СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

10/II-75

Р2 - 8360

В.Н.Стрельцов

О ПРИБЛИЖЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЛОРЕНЦА ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Р2 - 8360

В.Н.Стрельцов

О ПРИБЛИЖЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЛОРЕНЦА ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

S u m m a r y

Time-like transformations of the first $((c^{-2})^{\circ})$ (Galilean transformations) and second (c^{-2}) orders are considered. It is emphasized that in the first approximation the formula for energy takes the form $E = mc^2$. Only in this case in a first approximation the relativistic formula for probability density can be reduced to $\rho = |\psi|^2$ whereas in the second approximation the relativistic expression should be used.

It is shown that it is possible to get the known transformation formulae for probability density $(\rho' = \rho)$ and position operator $(X' = X)$ only based on space-like transformations of the first order. Criticism of ordinary procedure of obtaining the last formula by means of instantaneous Galilean transformations is given. A particular role of space-like transformations of the second order is indicated when the questions on invariant non-relativistic equations of physics are under consideration.

Attention is again given to incorrection of the usual proof of invariance of the Schrödinger equation relatively Galilean transformations.

ГЛАВА 1. ГАЛИЛЕЕВО ПРИБЛИЖЕНИЕ /ПРИБЛИЖЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА ПЕРВОГО ПОРЯДКА $(c^{-2})^{\circ}$ /

§1. Преобразования Галилея /приближенные времениподобные преобразования Лоренца первого порядка/

1. Рассмотрим преобразования Галилея:

$$(x^1)' = x - vt, \quad (x^{2,3})' = x^{2,3}, \quad t' = t. \qquad /1/$$

Введем далее, как обычно, 4-вектор импульса-энергии

$$p^i = m\frac{dx^i}{ds}, \qquad /2/$$

где $x^i = x^{\alpha} (\alpha = 1,2,3)$; $x^4 = t$ ($c = 1$) ; s - собственное время, а

$$p^{\alpha} = p^{\alpha}, \quad p^4 = E. \qquad /3/$$

В результате для формул преобразования импульса и энергии в галилеевом приближении, т.е. с точностью до членов порядка $(\beta^2)^{\circ}$, где $\beta = v$, согласно /1/ будем иметь

$$(p^1)' = p^1 - vE, \quad (p^{2,3})' = p^{2,3}, \quad E' = E. \qquad /4/$$

Здесь, может быть, следует специально подчеркнуть, что при преобразованиях Галилея время не преобразуется при переходе от одной системы отсчета к другой, т.е. фактически является скалярной величиной. Поэтому согласно /2/ и /3/ скалярами будут и величины p^4 и

Е. Но последнее означает, что в данном случае энергия Е должна выражаться только через скалярную величину m/которая не преобразуется при переходе к другой системе отсчета/, т.е. представлять собою энергию покоя. Именно на основании отмеченного факта первая из формул /4/ может быть приведена к известному виду

$$(p^1)' = p^1 - mv\,. \qquad /4a'/$$

Использование в галилеевом приближении формулы для энергии $E=m$ может быть подкреплено дополнительным аргументом. Только в этом случае релятивистское выражение для координат центра инерции $X^\alpha = \Sigma E x^\alpha / \Sigma E$ переходит в обычное классическое выражение $X^\alpha = \Sigma m x^\alpha / \Sigma m$.

Еще один довод в пользу указанной формулы /как результат рассмотрения вопроса о виде выражения для плотности вероятности в галилеевом приближении/ приводится ниже /§2/.

2. Если далее, как обычно, мы введем 4-импульс как 4-вектор с составляющими $\partial S/\partial x^i$, где S - скалярная функция действия, то, например, для формул преобразования p_1 и p_4 будем иметь

$$p_1' = p_1\,,\ p_4' = p_4 - vp_1\,, \qquad /5/$$

которые, очевидно, отличаются от требуемых выражений /4/.

