ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 8340

Г.В.Ефимов

К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ УНИТАРНОСТИ S -МАТРИЦЫ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 8340

Г.В.Ефимов

К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ УНИТАРНОСТИ S -МАТРИЦЫ

Направлено в ТМФ

1. Введение

В настоящее время можно считать, что проблема доказательства унитарности S-матрицы в теории возмущений в квантовой теории поля решена /см.[1-4], хотя это далеко не полный перечень литературы, посвященной данной проблеме/. Кроме того, сейчас можно быть уверенным, что фактически для любого лагранжиана взаимодействия существуют способы построения S-матрицы, унитарной в каждом порядке теории возмущений. Мы не касаемся важного вопроса об однозначности таких способов и анализа возможного произвола при реальном построении амплитуд физических процессов.

Цель настоящей работы - дать еще одно доказательство унитарности S-матрицы. Причины, побуждающие к такого рода деятельности, состоят в следующем. Во-первых, условие унитарности является одним из основных требований, без выполнения которого теория не может считаться физически приемлемой. Во-вторых, желательно иметь наиболее прозрачную схему доказательства, в которой наиболее отчетливо прослеживается механизм, обеспечивающий выполнение унитарности. В-третьих, при работе с разнообразнейшими лагранжианами, с которыми приходится иметь дело в современной квантовой теории поля, хотелось бы ясно представлять себе те достаточные условия, накладываемые на способ регуляризации и т.д., при выполнении которых можно быть уверенным, что унитарность S-матрицы обеспечена.

Мы хотим воспользоваться функциональным методом, широко используемым для различных целей в квантовой теории поля /см., например, /1,5/ /, и показать, как известная связь между $\mathfrak{T}_c$ - и $\mathfrak{T}_{(-)}$-функциями

$$\mathfrak{T}_c(x) = \theta(x_0)\,\mathfrak{T}_{(-)}(x) + \theta(-x_0)\,\mathfrak{T}_{(+)}(x)$$

обеспечивает выполнение условия унитарности. Затем мы докажем очевидное утверждение, на которое, как нам кажется, ранее не было обращено должного внимания. Это утверждение состоит в том, что если в теории возмущений промежуточная регуляризация вводится только в пропагаторы виртуальных частиц и существует конечный предел при снятии регуляризации, то предельная S-матрица унитарна.

2. *Функциональные производные и S-матрица*

Математические операции в квантовой теории поля, связанные с приведением к нормальной форме произведений квантованных полей, заданных первоначально в виде обычного или T-произведения, полностью определяются теоремой Вика и носят чисто алгебраический характер. Это позволяет рассматривать S-матрицу и любые другие операторы как функционалы, когда полевые операторы типа $\phi_a(x)$ считаются произвольными скалярными функциями.

В этом разделе мы рассмотрим свойства таких функционалов. Для простоты будем рассматривать функционалы одной скалярной функции $\phi(x)$. Обобщение на случай большего числа функциональных переменных не представляет никаких принципиальных трудностей.

Мы будем рассматривать функционалы вида

$$B_{t_2 t_1}[\phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} dx_1 \dots \int_{t_1}^{t_2} dx_n\, B_n(x_1, \dots x_n)\, \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \quad /2.1/$$

Здесь для краткости введено обозначение

$$\int_{t_1}^{t_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} dx_0 \int d\vec{x}\ .$$

Будем считать, что функция $B_n(x_1, \dots x_n)$ полностью

симметрична относительно перестановки своих аргументов.

Предполагается, что этот функционал задан на некотором пространстве достаточно гладких основных функций, т.е. все интегралы в /2.1/ хорошо сходятся. Кроме того, определены вариационные производные любого порядка:

$$\frac{\delta^m}{\delta\phi(y_1) \dots \delta\phi(y_m)} \cdot B_{t_1 t_2}[\phi] = \prod_{j=1}^{m} \theta((t_2 - y_{j0})(y_{j0} - t_1)) \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} dx_1 \dots \int_{t_1}^{t_2} dx_n\, B_{n+m}(y_1, \dots, y_m, \dots x_1, \dots x_n)\, \phi(x_1) \dots \phi(x_n).$$

Зададим операцию умножения двух функционалов B и C следующим образом:

$$B_{t_4 t_3}[\phi] * C_{t_2 t_1}[\phi] =$$

$$= \exp\Big\{\iint dx_1\, dx_2\, \mathfrak{T}_{(-)}(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\phi_1(x_1)\, \delta\phi_2(x_2)}\Big\} B_{t_4 t_3}[\phi_1]\, C_{t_2 t_1}[\phi_2]\Big|_{\phi_1 = \phi_2 = \phi}.$$

Здесь $\mathfrak{T}_{(-)}(x_1 - x_2)$ - некоторая достаточно гладкая функция.

