2/IV-84

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

1605/84

Р2-83-897

Б.Илиев, С.Манов*

УРАВНЕНИЯ ДЕВИАЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

* Институт ядерных исследований и ядерной энергетики БАН, София

1983

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы уравнения девиации находят все более широкое применение при решении ряда математических и физических проблем в теориях гравитации и в астрофизике [1–3]. В римановых пространствах V_p известен ряд вариантов этого уравнения. В [1] на основании производных Ли предложен общий метод нахождения разных модификаций уравнения девиации в V_p.

Цель настоящей работы состоит в исследовании и применении методики, предложенной в [1], для пространства аффинной связности L_n. Рассмотрены также примеры, иллюстрирующие предложенный подход получения уравнений девиации в L_n.

В разделе 1 рассмотрено так называемое обобщенное уравнение девиации в пространствах аффинной связности. В разделе 2 дается физическая интерпретация этого уравнения. Далее /раздел 3/ приведены примеры дополнительных условий, определяющих более конкретно вид обобщенного уравнения девиации. В разделе 4 даны примеры конкретных уравнений девиации в L_n.

1. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЕВИАЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

1.1. В основе следующих рассмотрений лежит тождество /см. приложение/:

$$\underset{\xi}{\pounds}\Gamma^k_{ij} = \xi^k_{|i|j} - R^k_{ij\ell}\,\xi^\ell - (T^k_{i\ell}\,\xi^\ell)_{|j}\,. \qquad /1.1/$$

Здесь все величины взяты в определенной точке $x \in L_n$ и введены следующие обозначения: $\underset{\xi}{\pounds}$ - оператор производной Ли [7] по направлению C^2- вектора $\xi := \xi^i E_i$ $(i, j, k, \ell, \ldots = 1, 2, \ldots n \in N)$; знак ":=" означает "равно по определению"; Γ^i_{jk} - коэффициенты аффинной связности в L_n относительно произвольного некоординатного базиса $\{E_i\}$ в касательном пространстве $T_x(L_n)$; $E_i := A^a_i \partial_a$ /по повторяющимся на разном уровне индексам подразумеваем суммирование, $a, \beta, \ldots = 1, 2, \ldots, n$/; $\det\|A^a_i\| \neq 0, \infty$; $A^a_i = A^a_i(x)$; $\{\partial_a\}$ - координатный базис в $T_x(L_n)$; $\partial_a := \partial/\partial x^a$; вообще говоря, $\Gamma^i_{jk} \neq \Gamma^i_{kj}$; $\xi^k_{|i|j} := \xi^k_{|ij} := (\xi^k_{|i})_{|j}$; $_{|i}$ обозначает действие оператора ковариантного дифференцирования по базисному полю E_i на соответствующую величину относительно связности Γ^i_{jk} ; $_{,i}$ обозначает действие поля E_i на компоненты объектов над L_n /как функции над L_n/, напр., $\xi^i_{|j} := \xi^i_{,j} + \Gamma^i_{kj}\,\xi^k$, $\xi^i_{,j} := E_j(\xi^i)$;

$R^i_{jk\ell} := -2\Gamma^i_{j[k,\ell]} - 2\Gamma^n_{j[k}\Gamma^i_{|n|\ell]} - \Gamma^i_{jn}\, C^n_{k\ell}$

суть компоненты тензора кривизны в L_n относительно базиса $\{E_i\}$;

$$B_{[ij]} := 1/2(B_{ij} - B_{ji}); \quad B_{[i|j|\ell]} := 1/2(B_{ij\ell} - B_{\ell ji});$$

$C^i_{jk} := -2.A^i_\alpha\, .A^\alpha_{[j,k]}, \quad \|A^i_\alpha\| := \|A^\beta_i\|^{-1}; \quad T^i_{jk} := -2.\Gamma^i_{[jk]} - C^i_{jk}$

суть компоненты тензора кручения в L_n относительно базиса $\{E_i\}$.

1.2. Пусть $u := u^i E_i$ – произвольный контравариантный C^1-вектор. Проектируя /1.1/ по u^i и u^j и принимая во внимание равенство $u^i u^j \xi^k_{|ij} = u^j(\xi^k_{|i}u^i)_{|j} - \xi^k_{|i}u^i_{|j}u^j$, находим следующее соотношение:

$$u^j(u^i\xi^k_{|i})_{|j} = R^k_{ij\ell}u^i u^j \xi^\ell + \xi^k_{|i}(u^i_{|j}u^j) + \qquad /1.2/$$

$$+ u^i u^j (T^k_{i\ell}\xi^\ell)_{|j} + u^i u^j \underset{\xi}{\pounds}\Gamma^k_{ij} .$$

Если u является C^2-вектором, то

$$u^i u^j \underset{\xi}{\pounds}\Gamma^k_{ij} = \underset{\xi}{\pounds}(u^k_{|i}u^i) - u^i(\underset{\xi}{\pounds}u^k)_{|i} - u^k_{|i}\underset{\xi}{\pounds}u^i$$

и, следовательно, /1.2/ можно записать в виде

$$u^j(u^i\xi^k_{|i})_{|j} = R^k_{ij\ell}u^i u^j \xi^\ell + \xi^k_{|i}(u^i_{|j}u^j) + u^i u^j (T^k_{i\ell}\xi^\ell)_{|j} + \qquad /1.2a/$$

$$+ \underset{\xi}{\pounds}(u^k_{|i}u^i) - u^i(\underset{\xi}{\pounds}u^k)_{|i} - u^k_{|i}\underset{\xi}{\pounds}u^i .$$

1.3. Пусть $x(s) := (x^1(s), \ldots, x^n(s))$ – произвольная C^2-крива с параметром s в L_n, а векторное поле u выбрано таким образом, чтобы вдоль $x(s)$ имело место равенство

$$u^\alpha_{|x=x(s)} := \frac{dx^\alpha(s)}{ds} := u^\alpha(s) := u^\alpha, \qquad /1.3/$$

то есть $u(s)$ является касательным к кривой вектором в точке $x(s)$.

