СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 8362

И.В.Полубаринов

О КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЯХ. 2

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 8362

И.В.Полубаринов

О КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЯХ. 2

Полубаринов И.В. Р2 - 8362

О когерентных состояниях. 2

Продолжено начатое в [1] рассмотрение метода когерентных состояний применительно к релятивистской квантовой теории поля. Демонстрируется теорема о том, что любой оператор однозначно определяется своими диагональными элементами в когерентных состояниях. На этой основе произведено сопоставление данного метода с методом источников Швингера.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1974

P2 - 8362

Polubarinov I.V.

On Coherent States. 2

The consideration of the coherent state method applied to the relativistic quantum field theory is continued[1]. A theorem is shown that any operator is uniquely determined by its diagonal matrix elements in the coherent states. On this basis a comparison of the present method with that of the Schwinger sources has been made.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1974

I. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе продолжено начатое в [I] рассмотрение метода когерентных состояний применительно к релятивистской квантовой теории поля в терминах x-пространства.

В теории когерентных состояний можно встретить интересное утверждение (теорему), что любой оператор однозначно определяется своими диагональными элементами в когерентных состояниях. Доказательство в квантовой механике, по сути дела, основано на теории функций многих комплексных переменных (см., например, работу [2], которая переведена в сборнике [I.3/x)], см. стр. I32).

Ниже, в п. 2 дается доказательство указанной теоремы непосредственно в релятивистской квантовой теории поля. (Оно, разумеется, годится и для квантовой механики.) В п. 3 приводится второе доказательство, причем этот путь удобен для сопоставления метода когерентных состояний с методом внешних источников Швингера. В п. 4 обсуждается проблема причинности.

В Приложении А приведены некоторые соотношения для когерентных состояний, дополняющие формулы работы [I]. Приложение Б посвящено вопросу о происхождении нормы и оператора числа частиц для нейтрального скалярного поля.

x) Так обозначаем ссылку [3] по списку литературы работы [I]. Ниже аналогично будут обозначаться и формулы из работы [I]. Так, формула (I.9) есть формула (9) из работы [I].

2. СРЕДНИЕ ОПЕРАТОРА ПО КОГЕРЕНТНЫМ СОСТОЯНИЯМ ОПРЕДЕЛЯЮТ ОПЕРАТОР

Доказательство этой теоремы будет состоять в том, что будет показано, что среднее оператора по когерентному состоянию есть производящий функционал для матричных элементов его между состояниями с определенными числами квантов.

Для определенности пусть этим оператором будет S -матрица

$$S(t_2,t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d^4x_1 \dots d^4x_n \, K(x_1 \dots x_n) : \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n): \qquad (\mathrm{I})$$

В обозначениях и по формулам из /I/ его среднее в когерентном состоянии запишется в виде

$$\langle \varphi' | S | \varphi' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d^4x_1 \dots d^4x_n \, K(x_1 \dots x_n) \varphi'(x_1) \dots \varphi'(x_n), \qquad (2)$$

где согласно формулам (I.9) и (I.56)

$$\varphi'(x) = i \int d^3x' \left[\partial_4' \Delta(x-x') f_1(\vec{x}') - \Delta(x-x') f_2(\vec{x}') \right], \qquad (3)$$

а $f_1(\vec{x})$ и $f_2(\vec{x})$ – две произвольные функции трехмерного аргумента $\vec{x}$. Вычислив по ним функциональные производные произвольного порядка и приравняв их нулю, найдем x/

$$F_n^m(y_1 \dots y_n) \equiv \frac{\delta}{\delta f_1(\vec{y}_1)} \dots \frac{\delta}{\delta f_1(\vec{y}_m)} \frac{\delta}{\delta f_2(\vec{y}_{m+1})} \dots \frac{\delta}{\delta f_2(\vec{y}_n)} \langle \varphi' | S | \varphi' \rangle \Big|_{f_1=f_2=0} =$$

$$= (-1)^m \int d^4x_1 \dots d^4x_n \, K(x_1 \dots x_n) \partial_4 \Delta(x_1 - y_1) \dots \partial_4 \Delta(x_m - y_m) \Delta(x_{m+1} - y_{m+1}) \dots \Delta(x_n - y_n), \qquad (4)$$

---

x/ Если считать $\varphi'(x)$ произвольной функцией 4-аргумента, то правая часть (2) была бы производящей функцией коэффициентных функций K, но такое понимание φ' противоречило бы определению (I.4) когерентных состояний и левой части (2).

