ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 8312

Йохен Крипфганц

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО МНОЖЕСТВЕННОСТИ ПИОНОВ В МОДЕЛИ СТАТИСТИЧЕСКОГО БУТСТРАПА (МСБ) БЕЗ УЧЕТА ЭКЗОТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р2 - 8312

Йохен Крипфганц*

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО МНОЖЕСТВЕННОСТИ ПИОНОВ В МОДЕЛИ СТАТИСТИЧЕСКОГО БУТСТРАПА (МСБ) БЕЗ УЧЕТА ЭКЗОТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ

Направлено в ЯФ

* Постоянный адрес: Физический факультет Лейпцигского университета им. К.Маркса, ГДР.

В последнее время становится все более очевидным, что эффекты образования кластеров играют важную роль в процессах множественного рождения [1]. В частности, анализ инклюзивных и полуинклюзивных двухчастичных корреляций показал, что вторичные частицы рождаются преимущественно группами, состоящими примерно из 5 частиц, имеющих почти одинаковые быстроты и представляющих собой инвариантную массу порядка 2 $ГэВ/c^2$

Не существует единого мнения относительно природы этих кластеров. Обсуждаются две точки зрения: кластеры рассматриваются как реальные физические объекты /подобно тяжелым резонансам/ или как коллективные эффекты без какого-либо внутреннего динамического смысла.

Моделью, представляющей кластеры 1-го типа, является модель статистического бутстрапа /МСБ/ Хагедорна [2] и Фраутчи [3]. В этой модели спектр масс адронов рассчитывается как плотность уровней невзаимодействующего свободного адронного газа, помещенного в ящик с размерами порядка радиуса взаимодействия. В качестве составляющих учитываются все возможные адроны. Это ведет к условию бутстрапа для спектра масс адронов. Последний оказывается растущим экспоненциально.

Райербот [4], предсказываемый МСБ, характеризуется ограниченной энергией вторичных частиц и, следовательно, средней множественностью распада, пропорциональной массе файербола. МСБ не предсказывает вероятность рождения и распределение по импульсу таких файерболов.

Согласно МСБ файербол распадается по каскаду: среди продуктов 1-го этапа распада имеются файерболы, которые подвергаются распаду до тех пор, пока не остаются лишь стабильные частицы. Вероятности распада на каждом этапе определяются соответствующим фазовым объемом и статистическими константами связи квантовых чисел.

В течение последних двух лет была проделана большая работа по расчету стабильных частиц, рожденных в результате всего каскадного распада [1,5]. В частности, была рассмотрена проблема сохранения внутренних квантовых чисел. Если допустить существование экзотических состояний в качестве промежуточных продуктов распада, то проблема каскада распада решается полностью [6]. В рамках МСБ для этого нет теоретических оснований и имеется некоторый произвол в исключении таких состояний адронов, которые запрещены, например, кварковой моделью. Однако экспериментальных данных, свидетельствующих в пользу рождения экзотических мезонов [7] не существует. В таком случае следует изучить также модель без учета экзотических состояний. В этом направлении была проделана некоторая работа [8-10] с использованием упрощенного варианта МСБ, а именно, линейной МСБ. Согласно последней, считается, что только одна стабильная частица вылетает на каждом этапе распада файербола. Имеются некоторые основания [5] в пользу того, что полученные таким способом результаты являются показательными также и для полной МСБ.

Согласно МСБ распределения по эксклюзивному импульсу являются эквираспределениями в /инвариантном/ фазовом пространстве. В таком случае для получения полной информации достаточно рассматривать лишь распределения по множественности. В этой работе изучаются некоторые асимптотические и неасимптотические свойства множественного распределения в МСБ без учета экзотических состояний. В качестве стабильных частиц взяты только пионы. Результаты, полученные при использовании данной модели, сравниваются с результатами линейной МСБ, в которой учтены экзотические состояния, и обсуждается возможное влияние каналов экзотического распада.