Обозначим посредством $\bar\nabla_i$ оператор ковариантного дифференцирования компонент тензоров по E_i /напр., $\bar\nabla_i\,\xi^k := \xi^k_{|i}$ /. Тогда $\bar D/ds := u^i\cdot\bar\nabla_i = u^\alpha\bar\nabla_\alpha = dx^\alpha(s)/ds\,\bar\nabla_\alpha$ есть ковариантная производная по параметру s вдоль кривой $x(s)$.

Используя оператор $\bar D/ds$, мы можем переписать равенства /1.2/ и /1.2a/ вдоль $x(s)$ в виде

$$\frac{\bar D^2\xi^k}{ds^2} = R^k_{ij\ell}u^i u^j \xi^\ell + \xi^k_{|j}F^j + u^j\cdot\frac{\bar D}{ds}(T^k_{j\ell}\xi^\ell) + u^i u^j \underset{\xi}{\pounds}\Gamma^k_{ij}, \qquad /1.4/$$

$$\frac{\bar D^2\xi^k}{ds^2} = R^k_{ij\ell}u^i u^j \xi^\ell + \xi^k_{|j}F^j + u^j\cdot\frac{\bar D}{ds}(T^k_{j\ell}\xi^\ell) +$$

$$+ \underset{\xi}{\pounds}F^k - \frac{\bar D}{ds}(\underset{\xi}{\pounds}u^k) - u^k_{|i}\underset{\xi}{\pounds}u^i, \qquad /1.4a/$$

где

$$\frac{\bar D}{ds^2} := \frac{\bar D}{ds}\cdot\frac{\bar D}{ds}, \qquad F^k := \frac{\bar D u^k}{ds} = u^k_{|j}u^j .$$

Равенство /1.4/ /или эквивалентное ему /1.4a// будем называть обобщенным уравнением девиации в пространствах аффинной связности L_n в /некоординатном/ базисе $\{E_i\}$. В сущности, /1.4/ является тождеством, следующим из соответствующих определений входящих в него величин и операторов. Оно может рассматриваться как уравнение относительно какой-либо из входящих в него величин только в том случае, если заранее известно, что между ними существует какая-нибудь связь. Так что, строго говоря, под уравнением девиации будем понимать тождество /1.4/ вместе с каким-нибудь дополнительным условием, наложенным на входящие в него величины. Именно многообразие возможных дополнительных условий и приводит к существованию разных модификаций /форм/ уравнения девиации /для пространства V_n см. /1/ /. Заметим, что в некоторых случаях полезно рассматривать дополнительные условия как первые интегралы самого уравнения девиации.

<u>Замечание 1.</u> В безындексной записи /1.4/ и /1.4a/ имеют соответственно вид

$$\frac{D^2\xi}{ds^2} = \hat R(u,\xi)u + C^1_1(F \circ (D\xi)) + \frac{D}{ds}\hat T(u,\xi) - \hat T(F,\xi) + \underset{\xi}{\pounds}\Gamma(u,u), \qquad /1.5/$$

$$\frac{D^2\xi}{ds^2} = \hat R(u,\xi)u + C^1_1(F \circ (D\xi)) + \frac{D}{ds}\hat T(u,\xi) - \hat T(F,\xi) + \qquad /1.5a/$$

$$+ \underset{\xi}{\pounds}F - \frac{D}{ds}(\underset{\xi}{\pounds}u) - C^2_1[(Du)\circ(\underset{\xi}{\pounds}u)] .$$

Здесь введены следующие обозначения: $D/ds := u^i\nabla_i$, где $\nabla_i := \nabla_{E_i}$ есть ковариантная производная по базисному вектору E_i /напр., $\nabla_i u := (\bar\nabla_i u^k)E_k$/; $\xi := \xi^k E_k$, $u := u^k E_k$, $F := F^k E_k$; $\hat R(u,\xi) := [\nabla_u, \nabla_\xi] - \nabla_{[u,\xi]}$ – оператор кривизны в L_n, $\nabla_u := u^k\nabla_k$, $[A,B] := AB - BA$ – коммутатор A и B; C^p_q – оператор свертки по p-му верхнему и q-му нижнему индексам ($[C^p_q, \nabla_k] = 0$); $DA := (\nabla_k A)\circ E^k$ – ковариантный дифференциал вектора A, $\{E^k\}$ – дуальный к $\{E_k\}$ базис в $T^*(L_n)$, то есть $E^i(E_j) := \delta^i_j$, $\delta^i_j = 0$ для $i \neq j$ и $\delta^i_j = 1$ для $i = j$; $\hat T(u,\xi) := \nabla_u\xi - \nabla_\xi u - [u,\xi]$ – оператор кручения в L_n; $\underset{\xi}{\pounds}\Gamma(u,u) := (\underset{\xi}{\pounds}\Gamma^k_{ij}\,.E^i \circ E^j \circ E_k)(u,u)$; $\circ$ – знак тензорного умножения; $\underset{\xi}{\pounds}u := (\underset{\xi}{\pounds}u^k)E_k = [\xi,u] = -\underset{u}{\pounds}\xi$.