Формулы /5/ могут быть, конечно, получены также непосредственно из релятивистских формул преобразования для импульса и энергии. Однако для этого необходимо будет сделать абсурдное для обычных физических объектов допущение, что $E < |p|$.

Если же, с другой стороны, мы обратимся к процедуре перехода от классического релятивистского уравнения Гамильтона-Якоби *

* В простейшем случае одного пространственного измерения.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + m^2 \qquad /6/$$

к нерелятивистскому * пределу, то придем к другому /физически разумному/ условию для компонент введенного выше вектора.

С этой целью извлечем квадратный корень из обеих частей /6/, а затем разложим правую часть в ряд по степеням $(\partial S/\partial x)/m$. Ограничиваясь членами второго порядка и переходя к $S_1 = S + mt$, получим **:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2. \qquad /II^{***}.7/$$

Существенным здесь является то, что мы воспользовались малостью величины $(\partial S/\partial x)/m$ или, поскольку $\partial S/\partial t \approx m$, условием

$$\left|\frac{\partial S}{\partial x}\right| \ll \left|\frac{\partial S}{\partial t}\right|. \qquad /8/$$

Как уже отмечалось ранее /см., например, [1,2] /, для того, чтобы вместо /5/ получить правильные формулы преобразования для импульса и энергии и, в частности, обеспечить выполнение условия /8/, мы с необходимостью должны опираться на пространственноподобные преобразования.

§2. Приближенные пространственноподобные преобразования Лоренца первого порядка

Названные в заглавии преобразования имеют вид:

$$x_1' = x_1\,,\quad x_{2,3}' = x_{2,3}\,,\quad x_4' = x_4 - vx_1 \qquad /9/$$

* Ниже термин "нерелятивистский" употребляется фактически в смысле "приближенный".

** Отметим, что нерелятивистское уравнение Гамильтона-Якоби первого порядка, т.е. в рассматриваемом приближении, будет иметь тривиальный вид $\partial S_1/\partial t = 0$ (7).

*** Формулы, являющиеся вторым приближением к встречающимся выше выражениям, мы будем просто снабжать цифрой II.

и совпадают, очевидно, с формулами преобразования для ковариантных составляющих 4-вектора /5/.

Если теперь мы введем 4-вектор импульса и энергии с компонентами $\partial S/\partial x_i$, то на основании /9/ можно легко убедиться в том, что его компоненты действительно будут преобразовываться по требуемым формулам /4/.

По аналогии с этим можно ввести также волновой 4-вектор с составляющими:

$$k^i = \frac{\partial n}{\partial x_i}, \qquad /10/$$

где n - скалярная величина.

Воспользовавшись далее соотношениями де Бройля и Эйнштейна-Планка,

$$p^{\alpha} = hk^{\alpha}, \quad -E = hk^4, \qquad /11/$$

и учитывая предыдущее значение, найдем, что определяемые формулами /11/ импульс и энергия будут также преобразовываться по требуемому закону /4/.

Таким образом, находит свое объяснение факт *, что длина волны λ_1, которая должна подчиняться преобразованиям /9/, действительно инвариантна в рассматриваемом приближении, тогда как импульс (p^1) преобразуется по формуле Галилея /4а'/.

Следует вместе с тем отметить, что в рамках данного подхода последовательным образом решаются вопросы, касающиеся формулы преобразования /и вида выражения/ для квантовомеханической плотности вероятности и формулы преобразования для оператора положения.

Действительно, чтобы обеспечить требуемую формулу преобразования для плотности вероятности в галилеевом приближении

$$\rho' = \rho \qquad /12/$$

/совпадающую, скажем, с формулой преобразования для плотности электрических зарядов/, где

$$\rho = \frac{ih}{2m}\left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right), \qquad /13/$$

мы с необходимостью должны опираться именно на выражения /9/.

