \eta_{\beta\mu} + F_\beta \eta_{\mu\alpha} - F_\mu \eta_{\beta\alpha} + R_{\mu\beta,\alpha\sigma} K^\sigma,$$

где

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(D_\alpha K_\beta + D_\beta K_\alpha) - F \eta_{\alpha\beta},$$

$$F = \frac{1}{4} D_\alpha K^\alpha, \quad F_\mu = D_\mu F,$$

$\eta_{\alpha\beta}$ – метрический тензор. После несложных преобразований отсюда находим

$$D^\alpha A'_{\alpha\beta} = (D^\alpha A_{\alpha\beta})' + 2F D^\alpha A_{\alpha\beta} - 2K^\mu_\beta D^\alpha A_{\alpha\mu} + 2 D^\alpha (K^\mu_\alpha A_{\mu\beta} - K^\mu_\beta A_{\mu\alpha}),$$

где первое слагаемое в правой части является производной Ли от дивергенции:

$$(D^\alpha A_{\alpha\beta})' = K^\mu D_\mu (D^\alpha A_{\alpha\beta}) + (D_\beta K^\mu)(D^\alpha A_{\alpha\mu}).$$

Следовательно, если бивектор $A_{\alpha\beta}$ удовлетворяет первой группе уравнений Максвелла, т.е. если $D^\alpha A_{\alpha\beta} = 0$, то

$$D^\alpha A'_{\alpha\beta} = 2 D^\alpha (K^\mu_\alpha A_{\mu\beta} - K^\mu_\beta A_{\mu\alpha}),$$

если поле K^α конформно, т.е. если $K_{\alpha\beta} = 0$, то

$$D^\alpha A'_{\alpha\beta} = (D^\alpha A_{\alpha\beta})' + 2F D^\alpha A_{\alpha\beta},$$

если же выполняются оба условия, $D^\alpha A_{\alpha\beta}=0$ и $K_{\alpha\beta}=0$, то $D^\alpha A'_{\alpha\beta}=0$.

Оператор $\hat{K}$, превращающий бивектор $A_{\alpha\beta}$ в $-i\hbar A'_{\alpha\beta}$ и потенциал A_α в $-i\hbar A'_\alpha$, в случае $K_{\alpha\beta}=0$ будем называть оператором конформного момента электромагнитного поля. Мы видели, что оператор конформного момента действует в пространстве решений уравнений Максвелла.

Дальше мы будем предполагать, что существует однозначный потенциал A_α, так что $A_{\alpha\beta}=D_\alpha A_\beta - D_\beta A_\alpha$. Для двух решений, A_α и B_α, уравнений $D^\alpha A_{\alpha\beta}=0$ определим антисимметричное скалярное произведение в виде интеграла

$$(A,B)=\int\limits_\Sigma (B^\mu A_{\mu\alpha} - A^\mu B_{\mu\alpha})\,d\sigma^\alpha$$

по гиперповерхности Коши. От выбора полной гиперповерхности Σ этот интеграл не зависит, так как в силу уравнений Максвелла

$$D^\nu(B^\mu A_{\mu\nu} - A^\mu B_{\mu\nu})=0.$$

Введенное произведение (A,B) калибровочно инвариантно. Действительно, пусть Φ - произвольная скалярная функция. Тогда

$$(B+D\Phi)^\mu A_{\mu\nu} - A^\mu(B+D\Phi)_{\mu\nu} - B^\mu A_{\mu\nu} + A^\mu B_{\mu\nu} =$$
$$= A_{\mu\nu}D^\mu\Phi = D^\mu(\Phi A_{\mu\nu}).$$

Так как $\Phi A_{\mu\nu}$ - антисимметричный тензор, то согласно теореме Стокса интеграл по Σ от его дивергенции равняется нулю. Поэтому $(A,B+D\Phi)=(A,B)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь тензор энергии-импульса электромагнитного поля, равный

$$T_{\mu\nu} = A_{\mu\alpha}A_{\nu\beta}\eta^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu},$$

и докажем, что для конформного поля K^α

$$\int\limits_\Sigma K^\mu T_{\mu\nu}\,d\sigma^\nu = -\frac{1}{2}(A,A') = \frac{1}{2i\hbar}(A,\hat{K}A).$$

С этой целью введем тензор

$$P_{\mu\alpha\nu} = A_\mu A_{\alpha\nu} + A^\sigma A_{\sigma\alpha}\eta_{\nu\mu} - A^\sigma A_{\sigma\nu}\eta_{\alpha\mu},$$

антисимметричный по двум последним индексам. Нетрудно проверить, что

$$2T_{\mu\nu} = D^\alpha P_{\mu\alpha\nu} + A_{\mu\alpha}A_{\nu\beta}\eta^{\alpha\beta} + A^\alpha D_\mu A_{\alpha\nu}.$$

Поэтому

$$2K^\mu T_{\mu\nu} = K^\mu A_{\mu\alpha}A_{\nu\beta}\eta^{\alpha\beta} + A^\alpha K^\mu D_\mu A_{\alpha\nu} -$$
$$- P_{\mu\alpha\nu}D^\alpha K^\mu + D^\alpha(K^\mu P_{\mu\alpha\nu}),$$

т.е.

$$2K^\mu T_{\mu\nu} = A^\alpha A'_{\alpha\nu} - A'^\alpha A_{\alpha\nu} -$$
$$- A^\alpha A_{\mu\nu}D_\alpha K^\mu - A^\alpha A_{\alpha\mu}D_\nu K^\mu - P_{\mu\alpha\nu}D^\alpha K^\mu +$$
$$+ D^\alpha(K^\mu P_{\mu\alpha\nu} + K^\mu A_\mu A_{\alpha\nu}).$$