В линейной МСБ без учета экзотических состояний уравнения бутстрапа, трансформированные по преобразованию Лапласа, имеют вид:

$$f_{11} = g_{\pi^+} + \frac{B}{2} g_{\pi^\circ} f_{11} + \frac{B}{2} g_{\pi^+} f_{10} + B g_{\pi^+} f_{00},$$

$$f_{10} = g_{\pi^\circ} + \frac{B}{2} g_{\pi^-} f_{11} + \frac{B}{2} g_{\pi^+} f_{1-1} + B g_{\pi^\circ} f_{00},$$

$$f_{1-1} = g_{\pi^-} + \frac{B}{2} g_{\pi^-} f_{10} + \frac{B}{2} g_{\pi^\circ} f_{1-1} + B g_{\pi^-} f_{00},$$

$$f_{00} = \frac{B}{3} g_{\pi^-} f_{11} + \frac{B}{3} g_{\pi^\circ} f_{10} + \frac{B}{3} g_{\pi^+} f_{1-1}. \qquad /1/$$

Как изовекторные, так и изоскалярные файерболы являются разрешенными. Коэффициенты перехода представляют собой произведения квадратов коэффициентов Клебша-Гордона на константу связи B, являющуюся свободным параметром. f_{Tt} и $g_{\pi^{\pm},0}$ - соответственно лапласовские образы плотности уровней и спектра канальных пионов:

$$f_{Tt} = \int d^4k\, e^{-xk} \rho\,(k^2, T),$$

$$g_{\pi^{\pm},0} = \int d^4k\, e^{-xk}\, \delta_+(k^2 - m_\pi^2) = 2\pi m_\pi k_1\,(m_\pi \beta)/\beta, \qquad /2/$$

$$\beta = \sqrt{x^2}. \qquad /3/$$

k - 4-импульс файербола, (T, t) - его изоспин, m_π - масса пиона. В МСБ плотность уровней $\rho(k^2, T)$ отождествляется со спектром масс адронов.

Фактически $g_{\pi^{\pm},0}$ - одно и то же для всех трех пионов, а f_{Tt} зависит лишь от изоспина файербола T, а не от его третьей компоненты t. В дальнейшем эти индексы вводятся формально, чтобы иметь полную информацию о различных зарядовых состояниях в уравнении /1/.

Систему /1/ легко можно решить. В частности, решение можно записать в виде ряда по степеням g_{π^+}, g_{π° и g_{π^-}:

$$f_{Tt} = \sum_{n_+, n_0, n_-} W_{Tt}(n_+, n_0, n_-)\, g_{\pi^+}^{n_+}\, g_{\pi^\circ}^{n_0}\, g_{\pi^-}^{n_-}. \qquad /4/$$

Явный вид коэффициентов разложения $W_{Tt}(n_+, n_0, n_-)$ имеет довольно сложную структуру/9/, но их легко можно вычислить рекуррентным образом. Эти коэффициенты определяют распределение по множественности пионов

$$P_{Tt}(M^2 | n_+, n_0, n_-) = W_{Tt}(n_+, n_0, n_-) \frac{B^n \Omega_n(M^2)}{B\rho(M^2, T)}, \qquad /5/$$

где M - масса файербола, $\Omega_n(M^2)$ - интегралы по объему, инвариантному фазовому пространству. Плотность уровней $\rho(M^2, T)$ определяется соответствующей нормировкой

$$B\rho(M^2, T) = \sum_{n_+, n_0, n_-} W_{Tt}(n_+, n_0, n_-) B^n \Omega_n(M^2). \qquad /6/$$

Отметим далее, что распределение /5/ можно записать как

$$P_{Tt}(M^2 | n_+, n_0, n_-) = P_T(M^2 | n)\, P_{Tt}(n | n_+, n_0, n_-), \qquad /7/$$

где

$$P_T(M^2 | n) = W_T(n) \frac{B^n \Omega_n(M^2)}{B\rho(M^2, T)} \qquad /8/$$

представляет собой вероятность обнаружить $n (n = n_+ + n_0 + n_-)$ пионов независимо от их заряда и

$$P_{Tt}(n | n_+, n_0, n_-) = \frac{W_{Tt}(n_+, n_0, n_-)}{W_T(n)} - \qquad /9/$$

- вероятность найти $n_+ \pi^+$, $n_0 \pi^0$ и $n_- \pi^-$ - мезонов при заданном полном числе пионов n. Оказывается, что распределение /9/ не зависит от массы файербола.