где все времена y_{i0} равны друг другу, $y_{10} = y_{20} = \dots = y_{n0}$. Однако последнее обстоятельство не мешает, задав n пар различных функций $f_{k1}(\vec{y})$ и $f_{k2}(\vec{y})$ ($k = 1, \dots n$), составить из всех возможных производных (4) данного порядка n выражение

$$\langle n_f | S | n_i \rangle = i^n \int d^4x_1 \dots d^4x_n \, K(x_1 \dots x_n) f_1(x_1) \dots f_n(x_n), \qquad (5)$$

где $n_i + n_f = n$,

$$f_k(x) = i \int d^3y \left(\partial_4 \Delta(x-y) f_{k1}(\vec{y}) - \Delta(x-y) f_{k2}(\vec{y}) \right). \qquad (6)$$

Выражение (5) есть не что иное как самый общий матричный элемент S -матрицы с n концами. А так как S -матрица исчерпывается совокупностью всех своих матричных элементов с различными числами концов (начальных и конечных квантов), то тем самым теорема доказана.

От нековариантных выражений F_n^m (4) легко перейти к эквивалентным ковариантным. Для этого подставим в (5)

$$f_{k1}(\vec{y}_k) = \Delta(y_k - z_k), \qquad f_{k2}(\vec{y}_k) = \partial_4 \Delta(y_k - z_k), \qquad (7)$$

где все 4-векторы $z_{k\mu}$ различные, а $y_{10} = y_{20} = \dots = y_{n0}$. Тогда выражение (5) перейдет в

$$F(z_1 \dots z_n) = \int d^4x_1 \dots d^4x_n \, K(x_1 \dots x_n) \Delta(x_1 - z_1) \dots \Delta(x_n - z_n), \qquad (8)$$

где в отличие от (4) времена $z_{10}, \dots z_{n0}$ произвольные. Функции (8) получены из функций (4), и от них легко вернуться обратно к (4) путем дифференцирования по временам z_{i0} и их приравнивания. Переход от (8) к (5) очевиден. Поэтому совокупность функций (8) со всеми исчерпывает (определяет) S -матрицу.

То, что было сделано, фактически есть преобразование S -матрицы из представления когерентных состояний (совокупность матричных элементов S между всеми возможными когерентными состояниями) к представлению Фока (совокупность матричных элементов S между всеми возможными состояниями, в которых заданы числа квантов). Для получения всех матричных элементов в последнем представлении нам понадобились только диагональные матричные элементы их первого. Это объясняется известным фактом переполненности системы когерентных состояний.

Отметим, что тем же путем, которым мы перешли от (4) к (5), можно перейти от (4) к исходному оператору (I):

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^3x_1\ldots d^3x_n:\left(\varphi(x_1)\frac{\delta}{\delta\varphi'(x_1)}+\dot{\varphi}(x_1)\frac{\delta}{\delta\dot{\varphi}'(x_1)}\right)\cdots\left(\varphi(x_n)\frac{\delta}{\delta\varphi'(x_n)}+\dot{\varphi}(x_n)\frac{\delta}{\delta\dot{\varphi}'(x_n)}\right):\langle\varphi'|S|\varphi'\rangle_{f_1=f_2=0},$$

$$\left(\varphi'(x_1)\equiv f_1(\vec{x}),\ \dot{\varphi}'(x)\equiv i\partial_4\varphi'(x)\equiv if_2(\vec{x})\right). \qquad (9)$$

Данное доказательство справедливо для любого оператора, а не только для S. Все отличие состояло бы только в форме коэффициентных функций разложения данного оператора по N-произведениям. Очевидно, что в квантовой механике (в гайзенберговском представлении) доказательство можно было бы провести точно так же.