Последнее слагаемое является дивергенцией антисимметричного тензора и поэтому своего вклада в интеграл по Σ не дает. Без труда проверяется, что

$$A^{\alpha}A_{\mu\nu}D_{\alpha}K^{\mu}+A^{\alpha}A_{\alpha\mu}D_{\nu}K^{\mu}+P_{\mu\alpha\nu}D^{\alpha}K^{\mu}=$$
$$=2(A_{\mu\nu}K^{\mu}_{\alpha}-A_{\mu\alpha}K^{\mu}_{\nu})A^{\alpha}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Sigma}K^{\mu}T_{\mu\nu}\,d\sigma^{\nu}=-\frac{1}{2}(A,A')+\int\limits_{\Sigma}(A_{\mu\alpha}K^{\mu}_{\nu}-A_{\mu\nu}K^{\mu}_{\alpha})A^{\alpha}d\sigma^{\nu}.$$

Полагая $K_{\alpha\beta}=0$, получаем результат, который мы хотели доказать.

Электромагнитный вариант не только классической, но и квантовой теории поля будет аналогичен скалярному варианту/1,3,4/, если принять следующие правила квантования электромагнитного поля:

1. Квантованное поле A^{α} подчиняется уравнениям Максвелла
$$D^{\alpha}(D_{\alpha}A_{\beta}-D_{\beta}A_{\alpha})=0.$$

2. Операторы вида (U,A), где U^{α} -неквантованное решение уравнений $D^{\alpha}(D_{\alpha}U_{\beta}-D_{\beta}U_{\alpha})=0$, образуют линейную оболочку генераторов алгебры квантовой электродинамики.

3. Коммутатор двух таких операторов равняется
$$(U,A)(V,A)-(V,A)(U,A)=i\hbar(U,V).$$

4. Все физические величины порождаются операторами типа (U,A). Физические величины калибровочно инвариантны.

Основываясь на этих правилах, нетрудно доказать конформную инвариантность поведения фотонов. Для этого надо рассмотреть два мира, M и $\bar{M}$, находящихся в конформном соответствии, а это

означает, что их метрики связаны условием $d\bar{s}^2=B^2ds^2$, где B - скалярная функция. Принимая $A_{\alpha}=B\bar{A}_{\alpha}$, нетрудно получить, что $A_{\alpha\beta}=B^2\bar{A}_{\alpha\beta}$, $T_{\alpha\beta}=B^4\bar{T}_{\alpha\beta}$, $D^{\alpha}A_{\alpha\beta}=B^3\bar{D}^{\alpha}\bar{A}_{\alpha\beta}$. Дальнейшее доказательство аналогично скалярному или спинорному случаю/5/.

Имеется, однако, существенное различие между скалярным и электромагнитным вариантами. В первом варианте скалярное произведение (U,V) не вырождено: из того, что $(U,V)=0$ для всех V, следует, что $U=0$. Во втором же варианте скалярное произведение (U,V), наоборот, вырождено: из того, что $(U,V)=0$ для всех V, не следует, что $U=0$ (а следует лишь, что $U=D\Phi$). Поэтому, между прочим, векторный потенциал нельзя выразить в виде оператора (U,A). Следовательно, сформулированные правила квантования не задают однозначно коммутатора $A_{\alpha}(x)A_{\beta}(y)-A_{\beta}(y)A_{\alpha}(x)$. Именно с этим обстоятельством связаны известные трудности квантования электромагнитного поля.

В отличие от потенциала A_{α} бивектор $A_{\alpha\beta}$ является физической величиной, и его можно представить в виде (U,A), где компоненты U_{α} - некоторые обобщенные функции (распределения). Можно доказать, что

$$A_{\alpha\beta}(x)(U,A)-(U,A)A_{\alpha\beta}(x)=i\hbar U_{\alpha\beta}(x).$$

Вторично квантованный оператор конформного момента, равный $\frac{1}{2}(A',A)$, также является физической величиной. Это есть квадратичная форма от операторов типа (U,A). Можно доказать, что

$$\frac{1}{2}(A',A)(U,A)-(U,A)\frac{1}{2}(A',A)=i\hbar(U',A).$$

Мы оставляем здесь без внимания вопрос о выборе вакуумного состояния, который для произвольного риманова мира нельзя считать решенным и в более простых, скалярном и спинорном, случаях: он столь же сложно (или просто) решается и в электромагнитном случае. Например, в конформно-статическом мире выбрать вакуумное состояние позволяет оператор конформного момента, задаваемый векторным полем $\frac{\partial}{\partial\theta}$, где θ – время [5].

Предложенную здесь процедуру квантования электромагнитного поля можно считать законченной, если отвлечься от взаимодействий полей. Переход к теории электромагнитного поля, взаимодействующего, например, с электронно-позитронным полем, требует, конечно, дальнейшего изучения правил квантования.

Литература

1. Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. ТМФ, 18, №3, 1974; Препринт ОИЯИ, Р2-6965, Дубна, 1973.
2. Я.А.Схоутен. Тензорный анализ для физиков. М., Наука, 1965.
3. Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. Препринт ОИЯИ, Р2-6109, Дубна, 1971.
4. Н.А.Черников. Материалы III совещания по нелокальным теориям поля, ОИЯИ, Д2-7161, Дубна, 1973.
5. Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. Препринт ОИЯИ, Р2-6820, Дубна, 1972. Сб. "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц", вып.5, М., Атомиздат, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 ноября 1974 года