Коэффициенты $W_T(n)$ определяются следующим образом:

$$W_T(n) = \sum_{\substack{n_+, n_0, n_- \\ n_+ + n_0 + n_- = n}} W_{Tt}(n_+, n_0, n_-). \qquad /10/$$

Полагая в /1/ $g_{\pi^+} = g_{\pi^0} = g_{\pi^-} = g$ и разлагая f_T в ряд по степеням g, мы получаем для $W_T(n)$ следующее выражение:

$$W_1(n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n-1-\nu}{\nu}, \qquad /11/$$

$$W_0(n) = W_1(n-1). \qquad /12/$$

Сумма в /11/ в действительности является конечной.

Теперь рассмотрим асимптотику распределения по множественности. Начнем с рассмотрения $W_T(n)$. Находим асимптотики $W_1(n)$, заменяя сумму в /11/ на интеграл

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \to n \int_0^{\infty} d\mu, \quad \mu = \nu / n,$$

и применим формулы Штирлинга. Подынтегральное выражение как функция μ имеет резко выраженный пик при

$$\mu = \frac{1}{R}, \quad R = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \qquad /13/$$

для большого n. Аппроксимируя подынтегральное выражение гауссовским распределением при $\mu = 1/R$, мы можем взять интеграл и получим следующую асимптотику для $W_1(n)$:

$$W_1(n) \sim n^p \left(\frac{1}{R}\right)^n, \quad p = 0, \qquad /14/$$

где показатель степени $p = 0$.

Знание асимптотики $W_T(n)$ позволяет найти асимптотические ($n \to \infty$) рекуррентные соотношения для /9/ - распределения по числу π^+ -, π^0 -, π^- -мезонов при заданном полном числе пионов n. Применение уравнений /1/, /11/, /12/, /14/ дает

$$P_{11}(n | n_c) = \frac{R}{2} P_{11}(n' | n_c) + \frac{R}{2} P_{10}(n' | n_c - 1) + R^2 P_{00}(n' | n_c - 1),$$

$$P_{10}(n | n_c) = \frac{R}{2} P_{11}(n' | n_c - 1) + \frac{R}{2} P_{1-1}(n' | n_c - 1) + R^2 P_{00}(n' | n_c),$$

$$P_{1-1}(n|n_c)=\frac{R}{2}P_{1-1}(n'|n_c)+\frac{R}{2}P_{10}(n'|n_c-1)+R^2P_{00}(n'|n_c-1),$$

$$P_{00}(n|n_c)=1/3\,P_n(n'|n_c-1)+1/3\,P_{10}(n'|n_c)+1/3\,P_{1-1}(n'|n_c-1), \qquad /15/$$

где

$$n'=n-1$$

и

$$P_{Tt}(n|n_c)\equiv P_{Tt}(n|n_+,n_0,n_-).$$

Число заряженных пионов n_c вместе с изоспином файербола (T,t) и полным числом пионов n целиком определяют n_+, n_0 и n_-.

Коэффициенты системы /15/ дают /асимптотические/ вероятности распада файербола с изоспином (T,t) на пион и последующий файербол с изоспином (T',t').

Например, вероятность перехода изовекторного файербола в изоскалярный $R^2 \approx 0{,}38$.