<u>Замечание 2.</u> Подставляя в /1.4/ равенство

$$u^j\underset{\xi}{\pounds}\Gamma^k_{ji} = \underset{\xi}{\pounds}u^k_{|i} - (\underset{\xi}{\pounds}u^k)_{|i} = [\underset{\xi}{\pounds}, \bar\nabla_i]u^k ,$$

получаем еще одну эквивалентную форму обобщенного уравнения девиации:

$$\frac{\bar{D}^2 \xi^k}{ds^2} = R^k_{ij\ell} u^i u^j \xi^\ell + \xi^k{}_{|j} F^j + u^j \cdot \frac{\bar{D}}{ds} (T^k_{j\ell} \, \xi^\ell) + u^i [\underset{\xi}{\pounds}(u^k{}_{|i}) - (\underset{\xi}{\pounds} u^k)_{|i}] , \qquad /1.4б/$$

или иначе

$$\frac{D^2 \xi}{ds^2} = \hat{R}(u, \xi)u + C^1_1 [F \circ (D\xi)] + \frac{D}{ds}\hat{T}(u, \xi) - \hat{T}(F, \xi) - [\nabla_u , \underset{\xi}{\pounds}] u . \qquad /1.5б/$$

2. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ДЕВИАЦИИ

2.1. При физической интерпретации уравнения девиации мы ограничимся рассмотрением инфинитезимального вектора девиации с компонентами ξ^i, определенного ниже с помощью /2.2а/, то есть будем иметь в виду так называемое локальное уравнение девиации. Причина этого заключается в том, что при попытке вывода нелокального уравнения девиации возникают вопросы, связанные со сравнением тензоров, заданных в разных, но инфинитезимально не близких точках пространства L_n. Эти проблемы, не имеющие пока однозначного и глобального решения, стоят вне основной цели настоящего исследования, и мы не будем на них останавливаться. По этому поводу отметим только, что существуют соображения, согласно которым данная ниже физическая интерпретация уравнения девиации будет иметь место и в случае глобального рассмотрения.

2.2. Рассмотрим две точечные частицы 1 и 2, которые движутся в L_n по C^2 -кривым $\overset{1}{x}(\tau_1)$ и $\overset{2}{x}(\tau_2)$ с параметрами соответственно τ_1 и τ_2, то есть $\overset{1}{x}(\tau_1)$ и $\overset{2}{x}(\tau_2)$ суть траектории этих частиц. Примем, что движение частиц 1 и 2 "наблюдается" частицей /наблюдателем/ с C^2-траектории $\overset{0}{x}(\tau)$ /базисная траектория/ с параметром τ. Мы предполагаем, что $\overset{0}{x}(\tau)$, $\overset{1}{x}(\tau_1)$ и $\overset{2}{x}(\tau_2)$ являются однозначными и обратимыми функциями соответственно от τ , τ_1 и τ_2, а также, что $\tau \neq \mathrm{const}$ $(d\tau \neq 0)$.

Математически процесс "наблюдения" означает существование отображений $\overset{1}{\phi}$ и $\overset{2}{\phi}$ таких, что когда наблюдатель находится в точке $\overset{0}{x}(\tau)$, а наблюдаемые частицы - в точках $\overset{1}{x}(\tau_1)$ и $\overset{2}{x}(\tau_2)$, то имеют место соотношения $\overset{1}{x}(\tau_1) := \overset{1}{\phi}(\overset{0}{x}(\tau))$ и $\overset{2}{x}(\tau_2) := \overset{2}{\phi}(\overset{0}{x}(\tau))$,

то есть когда наблюдатель "знает" свое положение в L_n, он может определить и положения наблюдаемых частиц.

Вводим следующие определения:

$$u^a := \frac{d\overset{0}{x}{}^a(\tau)}{d\tau}, \quad u := u^a \partial_a = u^i E_i , \quad F := \frac{Du}{d\tau} = u^i \nabla_i \, u, \qquad /2.1/$$

$$\xi^a := \overset{2}{x}{}^a(\tau_2) - \overset{1}{x}{}^a(\tau_1) = \overset{2}{\phi}{}^a(\overset{0}{x}(\tau)) - \overset{1}{\phi}{}^a(\overset{0}{x}(\tau)) := \xi^a(\tau), \qquad /2.1а/$$

$$\xi := \xi^a \partial_a = \xi^k E_k , \qquad /2.1б/$$

$$V := \frac{D\xi}{d\tau} = u^k \nabla_k \, \xi, \quad V^i = \frac{\bar{D}\xi^i}{d\tau} = \frac{d\xi^i}{d\tau} + \Gamma^i_{jk} \, \xi^j u^k . \qquad /2.1в/$$

Контравариантный вектор ξ будем называть вектором девиации. Очевидно, он описывает относительное положение частицы 2 по отношению к частице 1 /наблюдаемое из точки на кривой $\overset{0}{x}(\tau)$ /. Физически вектор V интерпретируется как относительная скорость частицы 2 по отношению к частице 1, определяемая наблюдателем из базисной траектории $\overset{0}{x}(\tau)$ с параметром τ, который рассматривается как "собственное время" наблюдателя.