3. СРАВНЕНИЕ С МЕТОДОМ ИСТОЧНИКОВ ШВИНГЕРА

Выше мы исходили из определения когерентных состояний (I.4). Теперь обратимся к определению (I.35). Среднее S в таком когерентном состоянии есть

$$\langle J|S|J\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_1}^{t_2}d^4x_1\ldots d^4x_n\int_{t_1}^{t_2}d^4z_1\ldots d^4z_n\,K(x_1\ldots x_n)\,\cdot$$

$$\cdot\,\Delta(x_1-z_1)J(z_1)\ldots\Delta(x_n-z_n)J(z_n)\,. \qquad (10)$$

Так как $J(z)$ – произвольная функция всех четырех аргументов $\vec{z}$ и z_0, то сразу же приходим к

$$i^n\frac{\delta}{\delta J(z_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(z_n)}\langle J|S|J\rangle\Big|_{J=0}=F(z_1\ldots z_n)\,, \qquad (11)$$

где $F(z_1\ldots z_n)$ – прежние функции (8). Очевидно, что

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int d^3x_1\ldots d^3x_n:\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n):\overleftrightarrow{\partial}_{14}\ldots\overleftrightarrow{\partial}_{n4}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\langle\varphi'|S|\varphi'\rangle_{J=0}. \qquad (12)$$

В /I/ на основании формы записи когерентных состояний (I.35) уже отмечалась близость метода когерентных состояний к методу внешних источников Швингера. Однако последний метод дает вместо (8) функции Грина, в которых на месте функций $\Delta(x-z)$ в (8) стоят фейнмановские функции $\Delta_+(x-z)$.

Для примера сравним производящие функционалы в случае задачи с внешним током. В методе когерентных состояний – это

$$\langle\varphi'|S(t_2,t_1)|\varphi'\rangle=\langle 0|S(t_2,t_1)|0\rangle\, e^{i\int_{t_1}^{t_2}d^4x\,\varphi'(x)j(x)}=$$

$$=\langle 0|S(t_2,t_1)|0\rangle\, e^{-i\int_{t_1}^{t_2}d^4x\,d^4y\,j(x)\Delta(x-y)J(y)}, \qquad (13)$$

а в методе источников

$$\langle 0|T\, e^{i\int d^4x\,\varphi(x)J(x)}\,S(t_2,t_1)|0\rangle=$$

$$=e^{-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}d^4x\,d^4y\,[j(x)+J(x)](-i)\Delta_+(x-y)[j(y)+J(y)]}\,. \qquad (14)$$

$$\left(K_n(x_1\ldots x_n)=j(x_1)\ldots j(x_n)\right).$$

4. ЗАМЕЧАНИЕ О ПРИЧИННОСТИ

В /I/ уже подчеркивалось, что та причинность, которую эксплуатируют явно или неявно, есть прежде всего причинность для операторов поля. Она, как и в классике, состоит прежде всего в гиперболическом характере дифференциальных уравнений движения для полей и отсюда-в возможности записать эти уравнения в интегральной форме с помощью запаздывающих функций Грина, т.е. в форме уравнений Челлена-Янга-Фелдмана (I.67)-(I.69). Из этих уравнений можно извлечь все следствия причинности, прямые (если таковые существуют по характеру задачи) и косвенные (например, дисперсионные соотношения). Опираясь на одновременные перестановочные соотношения в некоторой системе отсчета, с помощью этих уравнений можно вывести равенство нулю коммутаторов локальных операторов при пространственно- подобном разделении, а также проверить общее условие причинности Боголюбова

$$\frac{\delta}{\delta g(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta g(y)}S\right) = -\theta(x_0-y_0)S[\mathcal{L}_I(x),\mathcal{L}_I(y)]S^{-1} = 0 \quad \text{(при простр.-подобном разделении)}$$