С другой стороны, если мы воспользуемся далее известной подстановкой

$$\frac{h}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -E\psi, \qquad /14/$$

то получим, что

$$\rho = |\psi|^2 \frac{E}{m}, \qquad /15/$$

откуда с необходимостью следует, что известное выражение

$$\rho = |\psi|^2 \qquad /16/$$

можно получить из /15/ только принимая, что в галилеевом приближении энергия E представляет собою энергию покоя.

Что касается формулы преобразования для оператора координаты X, то на основании /9/ мы естественным образом получаем, что

$$X' = X. \qquad /17/$$

Вместе с тем обычный вывод формулы /17/ /см., например, /4/ / на основании "мгновенных" преобразований Галилея вряд ли можно признать правильным. Дело в том, что преобразования для координат /будь то преобразования Лоренца или их частный случай - преобразования Галилея/ фактически относятся к парам событий. При этом "мгновенные" преобразования Галилея должны описывать пару событий, для которых

$$\Delta x = x, \quad \Delta t = 0. \qquad /18/$$

---

* Указание на этот факт приписывается Ланде /3/. В этой связи см. также /4/.

Однако, как известно, переход от преобразований Лоренца к преобразованиям Галилея связан с выполнением условия

$$x << t . \qquad /19/$$

Поэтому введение "мгновенных" преобразований Галилея нельзя считать последовательным шагом.

§3. Группа приближенных пространственноподобных преобразований Лоренца первого порядка /ковариантная группа Галилея/

Поскольку рассмотренные выше преобразования /9/ играют определенную роль в нерелятивистской физике, и, в частности, в нерелятивистской квантовой механике, мы специально коснемся групповых свойств этих преобразований.

Полная 10-параметрическая неоднородная группа пространственноподобных преобразований первого порядка задается инфинитезимальными генераторами: пространственных трансляций P_α*, трансляции времени H, вращений J_α и чистых пространственноподобных преобразований K_α. Алгебра Ли группы будет при этом определяться следующими коммутационными соотношениями для генераторов **

$$[P_\alpha, P_\beta] = 0, \quad [P_\alpha, H] = 0, \quad [J_\alpha, H] = 0, \qquad /20\ а,б,в/$$

$$[J_\alpha, J_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma, \quad [J_\alpha, P_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} P_\gamma, \qquad /20\ г,д/$$

$$[J_\alpha, K_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} K_\gamma, \quad [K_\alpha, H] = 0, \qquad /20\ е,ж/$$

$$[K_\alpha, K_\beta] = 0, \quad [K_\alpha, P_\beta] = i\delta_{\alpha\beta} H . \qquad /20\ и,к/$$

Здесь $\delta_{\alpha\beta}$ - символ Кронекера; $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ - трехиндексный символ Леви-Чевиты.

Отметим здесь, что хотя в правой части соотношения /20 к/ фактически фигурирует масса покоя, однако это не приводит к трудностям, подобным тем, которые возникают, когда в рассматриваемом приближении в формуле для энергии учитывают /впрочем, безосновательно/ член следующего порядка.

При этом, например, генератор чистых пространственноподобных преобразований /9/ имеет вид

$$K_\alpha = i x_\alpha \frac{\partial}{\partial t} . \qquad /21/$$

В случае же импульсно-энергетического представления K_α будет определяться следующим выражением:

$$K_\alpha = i m \frac{\partial}{\partial p_\alpha} . \qquad /22/$$

Опираясь далее на известную формулу Бейкера-Хаусдорфа

$$e^{-B} A e^{B} = A + [A, B] + \frac{1}{2!} [[A, B], B] + \ldots , \qquad /23/$$

в специальном случае $(B = -ivK_1)$ чистых преобразований /9/ для формул преобразования P_1, H и, например, компоненты K_2 вектора, описывающего движение центра инерции, будем иметь

$$P_1' = P_1 - iv[P_1, K_1] + \frac{(-iv)^2}{2!} [[P_1, K_1], K_1] + \ldots , \qquad /24а/$$

$$H' = H - iv[H, K_1] + \ldots , \qquad /24б/$$

$$K_2' = K_2 - iv[K_2, K_1] + \ldots , \qquad /24в/$$

---

* В этом параграфе и в п. 1 §5 мы будем пользоваться только нижними индексами.

** В этой связи см. также /5/.

откуда с учетом /20к/, /20ж/ и /20и/ заключаем, что P_1 и H действительно преобразуются по формулам /4/, а формула преобразования для K_2 имеет вид

$$K_2' = K_2 \, . \qquad /24в'/$$

Вместе с тем выполнение формулы преобразования /17/ для оператора координаты обеспечивается выполнением равенства

$$[X, K_1] = 0. \qquad /25/$$

Однако, как уже отмечалось ранее /см., например, [2,6] /, обычно используемые нерелятивистские уравнения, будь то уравнение Гамильтониана-Якоби /II .7/ или уравнение Шредингера, являются фактически приближенными уравнениями второго порядка, поскольку переход к ним /от соответствующих релятивистских уравнений/ предполагает учет наряду с максимальными членами также малых членов порядка β^2 /по отношению к максимальным слагаемым/ *. Именно поэтому при изучении вопросов инвариантности указанных нерелятивистских уравнений мы должны опираться на формулы преобразования для координат, в которых также учитываются члены порядка β^2 .

ГЛАВА 2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА ВТОРОГО ПОРЯДКА (c^{-2})

§4. Времениподобные преобразования

1. Времениподобные преобразования второго порядка являются расширением преобразований Галилея /1/

* При этом отбрасываются члены порядка β^4 и выше.

в результате учета членов порядка β^2 *. Они имеют вид

$$(x^1)' = (x^1 - vt)\gamma_1 \, , \quad (x^{2,3})' = x^{2,3}, t' = t\gamma_1 - vx^1 \, , \qquad /II .1/$$

где $\gamma_1 = 1 + \frac{1}{2} v^2$.

На основании / II .1/ и с учетом /2/ и /3/ для формул преобразования импульса и энергии в рассматриваемом приближении будем иметь:

$$(p^1)' = (p^1 - vE)\gamma_1 \, , (p^{2,3})' = p^{2,3}, E' = E\gamma_1 - vp^1 \, . \qquad /II .4/$$

2. Если теперь в рамках данного приближения мы перейдем к кругу вопросов, затронутых в п.2 §1 и в §2, то мы должны будем снова обратиться к пространственноподобным преобразованиям. При этом подчеркнем снова, что именно пространственноподобные преобразования второго порядка должны служить основой при рассмотрении вопросов инвариантности нерелятивистского уравнения Гамильтона-Якоби и уравнения Шредингера.

§5. Пространственноподобные преобразования второго порядка

1. Данные преобразования представляют собою соответствующее расширение преобразований /9/ в результате учета членов порядка β^2 и имеют вид

$$x_1' = x_1\gamma_1 - vt, \; x_{2,3}' = x_{2,3} \, , \; x_4' = (x_4 - vx_1)\gamma_1 \, . \qquad /II . 9/$$

С целью установления коммутационных соотношений

* Отметим, что в свое время указанные преобразования рассматривались рядом авторов /см., например, [7] /.

для инфинитезимальных генераторов чистых пространственноподобных преобразований второго порядка /II. 9/ будем опираться на разложение Бейкера-Хаусдорфа /23/. При этом для величин P_l, H и K_2 в рассматриваемом приближении будем иметь

$$P_l' = \underline{P_l} - i\alpha[P_l, K_l] + \frac{(-i\alpha)^2}{2!}[[P_l, K_l], K_l] + \frac{(-i\alpha)^3}{3!}[[[P_l, K_l], K_l], K_l] + O(c^{-4}), \qquad /II.24а/$$

$$H' = \underline{H} - i\alpha[H, K_l] + \frac{(-i\alpha)^2}{2!}[[H, K_l], K_l] + O(c^{-4}), \qquad /II.24б/$$

$$K_2' = \underline{K_2} - i\alpha[K_2, K_l] + \frac{(-i\alpha)^2}{2!}[[K_2, K_l], K_l] + O(c^{-4}), \qquad /II.24в/$$

где в данном приближении $\alpha = v(1 + \frac{1}{3}v^2)$, $\alpha^2 = v^2$,

$$\alpha^3 = v^3,$$

а подчеркнутые члены суть члены первого порядка, соответствующие галилеевскому приближению.

Сравнение равенств /II. 24/ с формулами преобразования /II.4/, а кроме того, например, с формулой преобразования для величины K_2 в рассматриваемом приближении

$$K_2' = K_2\gamma_1 - vJ_3 \qquad /II.23в/$$

приводит /с учетом /20к// к следующим перестановочным соотношениям:

$$[H, K_\alpha] = -iP_\alpha, \quad [K_\alpha, K_\beta] = -i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma. \qquad /II.20ж,и/$$

Откуда заключаем, что коммутационные соотношения для генераторов пространственноподобных преобразований второго порядка полностью совпадают с коммутационными соотношениями для генераторов группы Пуанкаре. При этом генератор K_α должен, очевидно, иметь вид:

$$K_\alpha = it\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + ix_\alpha\frac{\partial}{\partial t}. \qquad /II.21/$$

2. Коснемся теперь некоторых вопросов, связанных с применением преобразований /II.9/ к нерелятивистским уравнениям физики.

Как было показано ранее [2], обычное нерелятивистское уравнение Гамильтона-Якоби /II.7/ как в свободном случае, так и при наличии электромагнитного поля инвариантно относительно указанных преобразований. В то же время применение преобразований /II.9/ к уравнению Шредингера приводит к определенным трудностям*. Мы не будем сейчас касаться этих трудностей, а обратим внимание на следующее.

Вслед за автором пространственноподобные преобразования второго порядка /II.9/ применил к уравнению Шредингера /с учетом массового члена/:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = m\psi - \frac{1}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad (h = 1), \qquad /26/$$

Гайда [8]**. При этом им было показано, что /якобы вопреки результатам работы [6] / уравнение /26/ инва-

---

* В этой связи см., в частности [6], где, однако, при рассмотрении условия инвариантности указанного уравнения следует опираться не на выражение /23/, а на равенство

$$\frac{\beta^2}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial t'} = \beta\frac{\partial\Phi}{\partial x'} \quad (\Phi = \psi - \frac{ih}{m}\frac{\partial\psi}{\partial t'}),$$

являющееся непосредственным следствием перехода к другой системе отсчета.

** Действительно, например, использованная им формула преобразования /22/ для $\partial/\partial t$ опирается на равенство $\partial x_1'/\partial t = -v$, которое, как легко видеть, является непосредственным следствием первой формулы /II. 9/. С учетом сказанного становится неясным утверждение автора [8] /стр. 3/ относительно решения этой проблемы "с других позиций".

риантно относительно преобразований / II.9/ при условии, что

$$i \frac{\partial\psi}{\partial t'} = m\psi . \qquad /27/$$

Следует, однако, отметить, что указанное условие,и притом в самом общем виде,

$$\psi = \psi_1(x)\exp[-\phi(x)t] \qquad /28/$$

было в свое время сформулировано автором данной работы [9] и затем упомянуто в [6]. А коль скоро рассмотрение Гайды не выходит за рамки частного случая, определяемого равенством /27/, то сделанный им последующий вывод [8] /стр. 9/ относительно результатов, полученных в рамках общего подхода [6], нельзя считать обоснованным *.

3. Что касается формулы преобразования для плотности вероятности, то в рассматриваемом приближении она имеет вид ** :

$$\rho' = \rho\gamma_1 - vj^1 . \qquad /II.12/$$

Поскольку в данном случае $E=m+p^2/2m$, рассмотренный выше переход к известному выражению /16/

---

* Вообще использование условий, подобных /27/, требует известной осторожности, поскольку в рамках /27/ левая часть /26/ может быть, например, представлена в форме $-i(\psi\partial^2\psi/\partial t^2)^{1/2}$. Впрочем, именно последнее выражение является непосредственным результатом перехода от уравнения Клейна-Гордона к нерелятивистскому пределу [6].

** Коль скоро мы принимаем, что ρ является компонентой времениподобного вектора /а физические соображения, по-видимому, говорят в пользу этого/, то для устранения отмеченной в [10] непоследовательности мы должны допустить тогда, что $\partial\rho/\partial t = \partial j^1/\partial x = 0$.

уже невозможен, и поэтому мы с необходимостью должны пользоваться в этом приближении релятивистским выражением /13/ для плотности вероятности *.

4. В связи с критическими замечаниями, высказанными недавно Леви-Леблоном [4] относительно некоторых результатов автора, в заключение мы коснемся известной проблемы инвариантности уравнения Шредингера относительно преобразований Галилея.

Центральное утверждение, на котором, в частности, основана упомянутая критика, заключается в том, что формула преобразования для волновой функции /подчиняющейся обычному уравнению Шредингера/

$$\psi_{Ш}(x',t') = \psi_{Ш}(x,t) \qquad /29/$$

неправильна.

С таким утверждением на первый взгляд , казалось бы, можно согласиться, поскольку при переходе от уравнения в форме /16/ к обычному уравнению Шредингера необходимо провести известное преобразование

$$\psi = \psi_{Ш}\exp(-imt), \qquad /30/$$

на основании чего формула /29/ должна быть заменена выражением

$$\psi_{Ш}(x',t') = \exp(if)\psi_{Ш}(x,t),$$

где $f = im(t'-t)$.

Однако, как следует из формулы преобразования Галилея для времени, $f=0$. Иными словами, это означает, что поскольку при преобразованиях Галилея время фактически ведет себя,как скаляр, то полученная в результате преобразования /30/ функция $\psi_{Ш}$ /как ψ / является скалярной величиной, а поэтому приведенное выше ут-

---

* Но коль скоро это так, то нам не избежать трудностей при выводе уравнения непрерывности на основе обычного уравнения Шредингера.

верждение относительно равенства /29/ нельзя признать правильным.

Вообще, галилей-инвариантность содержится как частный случай в требовании лоренц-инвариантности. А как известно, в релятивистском случае преобразования волновая функция бесспиновой частицы /будучи скаляром/ никакой дополнительной фазы не приобретает. Поэтому никакой дополнительной фазы у нее не должно возникать и в случае галилеева приближения, что,в частности, подтверждается корректным рассмотрением преобразования волновой функции плоской волны /6/.

Литература

1. *В.Н.Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-7068, Дубна, 1973.*
2. *В.Н.Стрельцов. Сообщения ОИЯИ а/ Р2-5131, Дубна, 1970; б/ Р2-5373, Дубна, 1970. См. также: В.Н.Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-4461, Дубна, 1969.*
3. *M.Bunge. Phylosophy of Physics, D.Reidel PC, Dorbrecht-Boston, 1973, Chap. 6.*
4. *J.-M.Lévy-Leblond. Rivista Nuovo Cim., 4, 88 (1974).*
5. *J.-M.Lévy-Leblond. Ann.Inst . Henri Poincaré, 3, 1 (1965).*
6. *В.Н.Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-5823, Дубна, 1971.*
7. *И.Г.Фихтенгольц. ЖЭТФ, 20, 233 /1950/;*
   В.А.Фок. Теория пространства, времени и тяготения, ГИТТЛ, М., 1955,§26;
   S.Chandrasekhar, G.Contopoulos. Proc. Roy. Soc., A298, 123 (1967).
8. *Р.П.Гайда. Препринт ИТФ-73-159Р, Киев, 1973.*
9. *В.Н.Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-4462, Дубна, 1969.*
10. *В.Н.Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-6208, Дубна, 1971.*

Рукопись поступила в издательский отдел
1 ноября 1974 года.