Для вектора девиации ξ уравнение девиации /например в виде /1.5а// выглядит так:

$$\frac{D^2 \xi}{d\tau^2} = \frac{DV}{d\tau} = \hat{R}(u, \xi) u + C^1_1 (F \circ (D\xi)) + \frac{D}{d\tau} \hat{T}(u, \xi) - \qquad /2.2/$$
$$- \hat{T}(F, \xi) + \underset{\xi}{\pounds} F - \frac{D}{d\tau} (\underset{\xi}{\pounds} u) - C^2_1((Du) \circ (\pounds u)).$$

Ясно, что по отношению к фиксированному наблюдателю $DV/d\tau$ есть относительное ускорение между наблюдаемыми частицами 2 и 1. Таким образом, обобщенное уравнение девиации дает относительное ускорение наблюдаемых частиц как функцию характеристик пространства L_n ($\hat{R}$, $\hat{T}$ и Γ^i_{jk}), траектории наблюдателя (τ, u, F) и относительного движения наблюдаемых частиц (ξ и V). При этом мы должны иметь в виду, что вместе с /2.2/ в каждом конкретном случае необходимо рассматривать и соответствующие дополнительные условия.

Заметим также, что всякого рода ограничения на траектории рассматриваются в уравнениях девиации как дополнительные условия.

3. ПРИМЕРЫ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЙ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ВИД УРАВНЕНИЯ ДЕВИАЦИИ

3.1. Симметрии L_n - источник дополнительных условий

Если пространство L_n допускает какие-нибудь симметрии, то это немедленно приводит к определенным дополнительным условиям в обобщенном уравнении девиации /1.4/. Причина этого заключается в том, что при его выводе мы использовали только такие величины, которые были определены в L_n, и на них мы не накладывали никаких ограничений.

Для иллюстрации сказанного выше приведем четыре примера /математический вывод соответствующих дополнительных условий можно найти в [4-7] для V_p, а для L_n он может быть получен аналогично приведенной там методике/:

1/ если L_n допускает геодезические отображения /сопоставляющие геодезические линии из L_n с геодезическими линиями из L_n /, то имеют место уравнения

$$\underset{\xi}{\pounds}\overset{p}{\Gamma}{}^i_{jk} = 0, \qquad /3.1/$$

где

$$\overset{p}{\Gamma}{}^i_{jk} := \Gamma^i_{(jk)} - \frac{2}{n+1}(\delta^i_j \cdot \Gamma^\ell_{(\ell k)})_{(jk)} \qquad /3.1a/$$

суть проективные параметры Томаса [7] /круглые скобки обозначают симметризацию $A_{(jk)} := 1/2(A_{jk} + A_{kj})$ /;

2/ если L_n допускает аффинные преобразования /сохраняющие параллельность векторов из $T_x(L_n)$/, то это приводит к дополнительным условиям

$$\underset{\xi}{\pounds}\Gamma^i_{jk} = 0; \qquad /3.2/$$

3/ если в L_n задана метрика с компонентами метрического тензора $g_{ij}\,(= g_{ij})$ и L_n допускает изометрии /отображения L_n в L_n, сохраняющие определенные с помощью метрики расстояния/, то как дополнительные условия выступают равенства

$$\underset{\xi}{\pounds} g_{ij} = 0; \qquad /3.3/$$

4/ если в L_n задана метрика и пространство допускает конформные преобразования /сохраняющие углы между векторами из $T_x(L_n)$/, то существует функция Φ такая, что

$$\underset{\xi}{\pounds} g_{ij} = 2.\Phi.g_{ij}\,. \qquad /3.4/$$

Если метрический тензор не вырожден $(\det\|g_{ij}\| = 0, \infty)$, то условие /3.4/ можно записать в виде $(g := \det\|g_{ij}\|)$:

$$\underset{\xi}{\pounds}(g^{-1/n}.g_{ij}) = 0. \qquad /3.4a/$$

3.2. Частные случаи рассмотрения пространства L_n - примеры дополнительных условий

В качестве дополнительных условий в уравнении девиации могут служить соотношения, связывающие заданные над L_n структуры или определяющие новые объекты над L_n и их возможные связи с уже существующими структурами. Примеры указанного типа представляют следующие пространства:

1/ L_n - пространство без кручения

$$T^i_{jk} = 0\ (\hat{T} = 0); \qquad /3.5/$$

2/ p -рекуррентные /p - целое число/ L_n -пространства

$$R^i{}_{jk\ell|i_1\ldots i_p} = R^i{}_{jk\ell} \cdot A_{i_1\ldots i_p}, \qquad /3.6/$$

где $A_{i_1\ldots i_p}$ - компоненты тензора ранга p;