S -матрица при любом способе ее получения -прямо из этих уравнений (см. выражения в скобках в (I.67)-(I.69)), как поступали Челлен и Янг и Фелдман, либо с помощью уравнения Томонаги-Швингера, либо аксиоматически с применением условия Боголюбова -полностью учитывает причинность. Однако сама она, а потому и амплитуды построены из фейнмановских функций $\Delta_+(x-x')$ и $S_+(x-x')$, которые являются "не вполне" причинными. Причинность в S отражена лишь в неявной форме, и это связано с тем, что условие причинности Боголюбова нелинейно относительно S. Однако существуют объекты, которые ведут себя явно причинно, - это комбинация Боголюбова $\frac{\delta}{\delta g(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta g(y)}S\right)$ и ее обобщения, а также коммутаторы локальных величин.

Нами было показано в /I/, что средние по когерентным состояниям от операторов поля: $\langle\varphi'|\varphi(x)|\varphi'\rangle$ в задаче с внешним током и $\langle\varphi'|\varphi(x)|\varphi'\rangle$ в задаче с внешним полем - тоже являются явно причинными объектами (см. формулы (I.70) и (I.76). В силу доказанной теоремы можно утверждать, что этим не только иллюстрируется, но и полностью исчерпывается причинность данных теорий.

В случае замкнутой системы взаимодействующих полей такой результат пока не получен. Трудность возникает в самом начале. Если в уравнениях Челлена-Янга-Фелдмана обратиться к членам высшего порядка, которые можно получить, например, с помощью итераций, легко убедиться, что после N-упорядочивания появятся не только причинные функции Δ_{ret}, но и функции $\Delta^{(+)}$ или $\Delta^{(1)}$ (готовый результат см. в /I.8/). Следовательно, средние $\langle\varphi'|\varphi(x)|\varphi'\rangle$ будут вести себя апричинно. Возможно, однако, что с учетом взаимодействия когерентные состояния должны быть модифицированы.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Дополним сведения работы /I/ по когерентным состояниям некоторыми формулами. Используя соотношение полноты (случай свободного скалярного поля)

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^3p_1\dots d^3p_n\, a^+(\vec{p}_1)\dots a^+(\vec{p}_n)|0\rangle\langle 0|a(\vec{p}_1)\dots a(\vec{p}_n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^3x_1\dots d^3x_n\sqrt{2\omega_1}\varphi^{(+)}(x_1)\dots\sqrt{2\omega_n}\varphi^{(+)}(x_n)|0\rangle\langle 0|\sqrt{2\omega_n}\varphi^{(-)}(x_n)\dots\sqrt{2\omega_1}\varphi^{(-)}(x_1) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^3x_1\dots d^3x_n\,\varphi^{(+)}(x_1)\dots\varphi^{(+)}(x_n)|0\rangle\overleftrightarrow{\partial}_{14}\overleftrightarrow{\partial}_{24}\dots\overleftrightarrow{\partial}_{n4}\langle 0|\varphi^{(-)}(x_n)\dots\varphi^{(-)}(x_1) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^3x_1\dots d^3x_n :\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n):|0\rangle\overleftrightarrow{\partial}_{14}\overleftrightarrow{\partial}_{24}\dots\overleftrightarrow{\partial}_{n4}\langle 0|:\varphi(x_n)\dots\varphi(x_1): =$$

$$= \int |\varphi'\rangle\,\delta^2\varphi'\langle\varphi'|\,,\quad \left(\delta^2\varphi' = \delta\varphi'\delta\dot{\varphi}' = \delta f_1(\vec{x})\delta f_2(\vec{x}),\ \ \omega = \sqrt{-\Delta+m^2}\right) \qquad (A.I)$$