Для произведения трех функционалов имеем:

$$B_{t_6 t_5}[\phi] * C_{t_4 t_3}[\phi] * D_{t_2 t_1}[\phi] =$$

$$= \exp\Big\{\iint dx_1 dx_2\, \mathfrak{T}_{(-)}(x_1 - x_2)\Big[\frac{\delta^2}{\delta\phi_1(x_1)\, \delta\phi_2(x_2)} + \frac{\delta^2}{\delta\phi_1(x_1)\, \delta\phi_3(x_2)} +$$

$$+ \frac{\delta^2}{\delta\phi_2(x_1)\, \delta\phi_3(x_2)}\Big]\Big\} B_{t_6 t_5}[\phi_1]\, C_{t_4 t_3}[\phi_2]\, D_{t_2 t_1}[\phi_3]\Big|_{\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi}.$$

Таким образом, операция произведения ассоциативна, т.е.

$$B * C * D = [B * C] * D = B * [C * D],$$

но не коммутативна, т.е.

$$B * C \neq C * B,$$

поскольку, вообще говоря, $\mathfrak{D}_{(-)}(-x) \neq \mathfrak{D}_{(-)}(x)$.

Введем теперь функционал, соответствующий S-матрице. Определим

$$S_{t_2 t_1}[\phi] = T \exp\{ i \int_{t_1}^{t_2} dx\, g(x)\; U(\phi(x)) \}. \qquad /2.2/$$

Будем обозначать

$$S_{\infty,-\infty}[\phi] = S[\phi].$$

Операция T-произведения задается как

$$T = \exp\{ \frac{1}{2} \int\int dx_1 dx_2 \mathfrak{D}_c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\phi(x_1)\,\delta\phi(x_2)} \}.$$

Здесь $\mathfrak{D}_c(x_1 - x_2)$ - некоторая достаточно гладкая функция, удовлетворяющая

$$\mathfrak{D}_c(-x) = \mathfrak{D}_c(x).$$

Определим теперь "эрмитово сопряженную" S-матрицу следующим образом:

$$\overset{+}{S}_{t_2 t_1}[\phi] = T^+ \exp\{ -i \int dx\, g(x)\; U(\phi(x)) \},$$

где

$$T^+ = \exp\{ \frac{1}{2} \int\int dx_1 dx_2\, \mathfrak{D}_c^*(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\phi(x_1)\,\delta\phi(x_2)} \}.$$

Здесь $g(x)$ - функция "включения" взаимодействия. Это действительная достаточно гладкая функция, убывающая должным образом на бесконечности. Переход к $g(x) = g = \mathrm{const}$ будет рассмотрен нами ниже.

Предполагается, что для действительной функции $U(\phi(x))$ справедливо представление

$$U(\phi(x)) = \int d\sigma(\xi)\; e^{i\xi\phi(x)}, \qquad /2.3/$$

так что

$$\int [d\sigma(\xi)]^*\, e^{-i\xi^*\phi(x)} = \int d\sigma(\xi)\, e^{i\xi\phi(x)}.$$

Заметим, что обычно лагранжиан взаимодействия выбирается в нормально упорядоченной форме. Для того, чтобы учесть это обстоятельство при формальных функциональных преобразованиях, необходимо перейти от нормального к обычному произведению операторов. Это означает, что вместо /2.3/ мы должны рассматривать

$$U(\phi(x)) = \int d\sigma(\xi)\; e^{\frac{1}{2}\xi^2 \mathfrak{D}_c(0)}\; e^{i\xi\phi(x)}. \qquad /2.4/$$

Если же функция $\mathfrak{D}_c(x)$ выбрана таким образом, что $\mathfrak{D}_c(0) = 0$, то представление /2.4/ совпадает с /2.3/. Ниже мы подробно обсудим возможность выбора функции $\mathfrak{D}_c(x)$.

Будем предполагать, что функции $\mathfrak{D}_c(x)$ и $\mathfrak{D}_{(-)}(x)$ ограничены и непрерывны, причем

$$\mathfrak{D}_c(0) = \mathfrak{D}_{(-)}(0) = 0.$$

Кроме того, пусть справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_c(x) &= \theta(x_0)\, \mathfrak{D}_{(-)}(x) + \theta(-x_0)\, \mathfrak{D}_{(+)}(x), \\ \mathfrak{D}_c^*(x) &= \theta(x_0)\, \mathfrak{D}_{(+)}(x) + \theta(-x_0)\, \mathfrak{D}_{(-)}(x), \\ \mathfrak{D}_{(-)}(x) &= \theta(x_0)\, \mathfrak{D}_c(x) + \theta(-x_0)\, \mathfrak{D}_c^*(x), \\ \mathfrak{D}_{(+)}(x) &= \theta(x_0)\, \mathfrak{D}_c^*(x) + \theta(-x_0)\, \mathfrak{D}_c(x). \end{aligned} \qquad /2.5/$$

где

$$\mathfrak{D}_{(+)}(x) = \mathfrak{D}_{(-)}(-x) = \mathfrak{D}_{(-)}^*(x). \qquad /2.6/$$