3/ аффинное /локально плоское/ L_n -пространство: для любой точки $x_0 \in L_n$ существует ее окрестность U, в которой

$$R^i_{jk\ell}(x) = 0 \quad (\hat{R} = 0), \quad x \in U, \qquad /3.7/$$

или, что то же самое, существует базис $\{E_{i_0}\}$ такой, что

$$\Gamma^{i_0}_{j_0 k_0}(x) = 0, \quad x \in U; \qquad /3.7a/$$

4/ эквиаффинное пространство /вообще говоря, с кручением/: L_n - пространство с симметрическим тензором Ричи

$$R_{ij} = R_{ji} \quad (R_{ij} := R^k_{ijk}); \qquad /3.8/$$

5/ метрические L_n- пространства с компонентами метрического тензора g_{ij} и дополнительным вектором w_i, удовлетворяющим условию полуметрического переноса

$$g_{ij|k} = w_k \cdot g_{ij}\,. \qquad /3.9/$$

В частности, если метрика не вырождена $(\det\|g_{ij}\| \neq 0, \infty)$ /пространства Вейля/, то существует обратный метрический тензор, компоненты которого g^{ij} определяются равенством

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j\,; \qquad /3.10/$$

6/ пространства Эйнштейна /в общем случае с кручением/: метрические L_n - пространства, в которых

$$R_{ij} = f.g_{ij}\,, \qquad /3.11/$$

где f - скалярная функция;

7/ римановы пространства /в общем случае с кручением/: эквиаффинные пространства Вейля, удовлетворяющие условию метрического переноса

$$g_{ij|k} = 0,\ (g = \det\|g_{ij}\| \neq 0, \infty;\ R_{ij} = R_{ji}); \qquad /3.12/$$

8/ конформно-евклидовы пространства /в общем случае с кручением/: пространства Вейля, в которых существует тензор с компонентами P_{ij} такой, что

$$R^{i}_{jk\ell} = 2(\delta^{i}_{k} \cdot P_{\ell j} - \delta^{i}_{j} \cdot P_{k\ell} - g_{jk} \cdot P_{\ell m} \cdot g^{mi})_{[k\ell]}, \qquad /3.13/$$

$$\bar{\nabla}_{[i} P_{j]k} := 0. \qquad /3.13а/$$

Для $n \geq 3$ из /3.13/ следует /3.13а/ и

$$P_{ij} = \frac{1}{n-2} [R_{ji} + \frac{2}{n} R_{[ij]} - \frac{1}{2(n-1)} \cdot (R_{k\ell}\, g^{k\ell}) \cdot g_{ij}]. \qquad /3.13б/$$

Каждое из условий /3.5/ - /3.13/ или несколько из них /если они совместимы/ вместе с тождеством /1.4/ определяют уравнение девиации в соответствующих пространствах.

3.3. Другие дополнительные условия

Исследование конкретных проблем, связанных с уравнением девиации, основано на соображениях физического или математического характера и приводит к соответствующим дополнительным условиям. Примеры таких условий и их интерпретации в координатном базисе в случае римановых пространств V_p /без кручения/ приведены в[1]. Не повторяя сказанного в этой работе, мы только укажем примеры таких дополнительных условий и соответствующие им уравнения девиации /1.5/ или /1.5а/ в пространствах аффинной связности L_n:

1/ $F = 0$ / $x(s)$ является геодезической линией в L_n/:

$$\frac{D^2\xi}{ds^2} = \hat{R}(u, \xi)u + \frac{D}{ds}(\hat{T}(u, \xi) - \underset{\xi}{£}u) - C^2_1((Du) \circ (\underset{\xi}{£}u));$$

2/ $\underset{\xi}{£}u = 0$:

$$\frac{D^2\xi}{ds^2} = \hat{R}(u, \xi)u + C^1_1(F \circ (D\xi)) + \frac{D}{ds}\hat{T}(u, \xi) - \hat{T}(F, \xi) + \underset{\xi}{£}F;$$

3/ $u^i{}_{|k} = 0$ и, следовательно, $Du = 0$ и $F = 0$:

$$\frac{D^2\xi}{ds^2} = \hat{R}(u, \xi)u + \frac{D}{ds}(\hat{T}(u, \xi) - \underset{\xi}{£}u);$$

4/ $\underset{\xi}{£}F = -F$:

$$\frac{D^2\xi}{ds^2} = \hat{R}(u, \xi)u + 2C^1_1(F \circ (D\xi)) - F + \frac{D}{ds}(\hat{T}(u, \xi) - \underset{\xi}{£}u) -$$

$$- \hat{T}(F, \xi) - C^2_1((Du) \circ (\underset{\xi}{£}u));$$

5/ $u = \xi$ и, следовательно, $\underset{\xi}{£}u = [\xi, u] = 0$:

$$\frac{D^2u}{ds^2} = \underset{u}{£}F + C^1_1(F \circ (Du)) + \hat{T}(u, F);$$

6/ $u^i u^j \underset{\xi}{£}\Gamma^k_{ij} = -(F^k + \xi^k{}_{|j} \cdot F^j)$:

$$\frac{D}{ds}(u + \frac{D\xi}{ds}) = \hat{R}(u, \xi)u + \frac{D}{ds}\hat{T}(u, \xi) - \hat{T}(F, \xi).$$

4. ПРИМЕРЫ УРАВНЕНИЙ ДЕВИАЦИИ В L_n

4.1. Рассмотрим задачу нахождения в явном виде уравнения девиации двухпараметрического семейства C^2-кривых $x(s, q)$ с независимыми параметрами s и q, $s, q \in R$ в пространстве L_n /строго говоря, ср. с[3], параметр q должен быть заменен $(n-1)$ независимыми параметрами $q_1, \dots, q_{n-1}$, использование которых не изменяет по существу рассматриваемого случая/.