запишем разложение когерентного состояния по фоковским состояниям:

$$|\varphi'\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^3p_1\dots d^3p_n\, a^+(\vec{p}_1)\dots a^+(\vec{p}_n)|0\rangle\langle 0|a(\vec{p}_1)\dots a(\vec{p}_n)|\varphi'\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^3x_1\dots d^3x_n :\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n):|0\rangle\overleftrightarrow{\partial}_{14}\dots\overleftrightarrow{\partial}_{n4}\langle 0|:\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n):|\varphi'\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^3x_1\dots d^3x_n :\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n):|0\rangle\overleftrightarrow{\partial}_{14}\dots\overleftrightarrow{\partial}_{n4}\varphi'^{(-)}(x_1)\dots\varphi'^{(-)}(x_n)\langle 0|\varphi'\rangle,$$

и обратное разложение: (A.2)

$$:\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n):|0\rangle = \int |\varphi'\rangle\delta^2\varphi'\langle\varphi'|:\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n):|0\rangle =$$

$$= \int |\varphi'\rangle\delta^2\varphi'\langle\varphi'|0\rangle\,\varphi'^{(+)}(x_1)\dots\varphi'^{(+)}(x_n)\ . \qquad (A.3)$$

С помощью формулы (I2) недиагональный матричный элемент произвольно го оператора А выражается через диагональные следующим образом:

$$\langle\varphi_2'|A|\varphi_1'\rangle = \langle\varphi_2'|\varphi_1'\rangle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int d^3x_1\dots d^3x_n\,\varphi_{21}'(x_1)\dots\varphi_{21}'(x_n)\overleftrightarrow{\partial}_{14}\dots\overleftrightarrow{\partial}_{n4}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\dots\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\langle\varphi'|A|\varphi'\rangle_{J=0}.$$

(A.4)

Далее, для случая взаимодействия с внешним током добавим формулу

$$\langle:\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n):\rangle = \left[\varphi'(x_1)+\int d^4y_1\Delta_{ret}(x_1-y_1)j(y_1)\right]\dots\left[\varphi'(x_n)+\int d^4y_n\Delta_{ret}(x_n-y_n)j(y_n)\right], \qquad (A.5)$$

где N -упорядочивание относится к операторам $\varphi(x)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Обычно в релятивистском случае обходят вопрос о происхождении нормы в формализме первичного квантования и оператора числа квантов в формализме вторичного квантования. Особенно загадочно возникают эти величинны в простейшем случае нейтрального скалярного поля, поскольку для него обычная "клейн-гордоновская" норма равна нулю. В то же время Паули в /3/ исключает возможность использования для этой цели энергии

$$P_0 = \int d^3x\, T_{00}(x) = \frac{1}{2}\int d^3x \left(m^2\varphi\varphi + \partial_k\varphi\,\partial_k\varphi - \partial_4\varphi\,\partial_4\varphi\right). \qquad (Б.I)$$

Вопреки сказанному у Паули для получения нормы нужно обратиться именно к выражению (Б.I), но заменить там φ на $\frac{1}{\sqrt{\omega}}\varphi$ $\left(\omega=\sqrt{-\Delta+m^2}\right)$. Использование в (Б.I) вместо φ любого другого решения уравнения ШФКГ не нарушает свойства сохранения (хоть и видоизменяет "плотность" $T_{00}(x)$ и "ток" $T_{0k}(x)$, входящие в уравнение неразрывности). Таким образом, отправляясь от выражения для энергии, приходим к "энергетической" норме[x)]

$$N = \frac{1}{2}\int d^3x :\left(\frac{m}{\sqrt{\omega}}\varphi\,\frac{m}{\sqrt{\omega}}\varphi + \frac{\partial_k}{\sqrt{\omega}}\varphi\,\frac{\partial_k}{\sqrt{\omega}}\varphi - \frac{\partial_4}{\sqrt{\omega}}\varphi\,\frac{\partial_4}{\sqrt{\omega}}\varphi\right): = \qquad (Б.2.а)$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3x :\left(\sqrt{\omega}\,\varphi\,\sqrt{\omega}\,\varphi - \frac{\partial_4}{\sqrt{\omega}}\varphi\,\frac{\partial_4}{\sqrt{\omega}}\varphi\right): = \qquad (Б.2.б)$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3x :\left(\varphi\,\omega\,\varphi - \partial_4\varphi\,\frac{\partial_4}{\omega}\varphi\right): = \qquad (Б.2.в)$$