3. *Свойства* $S_{t_2 t_1}[\phi]$ *-матрицы*

Покажем, что S-матрица /2.2/ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$(1)\quad S_{t_2 t_1}[\phi] * S_{t_1 t_0}[\phi] = S_{t_2 t_0}[\phi], \qquad /3.1/$$

$$\overset{+}{S}_{t_1 t_0}[\phi] * \overset{+}{S}_{t_2 t_1}[\phi] = \overset{+}{S}_{t_2 t_1}[\phi], \qquad /3.2/$$

$$(2)\quad T\{\Psi(\phi(x))\; S[\phi]\} = S_{\infty, x_0}[\phi] * \Psi(\phi(x)) * S_{x_0, -\infty}[\phi],$$

$$(3)\quad S_{t_2 t_1}[\phi] * \overset{+}{S}_{t_2 t_1}[\phi] = 1, \qquad /3.3/$$

$$(4)\quad \frac{\delta}{\delta\phi(x)}\left[\frac{\delta}{\delta\phi(y)} S[\phi] * \overset{+}{S}[\phi]\right] = 0 \qquad /3.4/$$

при $x_0 < y_0$.

Сразу же заметим, что свойство (4), так называемое условие причинности, является следствием первых трех. Действительно, пусть справедливы свойства (1) - (3), тогда имеем:

во-первых, используя /3.1/ и /3.2/,

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)} S[\phi] = i\, g(y)\; T\{U'(\phi(y))\; S[\phi]\} =$$

$$= i\, g(y)\; S_{\infty, y_0}[\phi] * U'(\phi(y)) * S_{y_0, \infty}[\phi],$$

во-вторых, используя /3.1/ и /3.3/,

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)} S[\phi] * S^{+}[\phi] =$$

$$= i g(y)\; S_{\infty, y_0}[\phi] * U'(\phi(y)) * S_{y_0, -\infty}[\phi] * \overset{+}{S}_{y_0, -\infty}[\phi] * \overset{+}{S}_{\infty, y_0}[\phi] =$$

$$= i\, g(y)\; S_{\infty, y_0}[\phi] * U'(\phi(y)) * \overset{+}{S}_{\infty, y_0}[\phi]. \qquad /3.5/$$

Легко видеть, что условие (4) выполнено, поскольку полученное выражение /3.5/ не зависит от поля $\phi(x)$ во времена $x_0 < y_0$.

Рассмотрим теперь соотношение (1). Согласно нашим определениям, имеем

$$S_{t_2 t_1}[\phi] * S_{t_1 t_0}[\phi] =$$

$$= \exp\Big\{\frac{1}{2}\iint dx_1\, dx_2 \Big[\mathfrak{D}_c(x_1 - x_2)\, \frac{\delta^2}{\delta\phi_1(x_1)\,\delta\phi_1(x_2)} +$$

$$+ 2\mathfrak{D}_{(-)}(x_1 - x_2)\, \frac{\delta^2}{\delta\phi_1(x_1)\,\delta\phi_2(x_2)} + \mathfrak{D}_c(x_1 - y_2)\, \frac{\delta^2}{\delta\phi_2(x_1)\,\delta\phi_2(x_2)}\Big]\Big\} \times$$

$$\times \exp\Big\{ i \int_{t_1}^{t_2} dx\, g(x)\; U(\phi_1(x)) + i \int_{t_0}^{t_1} dx\, g(x)\; U(\phi_2(x))\Big\}\Big|_{\phi_1 = \phi_2 = \phi}.$$

Поскольку областью определения функции $\phi_1(x)$ является интервал (t_1, t_2), а функции $\phi_2(x)$ - интервал (t_0, t_1), то, во-первых, можно положить $\phi_1(x) = \phi_2(x) = \phi(x)$ и, во-вторых, $\mathfrak{D}_{(-)}(x_1 - x_2) = \mathfrak{D}_c(x_1 - x_2)$ во втором слагаемом первой экспоненты, так как $x_{10} > x_{20}$ при $x_{10} \in (t_1, t_2)$, $x_{20} \in (t_0, t_1)$. Поэтому имеем:

$$S_{t_2 t_1}[\phi] * S_{t_1 t_0}[\phi] =$$

$$= \exp\Big\{\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dx_1 \int_{t_1}^{t_2} dx_2\, \mathfrak{D}_c(x_1 - x_2)\, \frac{\delta^2}{\delta\phi(x_1)\,\delta\phi(x_2)} +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} dx_1 \int_{t_0}^{t_1} dx_2\, \mathfrak{D}_c(x_1 - x_2)\, \frac{\delta^2}{\delta\phi(x_1)\,\delta\phi(x_2)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} dx_1 \int_{t_0}^{t_1} dx_2\, \mathfrak{D}_c(x_1 - x_2)\, \frac{\delta^2}{\delta\phi(x_1)\,\delta\phi(x_2)}\Big\} \times$$

$$\times \exp\{ i \int_{t_1}^{t_2} dx\, g(x)\, U(\phi(x)) + i \int_{t_0}^{t_1} dx\, g(x)\, U(\phi(x)) \} =$$

$$= \exp\{\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_2} dx_1 \int_{t_0}^{t_2} dx_2 \mathfrak{D}_c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\phi(x_1)\,\delta\phi(x_2)}\} \times$$

$$\times \exp\{ i \int_{t_0}^{t_2} dx\, g(x)\, U(\phi(x)) \} = S_{t_2 t_0}[\phi] .$$