Инклюзивные величины в асимптотике не зависят от изоспина файербола [8], и средние $\pi^{+}-$, $\pi^{\circ}-$, π^{-} - множественности равны друг другу. В этом случае можно ожидать, что $P_{Tt}(n|n_c)$ будет иметь вид:

$$P_{Tt}(n|n_c)=q_{Tt}\,e^{-ny^2a(y)}, \qquad /16/$$

где

$$y=n_c/n-2/3, \qquad /17/$$

$a(y)$ не зависит от изоспина файербола,

$$a(y)=a_0+a_1y+\dots, \qquad /18/$$

а q_{Tt} слабо меняется как функция n и y. Пренебрегая членами порядка $1/n$, получим

$$P_{Tt}(n-1|n_c)=q_{Tt}\,e^{-ny^2a(y)}\,e^{-(y+2/3)y\left(y\frac{da}{dy}+2a(y)\right)+y^2a(y)}, \qquad /19/$$

$$P_{Tt}(n-1|n_c-1)=q_{Tt}\,e^{-ny^2a(y)}\,e^{+(1/3-y)y\left(y\frac{da}{dy}+2a(y)\right)+y^2a(y)}. \qquad /20/$$

Подстановка этих выражений в уравнение /15/ дает систему однородных уравнений для q_{Tt} с коэффициентной матрицей, зависящей от y и $a(y)$. Таким образом, нахождение $a(y)$ как функции y сводится к задаче на собственные значения.

Здесь рассматривается лишь первое приближение, например, аппроксимация уравнения /16/ гауссовским распределением. a_0^{-1} характеризует ширину этого распределения. Прямой расчет дает

$$a_0=\frac{9}{4}\;\frac{45+19\sqrt{5}}{88}\approx\frac{9}{4}\cdot 0{,}994. \qquad /21/$$

Теперь сравним эти результаты с тем, что дает линейная МСБ с учетом экзотических состояний. В этом случае статистические константы связи квантовых чисел восстанавливаются точно по цепочке распада [6]. Весовые коэффициенты $W_{Tt}(n_+,n_0,n_-)$ /уравнение /5// имеют вид

$$W_{Tt}(n_+,n_0,n_-)=\frac{n!}{n_+!\,n_0!\,n_-!}\,G^{Tt}_{n_+,n_0,n_-}, \qquad /22/$$

где $G^{Tt}_{n_+,n_0,n_-}$ - статистические изоспиновые относительные вероятности [12].

Выражение /22/ имеет пик при $n_+=n_0=n_-=n/3$. Параметр a_0, характеризующий ширину этого пика, равен

$$a_0=9/4. \qquad /23/$$

Интегрируя по зарядовым состояниям, дающим вклад в данное полное число пионов n, найдем асимптотику

$$W_T(n)\cdot\simeq n^p\,3^n,\quad p=-3/2, \qquad /24/$$

где показатель степени p на этот раз равен $-3/2$, статистические веса для изоспина дают вклад в это степенное поведение $p=-1$.

В заключение можно подвести следующий итог нашим исследованиям:

1. Вероятность распада файербола с массой M и изоспином T на n пионов /независимо от их заряда/ пропорциональна выражению

$$P_T(M^2|n) \sim n^p \left(\frac{B}{d}\right)^n \Omega_n(M^2) \qquad /25/$$

для большого n и не зависит от T. Параметры p и d различны как для заряженных, так и разрешенных экзотических состояний:

$p=0,\ d=R=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ - линейная МСБ без учета экзотических состояний,

$p=-3/2,\ d=1/3$ - линейная МСБ с учетом экзотических состояний.

Поскольку константа связи B является свободным параметром, она может компенсировать различие в значениях d. Но различное степенное поведение по-прежнему остается. Каналы экзотического распада имеют неисчезающий эффект.

2. Если допустить экзотические состояния в качестве промежуточных продуктов распада файербола, то цепочка распада точно воспроизводит изоспиновые статистические относительные вероятности. Исключение экзотических каналов приводит к модификациям, но последние весьма малы.

Для случая неасимптотических множественностей пионов это иллюстрируется таблицей. Для линейных МСБ с учетом и без учета экзотических состояний приводятся численные расчеты распределения заряженных пионов $P_{Tt}(n|n_c)$ соответственно для $n=7,15$. Для каналов, дающих основной вклад, имеются отклонения порядка 1%.

При большом n $P_{Tt}(n|n_c)$ можно аппроксимировать гауссианом, если n_c близко к среднему значению $2/3n$:

Таблица

Распределение числа заряженных пионов n_c для заданного полного числа пионов $n = 7$ и 15 и изоспина файербола $T=0$; A - линейная МСБ без учета экзотических состояний; B - линейная МСБ с учетом экзотических состояний

n_c	$n=7$		$n=15$	
	A	B	A	B
2	$4{,}13.10^{-1}$	$4{,}17.10^{-1}$	$7{,}69.10^{-5}$	$8{,}43.10^{-5}$
4	$5{,}07.10^{-1}$	$5{,}00.10^{-1}$	$3{,}36.10^{-3}$	$3{,}54.10^{-3}$
6	$8{,}0\ .10^{-2}$	$8{,}3\ .10^{-2}$	$4{,}59.10^{-2}$	$4{,}67.10^{-2}$
8	-	-	$2{,}29.10^{-1}$	$2{,}29.10^{-1}$
10	-	-	$4{,}26.10^{-1}$	$4{,}23.10^{-1}$
12	-	-	$2{,}61.10^{-1}$	$2{,}61.10^{-1}$
14	-	-	$3{,}54.10^{-2}$	$3{,}58.10^{-2}$

$$P_{Tt}(n|n_c) \sim e^{-\frac{a_0(n_c - 2/3\,n)^2}{}} \quad . \qquad /26/$$

Параметр a_0 не зависит от изоспина файербола и имеет почти одинаковые значения для обоих вариантов модели.

$a_0 = \frac{9}{4}\,\frac{45+19\sqrt{5}}{88} \simeq \frac{9}{4}0{,}994$ - для запрещенных экзотических состояний,

$a_0 = \frac{9}{4}$ - для разрешенных экзотических состояний.

При n_c, далеком от среднего значения, оба варианта модели различаются сильнее.

Литература

1. For a recent review see: J.Ranft. Talk given at the Vth International Symposium on Many Particle Hadrodynamics, Eisenach-Leipzig, 1974. Leipzig preprint KMU-HEP-7408.
2. R.Hagedorn. Nuovo Cim. Sppl., 3, 147 (1965).
3. S.Frautschi. Phys.Rev., D3, 2821 (1971).
4. A comprehensive review of the fireball problem and a discussion of various models have been given by E.L.Feinberg. Phys.Rep., 5, 237 (1972).
5. See: J.Kripfganz. Talk given at the Vth International Symposium on Many Particle Hadrodynamics, Eisenach-Leipzig, 1974. Leipzig preprint KMU-HEP-7407.
6. E.M.Ilgenfritz and J.Kripfganz. Nucl.Phys., B62, 141 (1973).
7. D.Cohen. Talk given at the XVII International Conference on High Energy Physics, London, 1974; Columbia University preprint, 1974.
8. J.Kripfganz and E.M.Ilgenfritz. Phys.Lett., 48B, 329 (1974).
9. J.Engels, K.Fabricius, K.Schilling. Bielefeld preprint Bi 7403.
10. F.Csikor, I.Farkas, Z.Katona, I.Montvay. Budapest Report No. 326, 1974.
11. E.M.Ilgenfritz and J.Kripfganz. Nucl.Phys., B56, 241 (1973); R.Hagedorn and I.Montvay. Nucl.Phys., B59, 45 (1973); J.Kripfganz and E.M.Ilgenfritz. Proceedings of the International Seminar on Deep Inelastic and Many Body Processes at High Energy, Dubna, 1974, p. 265.
12. F.Cerulus. Nuovo Cimento, 19, 528 (1961).

Рукопись поступила в издательский отдел
8 октября 1974 года.