$$= \int d^3x \left(\frac{m}{\sqrt{\omega}}\varphi^{(+)}\,\frac{m}{\sqrt{\omega}}\varphi^{(-)} + \frac{\partial_k}{\sqrt{\omega}}\varphi^{(+)}\,\frac{\partial_k}{\sqrt{\omega}}\varphi^{(-)} - \frac{\partial_4}{\sqrt{\omega}}\varphi^{(+)}\,\frac{\partial_4}{\sqrt{\omega}}\varphi^{(-)}\right) = \qquad (Б.2.г)$$

$$= \int d^3x \left(\partial_4\varphi^{(+)}\,\varphi^{(-)} - \varphi^{(+)}\,\partial_4\varphi^{(-)}\right) = \qquad (Б.2.д)$$

$$= \int d^3x\, \sqrt{2\omega}\,\varphi^{(+)}(x)\cdot\sqrt{2\omega}\,\varphi^{(-)}(x) \qquad (Б.2.е)$$

(двоеточия относятся к случаю обсуждаемого ниже оператора числа квантов). Из выражений (Б.2) видно, что норма N положительна и есть безразмерный скаляр. Таким образом, нормировочный множитель $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$

[x)] Неявно так и поступают, когда образуют оператор числа квантов $N=\int d^3p\, a^+(\vec{p})a(\vec{p})$, "извлекая" $a^+(\vec{p})a(\vec{p})$ из гамильтониана $P_0=\int d^3p\, p_0 a^+(\vec{p})a(\vec{p})$.

изменил обычную и тензорную размерности P_0 (которые беспокоили Паули).

Выражения (Б.2.г)-(Б.2.е) получены путем подстановки в (Б.2.а)-(Б.2.в), разбиения поля $\varphi=\varphi^{(-)}+\varphi^{(+)}$ на положительно- и отрицательночастотные части $\varphi^{(-)}$ и $\varphi^{(+)}$, определяемые уравнениями (Шредингера)

$$\partial_4\varphi^{(\mp)}(x) = \mp\,\omega\,\varphi^{(\mp)}(x) \qquad (Б.3)$$

(некоторые способы выделения $\varphi^{(\mp)}$ из φ приведены, например, в Приложении А к работе /I/). Выражение (Б.2.д) показывает, в каком смысле применима "клейн-гордоновская" норма: она должна составляться не из самого поля $\varphi(x)$, а из $\varphi^{(-)}(x)$ и $\varphi^{(+)}(x)$. Выражение (Б.2.е) есть, по сути дела, норма "шредингеровского" типа $\left(\int d^3x\, \psi^*(x)\psi(x)\right)$.

На первый взгляд кажется, что для заряженного поля, скажем, скалярного, дело обстоит проще, так как отлична от нуля обычная "клейн-гордоновская" норма. Однако такое поле описывает кванты с зарядами двух знаков, и она дает только разность соответствующих норм :

$$\frac{Q}{e} = N_+ - N_- \,. \qquad (Б.4)$$

Если же, как и выше, обратиться к "энергетической" норме, не различающей знак заряда, то найдем сумму

$$N = N_+ + N_- \,. \qquad (Б.5)$$

Комбинируя (Б.4) и (Б.5), получим нормы N_+ и N_- (вида (Б.2.г)-(Б.2.е)) в отдельности.

Для любых других полей, например для спинорного поля Дирака, нужно поступать аналогично.

После вторичного квантования величина N (Б.2) превращается в оператор числа квантов, и все сказанное переносится и на него.