Рассмотрим теперь

$$S^+_{t_2 t_0}[\phi] = \{ S_{t_2 t_1}[\phi] * S_{t_1 t_0}[\phi] \}^+ =$$

$$= \exp\{\frac{1}{2} \int\int dx_1 dx_2 [\mathfrak{D}^*_c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\phi_1(x_1)\,\delta\phi_1(x_2)} +$$

$$+ 2\mathfrak{D}^*_{(-)}(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\phi_1(x_1)\,\delta\phi_2(x_2)} +$$

$$+ \mathfrak{D}^*_c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\phi_2(x_1)\,\delta\phi_2(x_2)}]\} \times$$

$$\times \exp\{ -i \int_{t_1}^{t_2} dx\, g(x)\, U(\phi_1(x)) - i \int_{t_0}^{t_1} dx\, g(x)\, U(\phi_2(x)) \} \Big|_{\phi_1 = \phi_2 = \phi} =$$

$$= S^+_{t_1 t_0}[\phi] * S^+_{t_2 t_1}[\phi] ,$$

поскольку $\mathfrak{D}^*_{(-)}(x_1 - x_2) = \mathfrak{D}_{(-)}(x_2 - x_1)$ согласно /2.6/.

Соотношение (2) также легко получается после следующих преобразований:

$$T\{\Psi(\phi(y))\, S[\phi]\} =$$

$$= \exp\{\frac{1}{2} \int\int dx_1 dx_2 \mathfrak{D}_c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\phi(x_1)\,\delta\phi(x_2)}\} \Psi(\phi(y)) \times$$

$$\times \exp\{ i \int dx\, g(x)\, U(\phi(x)) \} =$$

$$= \exp\{\frac{1}{2} \int_{y_0}^{\infty} dx_1 \int_{y_0}^{\infty} dx_2 \mathfrak{D}_c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\phi(x_1)\,\delta\phi(x_2)} +$$

$$+ \int_{y_0}^{\infty} dx_1 \mathfrak{D}_c(x_1 - y) \frac{\delta^2}{\delta\phi(x_1)\,\delta\phi(y)} + \int_{-\infty}^{y_0} dx_2 \mathfrak{D}_c(y - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\phi(y)\,\delta\phi(x_2)} +$$

$$+ \int_{y_0}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{y_0} dx_2 \mathfrak{D}_c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\phi(x_1)\,\delta\phi(x_2)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{y_0} dx_1 \int_{-\infty}^{y_0} dx_2 \mathfrak{D}_c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\phi(x_1)\,\delta\phi(x_2)} \} \times$$

$$\times \Psi(\phi(y)) \exp\{ i \int_{y_0}^{\infty} dx\, g(x)\, U(\phi(x)) + i \int_{-\infty}^{y_0} dx\, g(x)\, U(\phi(x)) \} .$$

Во втором, третьем и четвертом слагаемых в первой экспоненте можно функции $\mathfrak{D}_c$ заменить на $\mathfrak{D}_{(-)}$, поскольку временной аргумент этих функций всегда положительный. Обозначая теперь $\phi(x) = \phi_1(x)$ при $x \in (y_0, \infty)$ и $\phi(x) = \phi_2(x)$ при $x_0 \in (-\infty, y_0)$, получим соотношение /2/.

Обратимся теперь к соотношению /3/. Имеем

$$S_{t_2 t_1}[\phi] * S^+_{t_2 t_1}[\phi] =$$

$$= \exp\{\frac{1}{2} \int\int dx_1 dx_2 [\mathfrak{D}_c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\phi_1(x_1)\,\delta\phi_2(x_2)} +$$

$$+2\mathfrak{D}_{(-)}(x_1-x_2)\frac{\delta^2}{\delta\phi_1(x_1)\,\delta\phi_2(x_2)}+\mathfrak{D}_c^*(x_1-x_2)\frac{\delta^2}{\delta\phi_2(x_1)\,\delta\phi_2(x_2)}]\}\times$$

$$\times\exp\{i\int_{t_1}^{t_2}dx\,g(x)\,[\,U(\phi_1(x))-U(\phi_2(x))\,]\}.$$

Воспользуемся тождеством

$$e^{i\int_{t_1}^{t_2}d\tau f(\tau)}=1-\int_{t_2}^{t_2}dt\,\frac{d}{dt}\,e^{i\int_{t}^{t_2}d\tau f(\tau)}=1+i\int_{t_2}^{t_2}dt\,f(t)\,e^{i\int_{t}^{t_2}d\tau f(\tau)}$$

при

$$f(t)=\int d\vec{x}\,g(t,\vec{x})\,[\,U(\phi_1(t,\vec{x}))-U(\phi_2(t,\vec{x}))\,]$$