Обозначим компоненты тангенциальных векторов к s-кривым и q-кривым соответственно как u^i и v^i:

$$u := u^i E_i = u^{\alpha}\partial_{\alpha}, \qquad u^{\alpha} := \frac{\partial x^{\alpha}(s, q)}{\partial s}, \qquad /4.1/$$

$$v := v^i E_i = v^{\alpha}\partial_{\alpha}, \qquad v^{\alpha} := \frac{\partial x^{\alpha}(s, q)}{\partial q}.$$

Пусть две инфинитезимально близкие s-кривые характеризуются параметрами $\overset{1}{q} := q$ и $\overset{2}{q} := q + \delta q$ /δq - инфинитезимальная константа/. Вектор

$$\xi := (\delta q)v \qquad /4.2/$$

можно интерпретировать как относительное расстояние между точками двух кривых $x(s, q)$ и $x(s, q + \delta q)$. Цель - нахождение значения относительного ускорения между точками обеих кривых по отношению к первой из них. Решение этой задачи дается уравнением девиации, в котором роль дополнительного условия играет условие независимости параметров s и q, ведущее к требованию

$$\frac{\partial^2 x^{\alpha}(s, q)}{\partial q \partial s} - \frac{\partial^2 x^{\alpha}(s, q)}{\partial s \partial q} = \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial q} - \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial s} = \underset{v}{£}u^{\alpha} = -\underset{u}{£}v^{\alpha} := 0. \qquad /4.3/$$

Из /4.2/ и /4.3/ следует соотношение

$$\underset{\xi}{£}u = -\underset{u}{£}\xi = 0, \qquad /4.4/$$

которое можно представить в виде

$$\frac{D\xi}{ds} = C^1_1(\xi \circ (Du)) - \hat{T}(\xi, u). \qquad /4.5/$$

Тогда уравнение девиации приобретает форму

$$\frac{D^2\xi}{ds^2} = \hat{R}(u, \xi)u + C^1_1(\xi \circ (DF + T)), \qquad /4.6/$$

где

$$T := T^k_\ell \,.\, E_k \circ E^\ell, \qquad /4.6a/$$

$$T^k_\ell = -u^n \nabla_n (T^k_{\ell j} u^j) + u^j T^k_{ji} (u^i{}_{|\ell} - T^i_{\ell m} u^m).$$

/Традиционный метод получения последнего уравнения основывается на использовании оператора $D/ds := u^k \nabla_k$ к /4.6/ и подходящей переработке полученного выражения/.

4.2. Рассмотрим случай двух свободных частиц с C^2-траекториями $\overset{0}{x}(\tau)$ и $\overset{2}{x}(\tau_2)$, первую из которых интерпретируем как наблюдателя, а вторую - как наблюдаемую частицу. По определению, свободны те частицы, траектории которых суть геодезические линии. При этом выполняются условия

$$F^i = u^i{}_{|k} u^k = A^i_\alpha \left(\frac{d^2 \overset{0}{x}{}^\alpha(\tau)}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \cdot \frac{d\overset{0}{x}{}^\beta(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\overset{0}{x}{}^\gamma(\tau)}{d\tau}\right) = 0, \qquad /4.7/$$

$$\underset{\xi}{\pounds} u = 0. \qquad /4.8/$$

Условие /4.7/ задает геодезическую $\overset{0}{x}(\tau)$, а /4.8/, эквивалентное /4.4/, характеризует существующее отображение $\overset{2}{\phi}$ /см.пункт 2/, и это условие /4.7/ можно рассматривать как полученное методом, приведенным в предыдущем примере /где изучаются кривые $\overset{0}{x}(\tau)$ и $\overset{2}{x}(\tau_2)$, принадлежащие семейству $x(s = \tau, q)$; при $q = const = q_0$ $x(s = \tau, q_0)$ является геодезической/.

Уравнение девиации получается в этом случае в виде /см. пункт 3.3, случай 2/

$$\frac{DV}{d\tau} = \hat{R}(u, \xi)u + C^1_1(\xi \circ T), \qquad /4.9/$$

где

$$T := T^k_\ell \,.\, E_k \circ E^\ell, \qquad V := \frac{D\xi}{d\tau}, \qquad /4.10/$$

$$T^k_\ell = -T^k_{\ell j|n} u^j u^n + u^j T^k_{ji} (u^i{}_{|\ell} - T^i_{\ell m} u^m).$$

Из /4.9/ следует, что в общем случае ускорение между двумя свободными частицами /приливное ускорение/ имеет два источника:

тензор кривизны $R^i_{jk\ell}$ и тензор кручения T^i_{jk}. Поэтому в пространствах L_n возможна новая ситуация, не существующая в пространствах V_n /без кручения/: кривизну и кручение можно компенсировать так, что приливное ускорение будет равно нулю $(DV/d\tau = 0)$ на всей базисной траектории, на отдельных ее участках или в отдельных ее точках. Следовательно, если можно установить экспериментальным способом, что в данной области пространства $R^i_{jk\ell} \neq 0$ /кривизна отлична от нуля/ и вместе с тем в ней реализуется одна из упомянутых возможностей, то это, в сущности, означает, что пространство есть пространство с кручением, то есть $T^i_{jk} \neq 0$ /если как модель пространства-времени рассматривается пространство L_n/.