Зная оператор числа квантов, мы можем снова легко найти нормы и скалярные произведения для любых с-числовых состояний, одноквантовых или многоквантовых. В частности, для скалярного произведения одноквантовых состояний можно найти

$$\langle 2|1\rangle = \int d^3x \left(\frac{m}{\sqrt{\omega}} \varphi_2^{(+)} \frac{m}{\sqrt{\omega}} \varphi_1^{(-)} - \frac{\partial_k}{\sqrt{\omega}} \varphi_2^{(+)} \frac{\partial_k}{\sqrt{\omega}} \varphi_1^{(-)} - \frac{\partial_4}{\sqrt{\omega}} \varphi_2^{(+)} \frac{\partial_4}{\sqrt{\omega}} \varphi_1^{(-)} \right) = \qquad (Б.6.а)$$

$$= \int d^3x \left(\partial_4 \varphi_2^{(+)}(x)\, \varphi_1^{(-)}(x) - \varphi_2^{(+)}(x)\, \partial_4 \varphi_1^{(-)}(x) \right) = \qquad (Б.6.б)$$

$$= \int d^3x \, \sqrt{2\omega}\, \varphi_2^{(+)}(x) \sqrt{2\omega}\, \varphi_1^{(-)}(x) \, . \qquad (Б.6.в)$$

"Энергетическое" и "клейн-гордоновское" скалярные произведения для вещественных функций выражаются через него следующим образом:

$$\frac{1}{2} \int d^3x \left(\frac{m}{\sqrt{\omega}} \varphi_2 \frac{m}{\sqrt{\omega}} \varphi_1 + \frac{\partial_k}{\sqrt{\omega}} \varphi_2 \frac{\partial_k}{\sqrt{\omega}} \varphi_1 - \frac{\partial_4}{\sqrt{\omega}} \varphi_2 \frac{\partial_4}{\sqrt{\omega}} \varphi_1 \right) = \frac{1}{2} \left(\langle 2|1\rangle + \langle 1|2\rangle \right) = \mathrm{Re} \langle 2|1\rangle \qquad (Б.7)$$

$$\int d^3x \left(\partial_4 \varphi_2 \varphi_1 - \varphi_2 \partial_4 \varphi_1 \right) = \langle 2|1\rangle - \langle 1|2\rangle = 2i\, \mathrm{Im} \langle 2|1\rangle \, . \qquad (Б.8)$$

С помощью этих формул можно переписать $\langle 2|1\rangle$ в терминах вещественных функций:

$$\langle 2|1\rangle = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\partial_4 \varphi_2 \varphi_1 - \varphi_2 \partial_4 \varphi_1 + \frac{m}{\sqrt{\omega}} \varphi_2 \frac{m}{\sqrt{\omega}} \varphi_1 + \frac{\partial_k}{\sqrt{\omega}} \varphi_2 \frac{\partial_k}{\sqrt{\omega}} \varphi_1 - \frac{\partial_4}{\sqrt{\omega}} \varphi_2 \frac{\partial_4}{\sqrt{\omega}} \varphi_1 \right) . \qquad (Б.9)$$

Отметим, что все плотности в (Б.2), а также соответствующие им плотности токов в отличие от настоящих плотностей энергии и импульса T_{00} и T_{0k} являются нелокальными. Следовательно, эволюция этих величин во времени заведомо апричинная. Плотность в (Б.2.д) в отличие от остальных имеет определенную тензорную размерность (4- ая компонента вектора $\partial_\mu \varphi^{(+)} \varphi^{(-)} - \varphi^{(+)} \partial_\mu \varphi^{(-)}$), но не определена положительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. И.В.Полубаринов. Сообщения ОИЯИ, Р2-7896, Дубна, 1974.
2. P.Carruthers, M.Nieto. Rev.Mod.Phys., 40, 411 (1968).
3. В.Паули. Общие принципы волновой механики, ГИТТЛ, М.-Л., 1947, стр. 236-237.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 ноября 1974 г.