и представлением /2.3/. Получим

$$S_{t_2t_1}[\phi]*S^+_{t_2t_1}[\phi]=1+$$

$$+i\int_{t_1}^{t_2}dx\int d\sigma(\xi)\;T_1*_{12}T_2^+\,(e^{i\xi\phi_1(x)}-e^{i\xi\phi_2(x)})\times \qquad /3.6/$$

$$\times\exp\{i\int_{x_0}^{t_2}dx'g(x')[U(\phi_1(x'))-U(\phi_2(x'))]\}\Big|_{\phi_1=\phi_2=\phi}.$$

Здесь для краткости введены обозначения:

$$T_1=\exp\{\frac{1}{2}\int\int dx_1\,dx_2\,\mathfrak{D}_c(x_1-x_2)\frac{\delta^2}{\delta\phi_1(x_1)\;\delta\phi_1(x_2)}\},$$

$$T_2^+=\exp\{\frac{1}{2}\int\int dx_1\,dx_2\,\mathfrak{D}_c^*(x_1-x_2)\frac{\delta^2}{\delta\phi_2(x_1)\;\delta\phi_2(x_2)}\},$$

$$*_{12}=\exp\{\int\int dx_1\,dx_2\,\mathfrak{D}_{(-)}(x_1-x_2)\frac{\delta^2}{\delta\phi_1(x_1)\;\delta\phi_2(x_2)}\}.$$

Справедливы соотношения, которые легко могут быть получены:

$$T_1\,e^{i\xi\phi_1(x)}\,T_1^{-1}=e^{i\xi\phi_1(x)}\exp\{i\xi\int dx'\mathfrak{D}_c(x-x')\frac{\delta}{\delta\phi_1(x')}\},$$

$$T_2^+\,e^{i\xi\phi_2(x)}\,(T_2^+)^{-1}=e^{i\xi\phi_2(x)}\exp\{i\xi\int dx'\mathfrak{D}_c^*(x-x')\frac{\delta}{\delta\phi_2(x')}\},$$

$$*_{12}\,e^{i\xi\phi_1(x)}\,*_{12}^{-1}=e^{i\xi\phi_2(x)}\exp\{i\xi\int dx'\,\mathfrak{D}_{(-)}(x-x')\frac{\delta}{\delta\phi_2(x')}\},$$

$$*_{12}\,e^{i\xi\phi_2(x)}\,*_{12}^{-1}=e^{i\xi\phi_2(x)}\exp\{i\xi\int dx'\,\mathfrak{D}_{(+)}(x-x')\frac{\delta}{\delta\phi_1(x')}\},$$

$$T_1\,e^{i\xi\phi_2(x)}\,T_1^{-1}=e^{i\xi\phi_2(x)}\;;\quad T_2^+\,e^{i\xi\phi_1(x)}\,(T_2^+)^{-1}=e^{i\xi\phi_1(x)}.$$

С помощью этих соотношений формулу /3.6/ можно записать в виде

$$S_{t_2t_1}[\phi]*S^+_{t_2t_1}[\phi]=1+$$

$$+i\int_{t_1}^{t_2}dx\int d\sigma(\xi)\,\Big[e^{i\xi\phi_1(x)}\exp\{i\xi\int dx'[\mathfrak{D}_c(x-x')\frac{\delta}{\delta\phi_1(x')}+ \qquad /3.7/$$

$$+\mathfrak{D}_{(-)}(x-x')\frac{\delta}{\delta\phi_2(x')}]\}-$$

$$- e^{i\xi\phi_2(x)} \exp\{i\xi\int dx'[\, \mathfrak{D}_{(+)}(x-x') \frac{\delta}{\delta\phi_1(x')} +$$

$$+\mathfrak{D}_c^*(x-x.) \frac{\delta}{\delta\phi_2(x')} \Big]\Big] \quad S_{t_2 x_0}[\phi_1] * S^+_{t_2 x_0}[\phi_2] |_{\phi_1=\phi_2=\phi}.$$

Заметим теперь, что аргумент $x - x' < 0$ у всех функций $\mathfrak{D}_c$, $\mathfrak{D}_c^*$, $\mathfrak{D}_{(-)}$ и $\mathfrak{D}_{(+)}$ в больших квадратных скобках, поскольку x_0' принадлежит интервалу (x_0, t_2). Поэтому, согласно /2.5/, имеем

$$\mathfrak{D}_{(-)}(x - x') = \mathfrak{D}_c^*(x - x'),$$

$$\mathfrak{D}_{(+)}(x - x') = \mathfrak{D}_c(x - x').$$

Получим для /3.7/:

$$S_{t_2 t_1}[\phi] * \overset{+}{S}_{t_2 t_1}[\phi] = 1 +$$

$$+ i\int_{t_1}^{t_2} dx \int d\sigma(\xi) \Big[\Big[e^{i\xi\phi_1(x)} - e^{i\xi\phi_2(x)} \Big]\Big] \times$$

$$\times \exp\{i\xi\int dx'[\, \mathfrak{D}_c(x-x') \frac{\delta}{\delta\phi_1(x')} +$$

$$+\mathfrak{D}_c^*(x-x') \frac{\delta}{\delta\phi_2(x')}]\} \times$$

$$\times S_{t_2 x_0}[\phi_1] * \overset{+}{S}_{t_2 x_0}[\phi_2] |_{\phi_1=\phi_2=\phi}.$$

В правой части в больших квадратных скобках можно положить $\phi_1 = \phi_2 = \phi$, поскольку все операторы, зависящие от вариационных производных, стоят правее этой скобки. Поэтому все выражение равно нулю и окончательно имеем

$$S_{t_2 t_1}[\phi] * S^+_{t_2 t_1}[\phi] = 1. \qquad /3.8/$$

4. Регуляризация в квантовой теории поля

Рассмотрим теперь, как применить полученный результат к реальной квантовой теории поля, где, как известно, причинные и $\mathfrak{D}_{(-)}$ -функции имеют довольно сильные особенности при $x^2 \to 0$. Так, причинная функция скалярного поля $\phi(x)$ ведет себя как

$$\Delta_c(m^2, x^2) = \frac{1}{(2\pi)^4\, i} \int \frac{d^4k\, e^{-ikx}}{m^2 - k^2 - i\epsilon} \approx \frac{1}{x^2}. \qquad /4.1/$$

при $x^2 \to 0$.

Эти особенности являются причиной возникновения ультрафиолетовых расходимостей в ряду теории возмущений. Другими словами, определение S -матрицы как

$$S = T\exp\{i\int dx g(x)\, U(\phi(x))\} =$$

$$= \exp\{\frac{1}{2}\int\int dx_1 dx_2 \Delta_c(m^2, (x_1 - x_2)^2) \frac{\delta^2}{\delta\phi(x_1)\,\delta\phi(x_2)}\} \times \qquad /4.2/$$

$$\times \exp\{i\int dx g(x)\, U(\phi(x))\}$$

для реальной причинной функции /4.1/ математического смысла не имеет.

Для придания смысла выражению /4.2/ введем регуляризационную процедуру Паули-Вилларса с дополнительными условиями. Итак, вместо функции $\Delta_c(m^2, x^2)$ введем

$$\mathfrak{L}_c(x) = \sum_{j=0}^{2(N+1)} c_j\, \Delta_c(m^2\Lambda_j;\ x^2)\ , \qquad /4.3/$$

или в импульсном представлении:

$$\tilde{\mathfrak{L}}_c(p) = \sum_{j=0}^{2(N+1)} \frac{c_j}{m^2\Lambda_j - p^2 - i\epsilon}\ .$$

Здесь $c_0 = \Lambda_0 = 1$, а остальные коэффициенты c_j удовлетворяют следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{2(N+1)} c_j \Lambda_j^s = 0,\\ &\sum_{j=0}^{2(N+1)} c_j \Lambda_j^s \log\Lambda_j = 0 \end{aligned}\right\} \quad s = 0, 1, \dots, N\ .$$

Эти условия гарантируют, что

$$\mathfrak{L}_c(m^2, x) = O((x^2)^N \log(x^2)) \qquad (x^2 \to 0)$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{L}_c(m^2, 0) = 0\ ,$$

$$\Box^s \mathfrak{L}_c(m^2, x^2)|_{x=0} = 0, \qquad s = 1, \dots N-1\ .$$

Будем считать, что регуляризация задается параметром δ, так что предел $\delta \to 0$ означает снятие регуляризации. Например, можно выбрать

$$\Lambda_j(\delta) = \frac{1}{\delta} + \epsilon_j\ ,$$

где числа ϵ_j все различны и меньше единицы.

Точно таким же способом регуляризуем $\Delta_{(-)}(m^2, x)$ - функции

$$\mathfrak{L}_{(-)}(x) = \sum_{j=0}^{2(N+1)} c_j\, \Delta_{(-)}(m^2\Lambda_j;\ x)\ .$$

Таким образом, для функций $\mathfrak{L}_c(x)$, $\mathfrak{L}_c^*(x)$, $\mathfrak{L}_{(-)}(x)$ и $\mathfrak{L}_{(+)}(x)$ справедливы соотношения /2.5/ и, кроме того,

$$\partial^s \mathfrak{L}_c(x) = \theta(x_0)\,\partial^s \mathfrak{L}_{(-)}(x) + \theta(-x_0)\,\partial^s \mathfrak{L}_{(+)}(x)\ ,$$

$$\partial^s \mathfrak{L}_c^*(x) = \theta(x_0)\,\partial^s \mathfrak{L}_{(+)}(x) + \theta(-x_0)\,\partial^s \mathfrak{L}_{(-)}(x)\ ,$$

где $\partial^s = \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_s}$

для $s = 1, \dots, 2N-1$.

S-матрица, построенная при помощи причинных и $\mathfrak{L}_{(-)}$ - функций, регуляризованных этим способом, будет унитарной, т.е.
$$S^\delta *^\delta S^{\delta+} = 1$$
при $\delta > 0$.

5. Непрерывность по параметрам регуляризации

Покажем, что для выбранной нами регуляризации $\mathfrak{L}_{(-)}$ -функций справедливо следующее утверждение.