4.3. Пусть наблюдатель и наблюдаемая частица имеют произвольные C^2-траектории $\overset{0}{x}(\tau)$ и $\overset{1}{x}(\tau_1)$. Введем следующие определения:

$$\xi := \overset{1}{x}(\tau_1) - \overset{0}{x}(\tau) := \epsilon\zeta \qquad /\epsilon \text{ - инфинитезимальный параметр}/,$$

$$\frac{d\tau_1}{d\tau} := w (\neq 0, \infty), \qquad u^\alpha := \frac{d\overset{0}{x}{}^\alpha(\tau)}{d\tau}, \qquad u := u^\alpha \partial_\alpha = u^k E_k, \qquad /4.11/$$

$$v^\alpha := \frac{d\overset{1}{x}{}^\alpha(\tau_1)}{d\tau_1}, \qquad v := v^\alpha \partial_\alpha = v^i E_i.$$

Так как $\overset{0}{x}(\tau)$ и $\overset{1}{x}(\tau_1)$, по определению, - однозначные и обратимые функции соответственно параметров τ и τ_1, то

$$v = \frac{1}{w}(u + V), \qquad V := \frac{D\xi}{d\tau}. \qquad /4.12/$$

Отображение $\overset{0}{x}(\tau) \to \overset{1}{x}(\tau_1) := \overset{0}{x}(\tau) + \xi(\tau)$ деформирует вектор $F^k := u^k{}_{|\ell} u^\ell$ и связность Γ^i_{jk} соответственно в

$$'F^i = F^i + \epsilon \underset{\zeta}{\pounds} F^i = F^i + \underset{\xi}{\pounds} F^i \qquad /4.13/$$

и

$$'\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \epsilon \underset{\zeta}{\pounds} \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \underset{\xi}{\pounds} \Gamma^i_{jk}. \qquad /4.14/$$

В этом случае можно получить одно "естественное" дополнительное условие для уравнения девиации с помощью требования, что $'F^i$ описывает изменение v^i на наблюдаемой траектории:

$$'F^i = v^j \,.\, '\bar{\nabla}_j v^i := v^j (v^i{}_{,j} + {}'\Gamma^i_{jk} \,.\, v^k). \qquad /4.15/$$

Это означало бы, что преобразование $\overset{0}{x}(\tau) \to \overset{1}{x}(\tau_1)$ увлекает /деформирует/ все заданные структуры над базисной кривой $\overset{0}{x}(\tau)$ и их взаимосвязи в те же самые структуры и их взаимосвязи, но заданные над наблюдаемой кривой $\overset{1}{x}(\tau_1)$.

Можно показать, что необходимое и достаточное условие для выполнения /4.15/ задается равенством

$$\underset{\xi}{\pounds} F^{i} = -F^{i} + \frac{1}{w^{2}} \{F^{i} - (u^{i} + V^{i})\,[V^{j}(\log w)_{,j} + \frac{D}{d\tau}(\log w)] + \qquad /4.16/$$

$$+ V^{j}(u^{i} + V^{i})_{|j} + u^{j} V^{i}_{|j} + (u^{j} + V^{j})(u^{k} + V^{k}) \underset{\xi}{\pounds} \Gamma^{i}_{jk} \}.$$

Аналогичным способом можно получить и другое дополнительное условие[1], если вместо $\xi = \overset{1}{x}(\tau_{1}) - \overset{0}{x}(\tau)$ определим $v^{a} := (1/w).u^{a}$ и потребуем выполнения условия /4.15/. В этом случае преобразование $\overset{0}{x}(\tau) \to \overset{1}{x}(\tau_{1})$ так отображает /деформирует/ базисную кривую, что тангенциальные векторы к базисной и деформированной /наблюдаемой/ кривой пропорциональны между собой.

Авторы выражают благодарность Н.А.Черникову за обсуждение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Производные Ли аффинной связности Γ^{i}_{jk} в L_n с произвольным базисом

Производная Ли аффинной связности Γ^{i}_{jk} в L_n с координатным базисом определена, например, в [7]. Поэтому здесь рассмотрим только случай для произвольного некоординатного базиса $\{E_i\}$. Напомним, что при замене базиса $\{E_i\} \to \{E_{i'}\}$,

$$E_{i'} = A^{i}_{i'} . E_{i}, \ [\det\|A^{i}_{i'}\| \neq 0, \infty, \ \|A^{i'}_{i}\| = \|A^{k}_{k'}\|^{-1}],$$

связность в L_n преобразуется по формулам

$$\Gamma^{i}_{jk} \to \Gamma^{i'}_{j'k'} = A^{i'}_{i} . A^{j}_{j'} . A^{k}_{k'} . \Gamma^{i}_{jk} + A^{i'}_{i} . A^{i}_{j',k'} . \qquad /П.1/$$