Пусть $K_2^\delta(x_1,\dots,x_n)$ и $K_2^\delta(y_1,\dots,y_m)$ являются трансляционно-инвариантными функциями и в слабом несобственном смысле

$$\lim_{\delta\to 0} K_1^\delta(x_1,\dots,x_n) = K_1(x_1,\dots,x_n)\ ,$$

$$\lim_{\delta\to 0} K_2^\delta(y_1,\dots,y_n) = K_2(y_1,\dots,y_m)\ ,$$

где $K_1(x_1,\dots,x_n)$ и $K_2(y_1,\dots,y_m)$ являются обобщенными функциями, заданными на некотором пространстве $\mathfrak{G}$ основных функций. Пусть, кроме того, аргументы $(x_1,\dots,x_n)$ и $(y_1,\dots,y_m)$ независимы. Тогда предел

$$\lim_{\delta_1\to 0}\ \lim_{\delta_2\to 0}\ \lim_{\delta_3\to 0} K_1^{\delta_1}(x_1,\dots,x_n)\prod_{s,t}\mathfrak{D}^{\delta_3}_{(-)}(x_s-y_t)\,K_2^{\delta_3}(y_1,\dots,y_m) =$$

$$= K_1(x_1,\dots,x_n)\prod_{s,t}\mathfrak{D}_{(-)}(x_s-y_t)\,K_2(y_1,\dots,y_m)$$

существует как обобщенная функция на $\mathfrak{A}$ и не зависит от способа перехода к пределу $\delta_j \to 0$ ($j = 1,2,3$) .

Доказательство фактически содержится в книге Боголюбова и Ширкова [1] и основано на том простом обстоятельстве, что из ограниченности суммы положительных величин вытекает ограниченность каждого отдельного слагаемого.

Действительно, рассмотрим функционал

$$B(\delta_1,\delta_2,\delta_3) = \int dx_1\dots\int dx_n\int dy_1\dots\int dy_m\, f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$$

$$\times K_1^{\delta_1}(x_1,\dots,x_n)\prod_{s,t}\mathfrak{D}^{\delta_2}_{(-)}(x_s-y_t)\,K_2^{\delta_3}(y_1,\dots,y_m)\ ,$$

где $f\in\mathfrak{A}$. Перейдем к импульсному пространству. Из трансляционной инвариантности функций $K_1^{\delta}(x_1,\dots,x_n)$ и $K_2^{\delta}(y_1,\dots,y_m)$ следует

$$\tilde K_1^{\delta}(p_1,\dots,p_n) = \int dx_1\dots\int dx_n\, e^{i(p_1x_1+\dots+p_nx_n)} K_1^{\delta}(x_1,\dots,x_n)$$

$$= \delta^{(4)}(p_1+\dots+p_n)\ \tilde{\mathcal{K}}_1^{\delta}(p_1,\dots,p_n)\ ,$$

где

$$\tilde{\mathcal{K}}_1^{\delta}(p_1,\dots,p_n) =$$

$$= n^4\int dx_1\dots\int dx_n\, e^{i(p_1x_1+\dots+p_nx_n)}\,\delta^{(4)}(x_1+\dots+x_n)\,K_1^{\delta}(x_1,\dots,x_n)\,.$$

Для функции $B(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ получим после несложных преобразований

$$B(\delta_1,\delta_2,\delta_3) = \int dp_1\dots\int dp_n\int dk_1\dots\int dk_m\,\tilde f(p_1,\dots,p_n,k_1,\dots,k_m)$$

$$\times\,\delta^{(4)}\Big(\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{i=1}^{m}k_i\Big)\,Q^{\delta_1\delta_2\delta_3}(p_1,\dots,p_n,k_1,\dots,k_m)\ .$$

Здесь

$$Q^{\delta_1\delta_2\delta_3}(p_1,\dots,p_n,k_1,\dots,k_m) =$$

$$=\Big\{\prod_{s,t}\int dq_{st}\Big\}\,\delta^{(4)}\Big(\sum_{j=1} p_j-\sum_{st}q_{st}\Big)\prod_{st}\tilde{\mathfrak{D}}^{\delta_2}_{(-)}(q_{st})\ \times \qquad /5.1/$$

$$\times\,\tilde{\mathcal{K}}_1^{\delta_1}\Big(\dots,p_j-\sum_t q_{jt},\dots\Big)\,\tilde{\mathcal{K}}_2^{\delta_3}\Big(\dots,k_i+\sum_s q_{si},\dots\Big)\ .$$

Так как $\tilde{\mathfrak{D}}^{\delta}_{(-)}(q)\approx\theta(q_0)\,\theta(q^2-m^2)$, интегрирование в /5.1/ проводится по конечной области. Следовательно, предел при $\delta_j\to 0$ ($j=1,2,3$) существует независимо по каждому параметру δ_j, поскольку каждая из функций $\mathcal{K}_1$, $\mathfrak{D}_{(-)}$ и $\mathcal{K}_2$ сходится к конечному пределу.

Таким образом, функция $B(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ непрерывна в точке $\delta_1=\delta_2=\delta_3=+0$ и

$$\lim_{\delta_1\to 0}\ \lim_{\delta_2\to 0}\ \lim_{\delta_3\to 0} B(\delta_1,\delta_2,\delta_3) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} B(\delta,\delta,\delta) = B(+0,+0,+0)\ .$$

6. Унитарность S *-матрицы в квантовой теории поля*

Справедливо следующее утверждение.

Пусть задан лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_I(x)$, допускающий представление /2.3/, и пусть регуляризованная S^δ-матрица строится при помощи обобщенной регуляризации Паули-Вилларса /4.2/. Тогда, если существует конечный предел при снятии регуляризации

$$\lim_{\delta\to 0} S^\delta = S, \qquad /6.1/$$

то предельная S-матрица унитарна

$$SS^+ = S^+S = 1 .$$

Действительно, пусть предел /6.1/ существует. Тогда справедлива цепочка равенств

$$SS^+ = \lim_{\delta_1\to 0}\ \lim_{\delta_2\to 0}\ \lim_{\delta_3\to 0} S^{\delta_1} *^{\delta_2} S^{\delta_3} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} S^\delta *^\delta S^{\delta+} = \lim_{\delta\to 0} 1 = 1 .$$

Здесь мы воспользовались результатом, полученным выше, что оператор $J(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = S^{\delta_1} *^{\delta_2} S^{\delta_3 +}$ непрерывен в точке $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = +0$, если существует предел /6.1/.

К каким теориям применим наш результат?

Это, во-первых, перенормируемые взаимодействия. В этом случае лагранжиану взаимодействия можно добавить ряд эрмитовых контрчленов:

$$\mathcal{L}_I(x) \Rightarrow \mathcal{L}_I(x) + \mathcal{Z}^\delta(\phi(x), \Box\phi(x), \ldots, \Box^N\phi(x))$$

/N-конечное число/, зависящих от параметра регуляризации δ, так что предел /6.1/ существует в каждом порядке теории возмущений. Следовательно, по доказанному выше, предельная S-матрица /6.1/ будет унитарной.

Во-вторых, теории с нелокальным взаимодействием, когда нелокальный формфактор является целой функцией и убывает в евклидовой области /4/. Регуляризация вводится таким образом, чтобы обеспечить переход к евклидовой метрике, где сходятся все интегралы, так что существует предел при снятии регуляризации. Значит, предельная S-матрица также будет унитарной.

В-третьих, перенормируемые и неперенормируемые взаимодействия, регуляризованные при помощи обобщенной регуляризации Паули-Вилларса с дополнительными условиями-регуляризации Д.А.Славнова /см. /3/ /. В этом случае предельная S-матрица также будет унитарной.

Заметим, что широко используемая R-операция Боголюбова-Парасюка-Хеппа /1/ сама по себе еще не гарантирует выполнения условия унитарности, поскольку она применяется лишь к интегралам, описывающим отдельные диаграммы Фейнмана. Поэтому необходимо вводить дополнительные правила, связанные с выбором контрчленов, которые приводят к унитарной S-матрице.

Сделаем еще одно замечание. В S-матрице /4.2/ нельзя положить $g(x) = g = \mathrm{const}$, поскольку при таком переходе возникают расходимости при больших x. Эти расходимости связаны с амплитудой перехода вакуум-вакуум и с расходимостями, связанными с перенормировкой массы и волновой функции скалярной частицы. Чтобы провести перенормировку этих величин, в лагранжиан взаимодействия необходимо добавить несколько контрчленов, после чего он принимает вид:

$$\mathcal{L}_{I,r}(x, g(x)) = g(x)\, U(\phi(x)) - \frac{1}{2}\delta m^2(g(x))\,\phi^2(x) -$$

$$-\frac{1}{2} Z_2(g(x))\,\phi(x)(\Box - m^2)\,\phi(x) - E(g(x)) .$$

Как показано, например, в /1/ /см. также /6/ /, возможно так подобрать контрчлены $\delta m^2(g(x))$, $\mathcal{Z}_2(g(x))$ и $E(g(x))$, чтобы существовал конечный предел при $g(x) \to g = \mathrm{const}$ в каждом порядке теории возмущений.

Согласно сказанному выше, S -матрица в этом пределе будет унитарной, поскольку все контрчлены эрмитовы.

В заключение выражаю глубокую благодарность профессорам Д.И.Блохинцеву, Б.М.Барбашову и Б.Н.Валуеву за обсуждения.

Литература

1. *Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", Москва, 1973.*
2. *Д.А.Славнов. Препринты ИФВЭ, СТФ 73-81, -83, -84, -85, 1973.*
3. *А.Н.Васильев, Ю.М.Письмак. ТМФ, 15, 182 /1973/.*
4. V.A.Alebastrov, G.V.Efimov. Commun. math. Phys., 31, 1 (1973).
5. *А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика. "Наука", Москва, 1969.*
6. *В.А.Алебастров, Г.В.Ефимов. ОИЯИ, Р2-6888, Дубна, 1973.*

Рукопись поступила в издательский отдел 23 октября 1974 года.