Рассмотрим инфинитезимальное точечное преобразование в L_n:

$$x \to \bar{x}, \qquad /П.2/$$

где координаты $\bar{x}$ будут следующими:

$$\bar{x}^{a} := x^{a} + \epsilon\, \xi^{a}(x^{\beta}). \qquad /П.3/$$

Здесь ϵ - инфинитезимальный параметр, ξ^{a} - компоненты контравариантного C^{2}-вектора. Базис $\{E_{\bar{i}} := A_{\bar{i}}^{j} E_{j}\}$, где

$$A_{\bar{i}}^{j} := \delta^{\bar{i}}_{i}(\delta^{j}_{k} - \epsilon \Sigma^{j}_{k}), \ \ \Sigma^{i}_{k} := \xi^{i}_{,k} + C^{i}_{k\ell}\xi^{\ell}, \ \ \xi^{\ell} := A^{\ell}_{a}\xi^{a}, \qquad /П.4/$$

называют базисом, увлеченным точечной трансформацией /П.2/ /ср. с [6] /. Так определенные величины удовлетворяют равенствам

$$\underset{\xi}{\pounds} E_{i} := -\Sigma^{k}_{i} E_{k}, \ \ \delta^{\bar{j}}_{i} . E_{\bar{j}} := E_{i} + \epsilon \underset{\xi}{\pounds} E_{i} = \delta^{\bar{j}}_{i} . A^{k}_{\bar{j}} . E_{k} . \qquad /П.5/$$

Из /П.4/ следует

$$A^{\bar{i}}_{j} = \delta^{\bar{i}}_{k}(\delta^{k}_{j} + \epsilon \Sigma^{k}_{j}) \qquad /П.6/$$

/члены порядка ϵ^{2} дальше не рассматриваются/.

По определению, увлеченная /деформированная/ с помощью /П.2/ аффинная связность $'\Gamma^{i}_{jk}$ задается равенством /ср. [7] /

$$'\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}}(x) := \delta^{\bar{i}}_{i} . \delta^{j}_{\bar{j}} . \delta^{k}_{\bar{k}} . \Gamma^{i}_{jk}(\bar{x}). \qquad /П.7/$$

На основе /П.1/ и /П.7/ находим

$$'\Gamma^{i}_{jk}(x) = A^{i}_{\bar{i}}(x).A^{\bar{j}}_{j}(x).A^{\bar{k}}_{k}(x).\, \delta^{\bar{i}}_{i} . \delta^{j}_{\bar{j}} . \delta^{k}_{\bar{k}} . \Gamma^{i}_{jk}(\bar{x}) + A^{i}_{\bar{i}}(x).A^{\bar{i}}_{j,k}(x). \qquad /П.8/$$

Если поставим в последнее выражение /П.4/ и /П.6/ и используем тот факт, что

$$\Gamma^{p}_{qr}(\bar{x}) = \Gamma^{p}_{qr}(x) + \epsilon \xi^{m} \Gamma^{p}_{qr,m}(x), \qquad /П.9/$$

то получим

$$'\Gamma^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk} + \epsilon(-\Gamma^{n}_{jk}\Sigma^{i}_{n} + \Gamma^{i}_{nk}\Sigma^{n}_{j} + \Gamma^{i}_{jn}\Sigma^{n}_{k} + \Sigma^{i}_{j,k} + (E_{n}\Gamma^{i}_{jk})\xi^{n}). \qquad /П.10/$$

Производная Ли из Γ^{i}_{jk} по вектору ξ дается выражением [7]

$$\underset{\xi}{\pounds}\Gamma^{i}_{jk}(x) := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{'\Gamma^{i}_{jk}(x) - \Gamma^{i}_{jk}(x)}{\epsilon}, \qquad /П.11/$$

откуда получается

$$\underset{\xi}{\pounds}\Gamma^{i}_{jk} = -\Gamma^{n}_{jk}\Sigma^{i}_{n} + \Gamma^{i}_{nk}\Sigma^{n}_{j} + \Gamma^{i}_{jn}\Sigma^{n}_{k} + \Sigma^{i}_{j,k} + (E_{n}\Gamma^{i}_{jk})\xi^{n}. \qquad /П.12/$$

После замены обычных частных производных в /П.12/ ковариантными производными ($\xi^{i}_{,k} = \xi^{i}_{|k} - \Gamma^{i}_{nk}\xi^{n}$) с помощью надлежащих переработок полученных выражений получается равенство /1.1/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Манов С. ОИЯИ, Р2-12026, Дубна, 1978.
2. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. "Мир", М., 1977, т.1,2.
3. Мицкевич Н.В. Физические поля в общей теории относительности. "Наука", М., 1969.
4. Норден А.П. Пространства аффинной связности."Наука", М., 1976.
5. Синюков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств. "Наука", М., 1979.
6. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. "Наука", М., 1965.
7. Yano K. The Theory of Lie Derivatives and its Application North-Holl. Publ.Comp., Amsterdam, 1957.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 декабря 1983 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Илиев Б., Манов С. P2-83-897

Уравнения девиации в пространствах аффинной связности

Исследована связь между производными Ли и уравнениями девиации в пространствах аффинной связности. Получены уравнения девиации геодезических, а также негеодезических траекторий при наложении дополнительных условий на производные Ли от геометрических объектов, характеризующих базисные кривые.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Iliev B.Z., Manov S.S. P2-83-897

Deviation Equations in Spaces with Affine Connection

The connection between Lie derivatives and the deviation equations has been investigated in spaces L_n with affine connection. On this basis the deviation equations of the geodesics have been obtained as well as deviation equations of nongeodesic trajectories, through imposing certain conditions on the Lie derivatives with respect to the tangential vector of the basic trajectory.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой