2/IV-84

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

1608/84

P2-83-872

И.В.Полубаринов

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И РАССЛОЕНИЯ ХОПФА. ФУНКЦИИ ГРИНА

1983

I. В работах /I-I0/ рассматривались в классической и квантовой механике квадратичные преобразования координат, связанные с расслоениями Хопфа. Их можно также понимать как переход от декартовых координат к спинорным. Это приводит к вложению квантовой (и классической) динамики в пространства более высокой размерности с соответствующими констрайнтами. Такой переход может быть также интересен и в контексте все возрастающей роли спиноров в квантовой и классической теории (например суперсимметрии, формализм твисторов) и предложений повсеместного перехода от декартовых координат к спинорам (см./II-I5/).

В квантовой механике ситуация оказывается наиболее прозрачной в шредингеровской картине. Ниже мы рассмотрим функции Грина для уравнения Шредингера в 2-мерном, 3-мерном и 5-мерном пространствах и выразим их соответственно через функции Грина в 2-мерном, 4-мерном и 8-мерном (спинорных) пространствах. При этом исходные потенциалы превращаются в некоторые другие, которые могут быть проще исходных. Так, кулоновский потенциал переходит в потенциал осцилляторный.

2. Преобразования (замены переменных), которые нас интересуют, отображают 2p-мерное пространство на p+I-мерное, $R^{2p} \to R^{p+I}$ ($p = 2^q = I,2,4$).

I) $R^2 \to R^2$ (p=I): $x_0 = u\sigma_3 u = u_1^2 - u_2^2,\ x_1 = u\sigma_1 u = 2u_1u_2$, (I)

где u - вещественный двухкомпонентный спинор $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, а σ_m - матрицы Паули. При каждом фиксированном $r = |\vec{x}| = \rho = u_\mu u_\mu$ осуществляется 2-кратное накрытие окружности окружностью[x]

$$S^1_\rho \to RP^1 = S^1_r \text{ (слой - пара точек } u \text{ и } -u \text{).} \qquad (2)$$

2) $R^4 \to R^3$ (p=2): $x_m = \xi^* \sigma_m \xi\ (m = 1,2,3),\quad r = \xi^*\xi$, (3)

---

x RP^I, CP^I, QP^I и OP^I обозначают так называемые вещественное комплексное, кватернионное и октонионное проективные пространства (линии, плоскости).

где ξ – комплексный двухкомпонентный спинор:

$$\xi=\begin{pmatrix}a_0+ia_1\\ a_0'+ia_1'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1+iu_2\\ u_3+iu_4\end{pmatrix}=\sqrt{r}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\varphi_1}\\ \sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\varphi_2}\end{pmatrix}=\sqrt{r}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\,e^{\frac{i}{2}(\alpha-\varphi)}\\ \sin\frac{\theta}{2}\,e^{\frac{i}{2}(\alpha+\varphi)}\end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$0\le r\le\infty,\quad 0\le\theta\le\pi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\alpha\le 4\pi,$$

$$\begin{aligned} x_1&=2(a_0a_0'+a_1a_1')=r\sin\theta\cos\varphi,\\ x_2&=2(a_0a_1'-a_1a_0')=r\sin\theta\sin\varphi,\\ x_3&=a_0^2+a_1^2-a_0'^2-a_1'^2=r\cos\theta,\\ r&=\bar{\xi}\xi=a_0^2+a_1^2+a_0'^2+a_1'^2=\rho^2. \end{aligned} \tag{5}$$

При каждом фиксированном r осуществляется расслоение Хопфа[x]

$$S^3_\rho\to CP^1=S^2_r\quad(\text{слой } S^1=SO(2)=U(1)). \tag{6}$$

3) $R^8\to R^5$ (p=4): $x_\mu=\psi^*\gamma_\mu\psi$ $(\mu=1,2,3,4,5)$, $r=\psi^*\psi=\rho^2$, (7)

где γ_μ – 4x4 матрицы Дирака, а ψ – комплексный 4-компонентный спинор:

$$\psi=\begin{pmatrix}a_0+ia_1\\ a_2+ia_3\\ a_0'+ia_1'\\ a_2'+ia_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1+iu_2\\ u_3+iu_4\\ u_5+iu_6\\ u_7+iu_8\end{pmatrix}=\sqrt{r}\begin{pmatrix}\cos\frac{\eta}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}\,e^{i\varphi_1}\\ \cos\frac{\eta}{2}\sin\frac{\theta_1}{2}\,e^{i\varphi_2}\\ \sin\frac{\eta}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\,e^{i\varphi_3}\\ \sin\frac{\eta}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\,e^{i\varphi_4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\eta}{2}\xi_1\\ \sin\frac{\eta}{2}\xi_2\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Звездочка обозначает комплексное сопряжение. В этом случае при каждом фиксированном $r=\rho^2=u_\mu u_\mu=\psi^*\psi$ осуществляется расслоение Хопфа

$$S^7_\rho\to QP^1=S^4_r\quad(\text{слой } S^3=SU(2)=Sp(1)). \tag{9}$$

Можно также рассматривать отображение

4) $R^{16}\to R^9$ (p=8) такое, что при каждом фиксированном $r=\rho^2$ осуществляется расслоение Хопфа

$$S^{15}_\rho\to OP^1=S^8\quad(\text{слой } S^7). \tag{10}$$

Однако здесь ситуация усложняется.

---

[x] Расслоения (6), (9)(вида (3) и (7)) и (10) суть отображения Хопфа с инвариантом Хопфа, равным 1 /16/ (см. также /17-19/).

3. Функции Грина для уравнения Шредингера мы определяем (и нормируем) следующим образом:

$$G_{\substack{ret\\adv}}(\vec{x},\vec{x}_0,t)=\pm\theta(\pm t)\langle\vec{x}|e^{-i\hbar^{-1}\hat{H}t}|\vec{x}_0\rangle=\frac{1}{2\pi\hbar}\int dE\,e^{-i\hbar^{-1}Et}G_{\substack{ret\\adv}}(\vec{x},\vec{x}_0,E), \tag{11}$$

так что они удовлетворяют уравнениям Шредингера

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H\right)G_{\substack{ret\\adv}}(\vec{x},\vec{x}_0,t)=i\hbar\delta(t)\delta^{p+1}(x-x_0), \tag{12}$$

$$(H-E)\,G_{\substack{ret\\adv}}(\vec{x},\vec{x}_0,E)=-i\hbar\delta^{p+1}(x-x_0), \tag{13}$$

где

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{(p+1)}-\frac{e^2}{r}\quad\text{или}\quad H=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{(p+1)}+V(\vec{x})\equiv-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{(p+1)}-\frac{e^2}{r}+W(\vec{x}), \tag{14}$$

$\vec{x}$ – (p+1)-мерный вектор, $\Delta_{(p+1)}$ – оператор Лапласа в (p+1)-мерном пространстве переменных $\vec{x}$, $\delta^{p+1}(x-x_0)$ – (p+1)-мерная δ-функция, p=1,2,4, $V(\vec{x})$ – потенциал вида $-\frac{e^2}{r}+W(\vec{x})$, где $W(\vec{x})$ – любой потенциал. Отметим, что

$$D(\vec{x},\vec{x}_0,t)=\langle\vec{x}|e^{-i\hbar^{-1}\hat{H}t}|\vec{x}_0\rangle=G_{ret}-G_{adv}. \tag{15}$$

Эта функция удовлетворяет однородному уравнению Шредингера.

В соответствии с подходом, изложенным в /9/, уравнение Шредингера (13) можно заменить уравнением Шредингера в R^N с N=2p=2,4,8:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{(2p)}-4e^2+4Wu^2-4Eu^2\right]\tilde{G}_{\substack{ret\\adv}}(u,u_0,e^2)=-i\hbar\delta^{2p}(u-u_0), \tag{16}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\tilde{G}_{\substack{ret\\adv}}(u,u_0,s)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{(2p)}+4Wu^2-4Eu^2\right]\tilde{G}_{\substack{ret\\adv}}(u,u_0,s)+i\hbar\delta(s)\delta^{2p}(u-u_0), \tag{17}$$

$$\tilde{G}_{\substack{ret\\adv}}(u,u_0,e^2)=\int ds\,e^{i\hbar^{-1}4e^2s}\tilde{G}_{\substack{ret\\adv}}(u,u_0,s). \tag{18}$$

В этих соотношениях u – 2p-мерный вектор, $\Delta_{(2p)}$ – оператор Лапласа в 2p-мерном пространстве переменных u, $\delta^{2p}(u-u_0)$ – 2p-мерная δ-функция, $u^2=u_\mu u_\mu=\rho^2$ ($\rho=\sqrt{r}$ – радиальная переменная). При переходе от уравнений (12) и (13) к уравнениям (16) и (17) потенциал изменяется согласно

$$V(\vec{x})=-\frac{e^2}{r}+W(\vec{x})\to\tilde{V}(u)=4W\rho^2-4E\rho^2, \tag{19}$$

где подразумевается, что в последнем выражении $\vec{x}$ в W выражен через u, т.е. $W(\vec{x})=W(u\vec{\sigma}u)$ при p=1, $W(\vec{x})=W(\xi^*\vec{\sigma}\xi)$ при p=2 и $W(\vec{x})=W(\psi^*\vec{\gamma}\psi)$ при p=4. Обратим внимание на то, что E и e^2 поменялись ролями: E теперь входит в выражение типа потенциала 2p-мерного осциллятора (но с E любого знака), а e^2 служит как бы новой энергетической переменной. В кулоновском случае (W =0) $\tilde{V}$ оказывается чисто осцилляторным потенциалом.

Искомые функции Грина $G_{\substack{ret\\adv}}(\vec{x},\vec{x}_0,E)$ получаются путем интегрирования (или суммирования) по слою[9]:

$$G_{\substack{ret\\adv}}(\vec{x},\vec{x}_0,E)=\frac{\gamma}{\Omega^2}\int\limits_{слой} d^{p-1}\Omega\, d^{p-1}\Omega_0\, \tilde{G}_{\substack{ret\\adv}}(u,u_0,e^2)=$$

$$=\frac{\gamma}{\Omega^2}\int\limits_{слой} d^{p-1}\Omega\, d^{p-1}\Omega_0 \int ds\, e^{i4\hbar^{-1}e^2 s}\,\tilde{G}_{\substack{ret\\adv}}(u,u_0,s)\,, \qquad (20)$$

где γ - коэффициент, входящий в соотношение между δ-функциями $\delta^{p+1}(x-x_0)$ и $\delta^{2p}(u-u_0)$:

$$\delta^{p+1}(x-x_0)=\frac{\gamma}{4r}\,\frac{1}{\Omega}\int\limits_{слой} d^{p-1}\Omega\,\delta^{2p}(u-u_0)\,. \qquad (21)$$

В соответствии с конструкцией слоев (см. формулы (2),(6) и (9), а также приложение А) имеем

$$\delta^3(x-x_0)=\frac{1}{16r}\int\limits_0^{4\pi} d\alpha\,\delta^4(u-u_0)\,, \quad \gamma=\pi \quad \text{при } p=2\,, \qquad (22)$$

$$\left(d^4u=\frac{1}{16r}\,d^3x\, d\alpha\ ^{x}\right), \qquad (23)$$

$$\delta^5(x-x_0)=\frac{1}{2^5 r}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta_1\, d\theta_1\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_1\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_2\,\delta^8(u-u_0)\,, \quad \gamma=\pi^2 \quad \text{при } p=4\,. \qquad (24)$$

В последнем выражении подразумевается, что слой (сфера S^3) параметризован углами Эйлера (см. приложение А). Разумеется, можно использовать и любую другую параметризацию. Параметрами слоя S^3 могут служить угловые переменные одного из спиноров ξ_1 или ξ_2 в (8).

4. В случае p=I (двумерное уравнение Шредингера[xx]) слой состоит из двух точек u и $-u$, и мы получаем

$$G_{\substack{ret\\adv}}(\vec{x},\vec{x}_0,E)=\sum_{\lambda=-1,1(слой)}\tilde{G}_{\substack{ret\\adv}}(\lambda u,u_0,e^2)=\tilde{G}_{\substack{ret\\adv}}(u,u_0,e^2)+\tilde{G}_{\substack{ret\\adv}}(-u,u_0,e^2)=$$

$$=\int ds\, e^{i4\hbar^{-1}e^2 s}\left[\tilde{G}_{\substack{ret\\adv}}(u,u_0,s)+\tilde{G}_{\substack{ret\\adv}}(-u,u_0,s)\right]. \qquad (25)$$

К тому же результату можно прийти и более просто. Если в уравнении (I3) перейти к переменным u и воспользоваться следующим соотношением для δ-функций (см. приложение Б):

$$\delta^2(x-x_0)=\frac{1}{4r}\left[\delta^2(u-u_0)+\delta^2(u+u_0)\right], \qquad (26)$$

прийдем к уравнению

$$(\tilde{H}-4e^2)G_{\substack{ret\\adv}}(\vec{x},\vec{x}_0,E)=-i\hbar\left[\delta^2(u-u_0)+\delta^2(u+u_0)\right], \qquad (27)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\tilde{G}}_{\substack{ret\\adv}}(u,u_0,s)=\tilde{H}\tilde{\tilde{G}}_{\substack{ret\\adv}}(u,u_0,s)+i\hbar\delta(s)\left[\delta^2(u-u_0)+\delta^2(u+u_0)\right], \qquad (28)$$

x См. приложение А.

xx О двумерном атоме водорода см.[23] и цитируемую там литературу.

$$\tilde{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_u+4Wu^2-4Eu^2\,, \qquad (29)$$

$$G_{\substack{ret\\adv}}(\vec{x},\vec{x}_0,E)\equiv\tilde{\tilde{G}}_{\substack{ret\\adv}}(u,u_0,e^2)=\int ds\, e^{i4\hbar^{-1}e^2 s}\,\tilde{\tilde{G}}_{\substack{ret\\adv}}(u,u_0,s)\,. \qquad (30)$$

Решение уравнения (28) есть

$$\tilde{\tilde{G}}_{\substack{ret\\adv}}(u,u_0,s)=\pm\theta(\pm s)\,e^{-i\hbar^{-1}\tilde{H}s}\left[\delta^2(u-u_0)+\delta^2(u+u_0)\right]=$$

$$=\tilde{G}_{\substack{ret\\adv}}(u,u_0,s)+\tilde{G}_{\substack{ret\\adv}}(-u,u_0,s)\,, \qquad (31)$$

и мы снова получаем выражение (25) с суммированием по слою.

5. В случае кулоновского потенциала уравнения (I6) и (I7) суть уравнения для 2p-мерного осциллятора (2p=2,4,8), и функции $\tilde{G}_{\substack{ret\\adv}}(u,u_0,s)$ имеют вид

$$\tilde{G}_{\substack{ret\\adv}}(u,u_0,s)=\pm\theta(\pm s)\left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar i\sin\omega s}\right)^p e^{i\frac{m\omega}{2\hbar\sin\omega s}\left[(u^2+u_0^2)\cos\omega s-2u\cdot u_0\right]}, \qquad (32)$$

где $\omega=2\sqrt{\frac{-2E}{m}}$. В результате мы имеем функции Грина $G_{\substack{ret\\adv}}(\vec{x},\vec{x}_0,E)$ в явном виде:

$$G_{\substack{ret\\adv}}(\vec{x},\vec{x}_0,E)=\pm\frac{\gamma}{\Omega}\int d^{p-1}\Omega\int\limits_0^{\infty}ds\, e^{\pm i4\hbar^{-1}e^2 s}\left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar i\sin\omega s}\right)^p\times$$

$$\times e^{\pm i\frac{m\omega}{2\hbar\sin\omega s}\left[(u^2+u_0^2)\cos\omega s-2u\cdot u_0\right]}. \qquad (33)$$

Функции (32) и (33) можно выразить через спиноры Паули и Дирака

$$p=2\,,\quad u^2=r=\xi^*\xi\,,\quad u_0^2=r_0=\xi_0^*\xi_0\,,\quad 2u\cdot u_0=\xi^*\xi_0+\xi_0^*\xi\,, \qquad (34)$$

$$p=4\,,\quad u^2=r=\psi^*\psi\,,\quad u_0^2=r_0=\psi_0^*\psi_0\,,\quad 2u\cdot u_0=\psi^*\psi_0+\psi_0^*\psi\,. \qquad (35)$$

Подробнее о случае p=2 см. в[6-9], о случае p=4 см. ниже.

Двумерную (p=I) кулоновскую функцию Грина можно привести к виду

$$G_{\substack{ret\\adv}}(\vec{x},\vec{x}_0,E)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{m}{2\pi\hbar i}\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{d\sigma}{\operatorname{sh}\sigma}\, e^{\pm 2i\nu\sigma}\left\{e^{\pm\frac{ik}{\operatorname{sh}\sigma}\left[(u^2+u_0^2)\operatorname{ch}\sigma-2u\cdot u_0\right]}+e^{\pm\frac{ik}{\operatorname{sh}\sigma}\left[(u^2+u_0^2)\operatorname{ch}\sigma+2u\cdot u_0\right]}\right\} & \text{при } E>0\,,\\[2ex] \dfrac{m}{2\pi\hbar i}\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{d\sigma}{\operatorname{sh}\sigma}\, e^{2\nu\sigma}\left\{e^{-\frac{\varkappa}{\operatorname{sh}\sigma}\left[(u^2+u_0^2)\operatorname{ch}\sigma-2u\cdot u_0\right]}+e^{-\frac{\varkappa}{\operatorname{sh}\sigma}\left[(u^2+u_0^2)\operatorname{ch}\sigma+2u\cdot u_0\right]}\right\} & \text{при } E<0\,,\end{cases} \qquad (36)$$

где $k=\hbar^{-1}\sqrt{2mE}$, $\varkappa=\hbar^{-1}\sqrt{-2mE}$, $\nu=\frac{e^2m}{\hbar\sqrt{2m|E|}}$. В свободном случае ($\nu=0$) эти выражения сводятся (см. приложение В) к хорошо известным:

$$G^0_{\substack{ret\\adv}}(\vec{x},\vec{x}_0,E)=\begin{cases}\pm\dfrac{m}{2\hbar}H_0^{\binom{1}{2}}(k|\vec{x}-\vec{x}_0|) & \text{при } E>0\,,\\[1ex] -\dfrac{im}{\pi\hbar}K_0(\varkappa|\vec{x}-\vec{x}_0|) & \text{при } E<0\,,\end{cases} \qquad (37)$$

x $G_{ret}(\vec{x},\vec{x}_0,E)$ (33) можно свести[6] к кулоновской функции Грина, полученной Швингером[21] на основе подхода Фока[20].

$$D^\circ(\vec{x},\vec{x}_0,E)=G^\circ_{ret}-G^\circ_{adv}=\begin{cases}\frac{m}{\hbar}J_0(k|\vec{x}-\vec{x}_0|) & \text{при } E>0\\ 0 & \text{при } E<0\end{cases} \quad (38)$$

6. Случай 3-мерного пространства $\vec{x}$ рассмотрен в рамках спинорного формализма в /9,10/. О проблеме N тел см./10/. Остановимся теперь на спинорной технике в случае 5-мерного пространства $\vec{x}$. Важную роль в этом формализме играет соотношение полноты для γ-матриц Дирака

$$4\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}=\sum_A(\gamma^A)_{\alpha\delta}(\gamma^A)_{\gamma\beta}, \quad (39)$$

из которого, в частности, мы можем получить следующие тождества Фирца с одним и двумя спинорами:

$$(\psi^*\psi)^2=\sum_{\mu=1}^{5}(\psi^*\gamma_\mu\psi)^2, \quad (40)$$

$$(\psi^*\psi')^2=\sum_{\mu=1}^{5}(\psi^*\gamma_\mu\psi')^2,\quad (\psi'^*\psi)^2=\sum_{\mu=1}^{5}(\psi'^*\gamma_\mu\psi)^2, \quad (41)$$

$$2(\psi^*\psi)(\psi'^*\psi')=\sum_{\mu=1}^{5}(\psi'^*\gamma_\mu\psi)(\psi^*\gamma_\mu\psi')+(\psi'^*\psi)(\psi^*\psi')+2(\psi^*B\psi'^*)(\psi B\psi'), \quad (42)$$

где ψ^* - комплексно-сопряженный спинор (не $\overline{\psi}=\psi^*\gamma_4$), γ_μ - матрицы Дирака в представлении Паули (см. приложение Г), B есть матрица

$$B=C\gamma_5=\gamma_5C=\gamma_1\gamma_3=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \quad (43)$$

($C=\gamma_2\gamma_4$ - известная матрица зарядового сопряжения) со свойствами

$$B^{-1}=B^T=-B,\quad B^2=-1,\quad B^{-1}\gamma_\mu B=\gamma_\mu^T,\quad B\gamma_\mu B=-\gamma_\mu^T\ (\mu=1,\dots,5). \quad (44)$$

Вывод тождеств (40)-(42) дан в приложении Г. Тождество (40) означает просто, что $\vec{x}^2=r^2$, т.е. что действительно при отображении (7) сфера S^7 : $\psi^*\psi=\rho^2$, радиуса ρ отображается на сферу S^4 (база): $\vec{x}^2=r^2$, радиуса $r=\rho^2$. Комбинируя очевидным образом тождества (41) и (42), получаем тождество 8 квадратов в спинорной записи:

$$4(\psi^*\psi)(\psi'^*\psi')=\sum_{\mu=1}^{5}(\psi'^*\gamma_\mu\psi+\psi^*\gamma_\mu\psi')^2-(\psi'^*\psi-\psi^*\psi')^2+4(\psi^*B\psi'^*)(\psi B\psi'), \quad (45)$$

которое будет использоваться в дальнейшем.

Найдем закон $SU(2)$-преобразований над спинорами ψ на слое. Эти преобразования имеют простой вид в кватернионном формализме. В кватернионной записи координаты $\vec{x}\in R^5$ задаются

$$\underset{\sim}{x}=2\overline{\underset{\sim}{a}}\underset{\sim}{a}',\quad x_4=\overline{\underset{\sim}{a}}\underset{\sim}{a}-\overline{\underset{\sim}{a}}'\underset{\sim}{a}',\quad r=\overline{\underset{\sim}{a}}\underset{\sim}{a}+\overline{\underset{\sim}{a}}'\underset{\sim}{a}', \quad (46)$$

где $\underset{\sim}{x}=x_\mu e_\mu$, $\underset{\sim}{a}=a_\mu e_\mu$, $\underset{\sim}{a}'=a'_\mu e_\mu$ ($\mu=0,1,2,3$) - кватернионы, $\overline{\underset{\sim}{a}}=a_0e_0-a_me_m$, $\overline{\underset{\sim}{a}}'=a'_0e_0-a'_me_m$ ($m=1,2,3$) - сопряженные кватернионы. Подразумевается, что вещественные числа a_μ и a'_μ здесь - те же самые, что и в (8). Кватернионные единицы e_μ подчиняются алгебре

$$e_0^2=e_0,\quad e_je_k=-\delta_{jk}e_0+\varepsilon_{jkl}e_l \quad (47)$$

(ε_{jkl} - полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon_{123}=1$), и легко найти явные выражения для x_μ в терминах a_μ и a'_μ:

$$\begin{aligned}x_0&=2a_\mu a'_\mu,\\ x_j&=2(a_0a'_j-a_ja'_0-\varepsilon_{jkl}a_ka'_l)\quad (j=1,2,3),\\ x_4&=a_\mu a_\mu-a'_\mu a'_\mu.\end{aligned} \quad (48)$$

Между этими координатами x_μ ($\mu=0,1,\dots,4$) и координатами $x_\mu=\psi^*\gamma_\mu\psi$ ($\mu=1,2,3,4,5$) с ψ вида (8) (в переменных a_μ и a'_μ) имеются следующие несущественные отличия в обозначениях:

x_μ вида (48)	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
обозначение тех же выражений в терминах $x_\mu=\psi^*\gamma_\mu\psi$	x_5	x_3	$-x_2$	x_1	x_4

(49)

Если угодно, можно добиться совпадения координат $x_j=\psi^*\gamma_j\psi$ ($j=1,2,3$) с выражениями (48) путем замены в матрицах γ_μ (Г.1) матриц Паули σ_m матрицами

$$\hat{\sigma}_1=\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \hat{\sigma}_2=-\sigma_2=\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix},\quad \hat{\sigma}_3=\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}. \quad (50)$$

Алгебры матриц $\hat{\sigma}_m$ и матриц Паули σ_m совпадают:

$$\sigma_j\sigma_k=\varepsilon_{jkl}\sigma_l,\qquad \hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k=\varepsilon_{jkl}\hat{\sigma}_l. \quad (51)$$

В терминах кватернионов преобразования на слое суть преобразования $Sp(1)$ и имеют вид

$$\underset{\sim}{a}\to\widetilde{\underset{\sim}{a}}=\underset{\approx}{z}\underset{\sim}{a},\quad \underset{\sim}{a}'\to\widetilde{\underset{\sim}{a}}'=\underset{\approx}{z}\underset{\sim}{a}',\quad |\underset{\approx}{z}|^2=\overline{\underset{\approx}{z}}\underset{\approx}{z}=1, \quad (52)$$

где $\underset{\approx}{z}$ - кватернион, $\underset{\approx}{z}=z_\mu e_\mu$, а z_0,z_1,z_2,z_3 - вещественные параметры. Очевидно, что

$$\widetilde{\underset{\sim}{x}}=2\overline{\widetilde{\underset{\sim}{a}}}\widetilde{\underset{\sim}{a}}'=2\overline{\underset{\sim}{a}}\,\overline{\underset{\approx}{z}}\underset{\approx}{z}\underset{\sim}{a}'=2\overline{\underset{\sim}{a}}\underset{\sim}{a}'=\underset{\sim}{x},\quad \widetilde{x}_4=x_4,\quad \widetilde{r}=r. \quad (53)$$

Отсюда каждая из координат инвариантна относительно преобразований на слое

$$\widetilde{x}_\mu=x_\mu\qquad (\mu=0,1,2,3,4). \quad (54)$$

На языке спиноров ψ закон преобразования (52) принимает вид (см. приложение Д)

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}&=\zeta_1^*\psi-\zeta_2B\psi^*,\quad \widetilde{\psi}^*=\zeta_1\psi^*+\zeta_2^*\psi B,\\ \zeta_1&=z_0+iz_1,\quad \zeta_2=z_2+iz_3,\quad |\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2=1,\end{aligned} \quad (55.a)$$

$$\tilde{\xi}_j = \zeta_1^* \xi_j + i\zeta_2 \sigma_2 \xi_j^* , \qquad \tilde{\xi}_j^* = \zeta_1 \xi_j^* - i\zeta_2^* \xi_j \sigma_2 . \tag{55.б}$$

Это преобразование можно представить как преобразование при помощи унитарной матрицы следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}_{j1} \\ \tilde{\xi}_{j2}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 - iz_1 & z_2 + iz_3 \\ -(z_2 - iz_3) & z_0 + iz_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{j1} \\ \xi_{j2}^* \end{pmatrix} . \tag{55.в}$$

(Например, при $j=1$ $\xi_{11} = a_0 + ia_1$, $\xi_{12}^* = a_2 - ia_3$.)
Легко убедиться, что $SU(2)$-преобразования (55.а) действительно оставляют инвариантной каждую из координат

$$\tilde{\psi}^* \gamma_\mu \tilde{\psi} = (|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2)\psi^* \gamma_\mu \psi = \psi^* \gamma_\mu \psi , \qquad \tilde{x}_\mu = x_\mu \ (\mu = 1,2,3,4,5),$$
$$\tilde{r} = \tilde{\psi}^* \tilde{\psi} = (|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2)\psi^*\psi = \psi^*\psi = r . \tag{56}$$

С помощью тождества 8 квадратов (45) можно следующим образом преобразовать лагранжиан

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}\dot{\vec{x}} + \frac{e^2}{r} = 2m(\psi^*\psi)(\dot{\psi}^*\dot{\psi}) + \frac{m}{2}(\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi)^2 -$$
$$- 2m(\psi^* B \dot{\psi}^*)(\psi B \dot{\psi}) + \frac{e^2}{\psi^*\psi} . \tag{57}$$

(Можно взять любой другой потенциал $V(r) = V(\psi^*\psi)$ или $V(\vec{x}) = V(\psi^*\vec{\gamma}\psi)$.)
Лагранжиан (57) инвариантен относительно калибровочных $SU(2)$-преобразований (55.а), причем ζ_1 и ζ_2 – произвольные функции от t.
Если отбросить второй и третий члены, придем к лагранжиану (ср. /9/)

$$\tilde{L} = 2m(\psi^*\psi)(\dot{\psi}^*\dot{\psi}) + \frac{e^2}{\psi^*\psi} . \tag{58}$$

Он инвариантен только относительно $SU(2)$-преобразований (55.а) с не зависящими от t параметрами ζ_1 и ζ_2. Эта инвариантность ведет к законам сохранения[x]

$$\frac{d}{dt}[(\psi^*\psi)(\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi)] = 0, \quad \frac{d}{dt}(\psi^*\psi)(\psi B\dot{\psi}) = 0 , \quad \frac{d}{dt}(\psi^*\psi)(\psi^* B\dot{\psi}^*) = 0 \tag{59}$$

(три вещественных закона сохранения), что позволяет принять дополнительные условия (д.у.)

$$\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi = 0 , \quad \psi B \dot{\psi} = 0 , \quad \psi^* B \dot{\psi}^* = 0 , \tag{60}$$

гарантирующие соответствие с первоначальной теорией. Из лагранжиана (60) следует уравнение движения вида (ср. с /1,2,9/)

$$2m\overset{\circ\circ}{\psi} - H\psi = 0 \qquad \left(\overset{\circ}{\psi} = \frac{d\psi}{ds} , ds = \frac{dt}{r} = \frac{dt}{\psi^*\psi} \right), \tag{61}$$

где H – гамильтониан. В классике при фиксированной энергии это уравнение является линейным уравнением для 8-мерного осциллятора.

---

[x] По теореме Э.Нетер. При параметризации $\zeta_1 = \cos\frac{d}{2}e^{i\beta}$, $\zeta_2 = \sin\frac{d}{2}e^{i\gamma}$ нужно рассмотреть вариации $\delta\zeta_1 = i\beta, \delta\zeta_2 = \frac{d}{2}e^{i\gamma}$ с произвольным γ .

В 2-мерном случае сразу получается лагранжиан $L = 2m(uu)(\dot{u}\dot{u})$ без лишних членов и уравнение Леви-Чивиты $2m\overset{\circ\circ}{u} - Hu = 0$.

В квантовой механике в шредингеровской картине аналогами д.у. (60) служат условия совместности

$$\left(\psi\frac{\partial}{\partial\psi} - \psi^*\frac{\partial}{\partial\psi^*}\right)\langle\psi,\psi^*|\rangle = 0, \quad \psi B\frac{\partial}{\partial\psi^*}\langle\psi,\psi^*|\rangle = 0, \quad \psi^* B\frac{\partial}{\partial\psi}\langle\psi,\psi^*|\rangle = 0, \tag{62}$$

выделяющие интересующие нас функции и возникающие при разрешении относительно $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ переопределенной системы

$$\frac{\partial}{\partial\psi_\alpha} = \frac{\partial x_\mu}{\partial\psi_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\mu} , \quad \frac{\partial}{\partial\psi_\alpha^*} = \frac{\partial x_\mu}{\partial\psi_\alpha^*}\frac{\partial}{\partial x_\mu} . \tag{63}$$

Решение этой системы имеет вид

$$2r\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \psi\gamma_\mu^T\frac{\partial}{\partial\psi} + \psi^*\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial\psi^*} \tag{64}$$

и отсюда (с применением тождества 8 квадратов)

$$\Delta_{(5)} \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{1}{4r}\Delta_{(8)} \equiv \frac{1}{\psi^*\psi}\frac{\partial}{\partial\psi_\alpha}\frac{\partial}{\partial\psi_\alpha^*} = \frac{1}{4r}\frac{\partial}{\partial u_\mu}\frac{\partial}{\partial u_\mu} , \tag{65}$$

то и другое в рамках условий совместности. На соотношении (65) между лапласианами $\Delta_{(5)}$ и $\Delta_{(8)}$ и основан переход от уравнения Шредингера (13) к уравнению Шредингера (16). Отметим, что дифференциальные операторы, входящие в (62), образуют алгебру $SU(2)$. Интегрирование по слою выделяет требуемую этими условиями инвариантную относительно $SU(2)$ компоненту.

Произведя в тождестве 8 квадратов (45) замену $\psi \to \psi + \psi_0, \psi' \to \psi - \psi_0$, приходим к тождеству

$$(\psi^* + \psi_0^*, \psi + \psi_0)(\psi^* - \psi_0^*, \psi - \psi_0) = \sum_{\mu=1}^{5}(\psi^*\gamma_\mu\psi - \psi_0^*\gamma_\mu\psi_0)^2 - (\psi^*\psi_0 - \psi_0^*\psi)^2 +$$
$$+ 4(\psi^* B\psi_0^*)(\psi B\psi_0) \tag{66}$$

и с учетом того, что $(\psi^* \pm \psi_0^*, \psi \pm \psi_0) = r + r_0 \pm (\psi^*\psi_0 + \psi_0^*\psi)$, – к тождеству

$$2(rr_0 + \vec{x}\vec{x}_0) = (\psi^*\psi_0 + \psi_0^*\psi)^2 - (\psi^*\psi_0 - \psi_0^*\psi)^2 + 4(\psi^* B\psi_0^*)(\psi B\psi_0) =$$
$$= 4(\psi^*\psi_0)(\psi_0^*\psi) + 4(\psi^* B\psi_0^*)(\psi B\psi_0), \tag{67}$$

которое понадобится в дальнейшем. Для нас окажется важным, что правая часть здесь есть сумма четырех квадратов вещественных чисел. Левая и правая части тождества (67) независимо инвариантны относительно преобразований вида (55.а) на слое: 1) над ψ и ψ^* при неизменных ψ_0 и ψ_0^* (левая часть инвариантна согласно (56), а инвариантность правой легко проверяется), 2) над ψ_0 и ψ_0^* при неизменных ψ и ψ^* , 3) над ψ и ψ^* и над ψ_0 и ψ_0^* одновременно с различными в общем случае параметрами ζ_1, ζ_2 и $\zeta_1^\circ, \zeta_2^\circ$.

Ниже при преобразовании свободной функции Грина к переменным 8-мерного пространства нам понадобится следующее представление функций Бесселя:

$$\frac{J_1\left(w\sqrt{2(\tau\tau_0+\vec{x}\vec{x}_0)}\right)}{w\sqrt{2(\tau\tau_0+\vec{x}\vec{x}_0)}}=\frac{1}{2\pi^2}\int d^4z\,\delta(z_\mu z_\mu-1)\,e^{-iw(\psi^*\psi_0+\psi_0^*\psi)}, \qquad (68.а)$$

$$\frac{I_1\left(w\sqrt{2(\tau\tau_0+\vec{x}\vec{x}_0)}\right)}{w\sqrt{2(\tau\tau_0+\vec{x}\vec{x}_0)}}=\frac{1}{2\pi^2}\int d^4z\,\delta(z_\mu z_\mu-1)\,e^{-w(\psi^*\psi_0+\psi_0^*\psi)}, \qquad (68.б)$$

где интеграл по вещественному 4-вектору z_μ (μ =0,I,2,3) и есть интеграл по слою $S^3=SU(2)=Sp(1)$. При такой записи мы избегаем необходимости заранее отдавать предпочтение тем или иным угловым переменным. Комбинация $\psi^*\psi_0+\psi_0^*\psi$ зависит от переменных слоя. Согласно (55.а) можно представить

$$\psi=\zeta_1^*\psi_f-\zeta_2B\psi_f^*,\quad \psi^*=\zeta_1\psi_f^*+\zeta_2^*\psi_fB\quad (\zeta_1=z_0+iz_1,\ \zeta_2=z_2+iz_3), \qquad (69)$$

$$\psi^*\psi_0+\psi_0^*\psi=(\zeta_1\psi_f^*+\zeta_2^*\psi_fB)\psi_0+\psi_0^*(\zeta_1^*\psi_f-\zeta_2B\psi_f^*)=A_\mu z_\mu, \qquad (70)$$

$$A_0=\psi_f^*\psi_0+\psi_0^*\psi_f,\ A_1=i(\psi_f^*\psi_0-\psi_0^*\psi_f),\ A_2=\psi_f^*B\psi_0^*+\psi_fB\psi_0,\ A_3=i(\psi_f^*B\psi_0^*-\psi_fB\psi_0), \qquad (7I)$$

где ψ_f (и ψ_f^*) - спинор в какой-либо закрепленной калибровке (как-то закреплены три переменные слоя S^3)[x], A_μ - четыре вещественные комбинации, квадраты которых составляют правую часть тождества (67). Теперь для правой части, скажем, (68.б) имеем

$$\int d^4z\,\delta(z_\mu z_\mu-1)e^{-wA_\mu z_\mu}=\int_0^\infty|z|^3d|z|\int_0^\pi\sin^2\alpha\,d\alpha\int_0^\pi\sin\beta\,d\beta\int_0^{2\pi}d\gamma\,\delta(|z|^2-1)e^{-w\sqrt{A_\mu A_\mu}\cos\alpha}=$$
$$=2\pi\int_0^\pi\sin^2\alpha\,d\alpha\,e^{-w\sqrt{A_\mu A_\mu}\cos\alpha}=2\pi^2\frac{I_1(w\sqrt{A_\mu A_\mu})}{w\sqrt{A_\mu A_\mu}} \qquad (72)$$

(см. /22/, стр. 94), где для z_μ была выбрана обычная сферическая система координат с полярной осью вдоль 4-вектора A_μ. Величина $A_\mu A_\mu$ - это правая часть тождества (67), причем, поскольку она калибровочно инвариантна, можно опустить у ψ_f значок f и снова рассматривать ψ в произвольной калибровке.

Аналогично можно поступить и с ψ_0, вместо ψ, или одновременно с ψ и ψ_0. В последнем случае мы получили бы интеграл по двум сферам S^3: по 8 переменным z_μ и z_μ^0. Однако в случае (68) они так комбинируются (кватернионы $\underset{\sim}{z}$ и $\underset{\sim}{z}^0$ перемножаются), что после замены переменных (сдвиг на сфере) по одной из сфер можно проинтегрировать.

Аналогичное представление интеграла по слою возможно также в 3-мерном случае

[x] Пример закрепления калибровки см. в приложении Д.

$$J_0\left(w\sqrt{2(\tau\tau_0+\vec{x}\vec{x}_0)}\right)=\frac{1}{\pi}\int d^2z\,\delta(z_\mu z_\mu-1)\,e^{-iw(\xi^*\xi^0+\xi^{0*}\xi)}, \qquad (73.а)$$

$$I_0\left(w\sqrt{2(\tau\tau_0+\vec{x}\vec{x}_0)}\right)=\frac{1}{\pi}\int d^2z\,\delta(z_\mu z_\mu-1)\,e^{-w(\xi^*\xi^0+\xi^{0*}\xi)}. \qquad (73.б)$$

Эти формулы можно использовать вместо формул (В.3) в /9/. Аналог тождества (67) в этом случае имеет вид

$$2(\tau\tau_0+\vec{x}\vec{x}_0)=(\xi^*\xi^0+\xi^{0*}\xi)^2-(\xi^*\xi^0-\xi^{0*}\xi)^2=4(\xi^*\xi^0)(\xi^{0*}\xi). \qquad (74)$$

Обе его части независимо инвариантны относительно $U(1)$-преобразований на слое[x] : I) $\xi\to\tilde{\xi}=z^*\xi,\ \tilde{\xi}^*\to\tilde{\xi}^*=z\xi^*\ (z=z_0+iz_1,\ |z|=1)$ при неизменных ξ^0 и ξ^{0*} и 2) $\tilde{\xi}^0=z^{0*}\xi,\ \tilde{\xi}^{0*}=z^0\xi^{0*}$ при неизменных ξ и ξ^*. Поэтому можно представить

$$\xi=z^*\xi_f,\quad \xi^*=z\xi_f^*\ (z=z_0+iz_1,\ |z|=1), \qquad (75)$$

$$\xi^*\xi^0+\xi^{0*}\xi=z\xi_f^*\xi+z^*\xi^{0*}\xi_f=z_0(\xi_f^*\xi^0+\xi^{0*}\xi_f)+iz_1(\xi_f^*\xi^0-\xi^{0*}\xi_f)=A_\mu z_\mu \qquad (76)$$

и свести правые части (73.а) и (73.б) к обычным представлениям для J_0 и I_0.

Свободные функции Грина в 5-мерном случае имеют вид

$$G^0_{\substack{ret\\ adv}}(\vec{x},\vec{x}_0,E)=\begin{cases}\pm\dfrac{m}{2\hbar}\left(\dfrac{k}{2\pi|\vec{x}-\vec{x}_0|}\right)^{\frac32}H^{\binom{1}{2}}_{\frac32}(k|\vec{x}-\vec{x}_0|), & E>0,\\ -\dfrac{im}{\pi\hbar}\left(\dfrac{\varkappa}{2\pi|\vec{x}-\vec{x}_0|}\right)^{\frac32}K_{\frac32}(\varkappa|\vec{x}-\vec{x}_0|), & E<0,\end{cases} \qquad (77)$$

$$D^0(\vec{x},\vec{x}_0,E)=G^0_{ret}-G^0_{adv}=\begin{cases}\dfrac{m}{\hbar}\left(\dfrac{k}{2\pi|\vec{x}-\vec{x}_0|}\right)^{\frac32}J_{\frac32}(k|\vec{x}-\vec{x}_0|), & E>0,\\ 0, & E<0.\end{cases} \qquad (78)$$

С помощью формулы (68.б) легко перейти в $G_{\substack{ret\\ adv}}(\vec{x},\vec{x}_0,E)$ с $E<0$ к переменным 8-мерного пространства. Для этого сперва воспользуемся следующим представлением для функции Бесселя $K_{\frac32}$:

$$\left(\frac{\varkappa}{2\pi|\vec{x}-\vec{x}_0|}\right)^{\frac32}K_{\frac32}(\varkappa|\vec{x}-\vec{x}_0|)=\left(\frac{\varkappa}{2\pi\sqrt{a^2-b^2}}\right)^{\frac32}K_{\frac32}(\varkappa\sqrt{a^2-b^2})=$$
$$=\frac{1}{4\pi b}\int_\varkappa^\infty dt\,e^{-at}\sqrt{t^2-\varkappa^2}\,I_1(b\sqrt{t^2-\varkappa^2}), \qquad (79)$$

где $a=\tau+\tau_0$, $b=\sqrt{2(\tau\tau_0+\vec{x}\vec{x}_0)}$, $|\vec{x}-\vec{x}_0|=\sqrt{a^2-b^2}$. Произведя замены $t=\sqrt{w^2+\varkappa^2}$ и затем $w=\frac{\varkappa}{\operatorname{sh}\theta}$ и используя (68.б), получаем

[x] Это демонстрируется также тем, что с ξ и ξ^0 в переменных θ,φ,α и $\theta^0,\varphi^0,\alpha^0$ оно приводится к виду

$$\tau\tau_0+\vec{x}\vec{x}_0=2\tau\tau_0\left[\cos\frac{\theta-\theta^0}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi^0}{2}\right]^2+2\tau\tau_0\left[\cos\frac{\theta+\theta^0}{2}\sin\frac{\varphi-\varphi^0}{2}\right]^2,$$

откуда выпали зависящие от калибровки переменные α и α^0.

$$G^{0}_{\substack{ret\\adv}}(\vec{x},\vec{x}_0,E) = -\frac{im}{\pi\hbar}\left(\frac{\varkappa}{2\pi|\vec{x}-\vec{x}_0|}\right)^{\frac{3}{2}} K_{\frac{3}{2}}(\varkappa|\vec{x}-\vec{x}_0|) =$$

$$= -\frac{im}{\pi\hbar}\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{w^3\,dw}{\sqrt{w^2+\varkappa^2}}\, e^{-(r+r_0)\sqrt{w^2+\varkappa^2}}\, \frac{I_1\left(w\sqrt{2(rr_0+\vec{x}\vec{x}_0)}\right)}{w\sqrt{2(rr_0+\vec{x}\vec{x}_0)}} =$$

$$= -\frac{im}{\pi\hbar}\frac{1}{8\pi^3}\int d^4z\,\delta(\bar{z}_\mu z_\mu-1)\int_0^\infty \frac{w^3\,dw}{\sqrt{w^2+\varkappa^2}}\, e^{-\left[(\psi^*\psi+\psi_0^*\psi_0)\sqrt{w^2+\varkappa^2}-w(\psi^*\psi_0+\psi_0^*\psi)\right]} =$$

$$= -\frac{im}{\pi\hbar}\frac{\varkappa^3}{8\pi^3}\int d^4z\,\delta(\bar{z}_\mu z_\mu-1)\int_0^\infty \frac{d\sigma}{sh^4\sigma}\, e^{-\frac{\varkappa}{sh\sigma}\left[(\psi^*\psi+\psi_0^*\psi_0)ch\sigma-(\psi^*\psi_0+\psi_0^*\psi)\right]} \qquad (80)$$

($E<0$). Последнее выражение может быть приведено к виду (33). Вещественность экспоненты в (80) обусловлена тем, что $E<0$. Отправляясь от этого выражения можно получить и другие представления, а также перейти к $E>0$. В кулоновском случае под знаком интеграла по σ входит множитель $e^{2\nu\sigma}$.

7. Предлагался переход от переменных $\vec{x}$ в трехмерном случае к переменным u в фейнмановском интеграле по путям с целью вычисления кулоновской функции Грина /6,7/. Однако представляется, что здесь имеется серьезная трудность или, по меньшей мере, неоднозначность /9/. С другой стороны, может оказаться полезным для тех или иных потенциалов $\tilde{V}$ представить при помощи интеграла по путям функции Грина $\tilde{G}_{\substack{ret\\adv}}(u,u_0,s)$ под знаком интеграла по слою. Однако в кулоновском случае этого не требуется, так как эти функции Грина известны точно.

Приложение А. Угловые переменные на сферах S^{2p-1} удобно вводить по схеме удвоения

$$p=1 \qquad\qquad p=2 \qquad\qquad p=4$$

$$u=\rho\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix},\quad u=\rho\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\cos\varphi_1\\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\varphi_1\\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\varphi_2\\ \sin\frac{\theta}{2}\sin\varphi_2\end{pmatrix},\quad u=\rho\begin{pmatrix}\cos\frac{\eta}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\varphi_1\\ \cos\frac{\eta}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}\sin\varphi_1\\ \cos\frac{\eta}{2}\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\varphi_2\\ \cos\frac{\eta}{2}\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\varphi_2\\ \sin\frac{\eta}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\cos\varphi_3\\ \sin\frac{\eta}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\sin\varphi_3\\ \sin\frac{\eta}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\cos\varphi_4\\ \sin\frac{\eta}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\varphi_4\end{pmatrix} \qquad (A.1)$$

и т.д. Эта параметризация – типа параметризации углами Эйлера (углы в (4) суть буквально углы Эйлера), а не углами сферической системы координат. В случае p=2 3-мерный вектор $\vec{x}$ оказывается параметризованным

сферическими углами (см. выражения (5)). Однако этого уже нет для p=4: 5-мерный вектор $\vec{x}$ оказывается параметризованным тоже в духе углов Эйлера. В общем случае $p=2^q$ удобны обозначения углов

$$\theta_0;\ \theta_{11},\theta_{12};\ \theta_{21},\theta_{22},\theta_{23},\theta_{24};\ \dots;\ \theta_{n1},\theta_{n2}\dots\theta_{n2^n};\ \dots;$$
$$\theta_{q1}=\varphi_1,\dots\theta_{qp}=\varphi_p \quad (2p-1 \text{ угол})\quad 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi. \qquad (A.2)$$

Например, в случае p=4 соответствие углов таково: $\theta_0=\eta$, $\theta_{11}=\theta_1$, $\theta_{12}=\theta_2$.

Якобиан перехода от $u_1,u_2,\dots,u_{2p}$ к этим угловым переменным можно найти с помощью рекуррентной формулы для телесных углов

$$d^{2p-1}\Omega=\frac{1}{2^p}\sin^{p-1}\theta_0\,d\theta_0\,d^{p-1}\Omega_1 d^{p-1}\Omega_2=\frac{1}{2^p}d^p\Omega_1 d^{p-1}\Omega_2. \qquad (A.3)$$

Исходя из $d^1\Omega_1=d\varphi_1$, $d\Omega_2=d\varphi_2$ получаем по этой формуле

$$d^3\Omega=\frac{1}{4}\sin\theta_0\,d\theta_0\,d\varphi_1\,d\varphi_2, \qquad (A.4)$$

$$d^7\Omega=\frac{1}{2^8}\sin^3\theta_0\,d\theta_0\,\sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1\,d\varphi_2\,\sin\theta_2\,d\theta_2\,d\varphi_3\,d\varphi_4 \qquad (A.5)$$

и т.д. Отсюда, например,

$$d^4u=\frac{1}{4}\rho^3 d\rho\,\sin\theta_0\,d\theta_0\,d\varphi_1\,d\varphi_2=\frac{1}{8}r\,dr\,\sin\theta_0\,d\theta_0\,d\varphi_1\,d\varphi_2=$$
$$=\frac{1}{16}r\,dr\,\sin\theta_0\,d\theta_0\,d\varphi\,d\alpha=\frac{1}{16r}d^3x\,d\alpha. \qquad (A.6)$$

Ход рассуждений, который приводит к формуле (А.3), поясним на простейшем примере p =2. В этом случае якобиан имеет вид

$$J_2=\begin{vmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial\rho} & \frac{\partial u_2}{\partial\rho} & \frac{\partial u_3}{\partial\rho} & \frac{\partial u_4}{\partial\rho}\\ \frac{\partial u_1}{\partial\varphi_1} & \frac{\partial u_2}{\partial\varphi_1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial\varphi_2} & \frac{\partial u_4}{\partial\varphi_2}\\ \frac{\partial u_1}{\partial\theta} & \frac{\partial u_2}{\partial\theta} & \frac{\partial u_3}{\partial\theta} & \frac{\partial u_4}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\frac{1}{2\rho}\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3 & u_4\\ -u_2 & u_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -u_4 & u_3\\ -tg\frac{\theta}{2}u_1 & -tg\frac{\theta}{2}u_2 & ctg\frac{\theta}{2}u_3 & ctg\frac{\theta}{2}u_4\end{vmatrix}. \qquad (A.7)$$

Комбинируя первую и последнюю строки, приводим якобиан к факторизующемуся виду

$$J_2=\frac{1}{\rho\sin\theta}\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & 0 & 0\\ -u_2 & u_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -u_4 & u_3\\ 0 & 0 & u_3 & u_4\end{vmatrix}=\frac{1}{\rho\sin\theta}\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ -u_2 & u_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-u_4 & u_3\\ u_3 & u_4\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}\rho^3\sin\theta. \qquad (A.8)$$

В точности тот же путь при p=4 дает

$$J_4=-\frac{\rho}{\sin\eta}J_2^1\cdot J_2^2=-\frac{1}{2^8}\rho^7\sin^3\eta\,\sin\theta_1\sin\theta_2, \qquad (A.9)$$

где J_2^1 – детерминант вида J_2, но с u_1, u_2, u_3 и u_4, содержащими дополнительный множитель $\cos\frac{\eta}{2}$; J_2^2 – такой же детерминант с заменой $u_1\to u_5, u_2\to u_6, u_3\to u_7, u_4\to u_8$ (эти компоненты содержат дополнительный множитель $\sin\frac{\eta}{2}$). Аналогично

$$J_8 = -\frac{\rho}{\sin\theta_0} J_4^1 \cdot J_4^2 \qquad (\text{А.10})$$

и т.д.

Приложение Б. Рассмотрим преобразования вида

$$x_0=u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2-u_0^2,\quad x_1=2u_0u_1,\ \dots\ ,\ x_n=2u_0u_n. \qquad (\text{Б.1})$$

Очевидно, имеет место тождество

$$(u_0^2+u_1^2+\dots+u_n^2)^2=(u_1^2+\dots+u_n^2-u_0^2)^2+4(u_0u_1)^2+\dots+4(u_0u_n)^2, \qquad (\text{Б.2})$$

т.е. $\rho^2=u_\mu u_\mu=r$, $r=|\vec{x}|$. Рассмотрим δ-функцию

$$\delta^{n+1}(x-x_0)=\delta(2u_0u_1-2u_{00}u_{01})\delta(2u_0u_2-2u_{00}u_{02})\dots\delta(2u_0u_n-2u_{00}u_{0n})\times$$
$$\times\delta\left(u_1^2+\dots+u_n^2-u_0^2-(u_{01}^2+\dots+u_{0n}^2-u_{00}^2)\right). \qquad (\text{Б.3})$$

Заменим какую-либо из n первых δ-функций согласно

$$\delta(2u_0u_i-2u_{00}u_{0i})=\theta(u_0u_iu_{00}u_{0i})4|u_0u_i|\delta(4(u_0u_i)^2-4(u_{00}u_{0i})^2), \qquad (\text{Б.4})$$

скажем первую. Новую δ-функцию можно с учетом того, что она входит в произведение (Б.3), превратить в

$$\delta(4(u_0u_1)^2-4(u_{00}u_{01})^2)\to\delta\big[(u_1^2+\dots+u_n^2-u_0^2)^2+4(u_0u_1)^2+\dots+4(u_0u_n)^2-$$
$$-(u_{01}^2+\dots+u_{0n}^2-u_{00}^2)^2-4(u_{00}u_{01})^2-\dots-4(u_{00}u_{0n})^2\big]=$$
$$=\delta\left[(u_0^2+u_1^2+\dots+u_n^2)^2-(u_{00}^2+u_{01}^2+\dots+u_{0n}^2)^2\right]=$$
$$=\frac{1}{2r}\delta\left[u_0^2+u_1^2+\dots+u_n^2-(u_{00}^2+u_{01}^2+\dots+u_{0n}^2)\right]. \qquad (\text{Б.5})$$

Предпоследнее выражение получено с помощью тождества (Б.2). Комбинируя аргументы δ-функции (Б.5) и последней δ-функции в (Б.3), получаем

$$\delta^{n+1}(x-x_0)=\theta(u_0u_1u_{00}u_{01})\frac{|u_0u_1|}{r}\delta(2u_0u_2-2u_{00}u_{02})\dots\delta(2u_0u_n-2u_{00}u_{0n})\times$$
$$\times\delta(u_0^2-u_{00}^2)\delta(u_1^2+\dots+u_n^2-u_{01}^2-\dots-u_{0n}^2)=$$
$$=\prod_{i=1}^{n}\theta(u_0u_iu_{00}u_{0i})\frac{|u_0u_1u_2\dots u_n|}{r\,|u_0|^{n-1}}\delta(u_0^2-u_{00}^2)\delta(u_1^2-u_{01}^2)\dots\delta(u_n^2-u_{0n}^2). \qquad (\text{Б.6})$$

Последнее выражение получено с помощью (Б.4). Рассматривая порознь две возможности $u_0u_{00}>0$ и $u_0u_{00}<0$, окончательно находим

$$\delta^{n+1}(x-x_0)=\frac{1}{2^{n+1}r\,|u_0|^{n-1}}\left\{\delta^{n+1}(u-u_0)+\delta^{n+1}(u+u_0)\right\}. \qquad (\text{Б.7})$$

Приложение В. Исходим из представлений[22] (стр. 199 и 206):

$$H_0^{\binom{1}{2}}(k\sqrt{a^2-b^2})=\pm\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\chi\, e^{\pm ik\sqrt{a^2-b^2}\,\mathrm{ch}\chi},$$
$$K_0(\varkappa\sqrt{a^2-b^2})=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}d\chi\, e^{-\varkappa\sqrt{a^2-b^2}\,\mathrm{ch}\chi}.$$

Здесь $\sqrt{a^2-b^2}=|\vec{x}-\vec{x}_0|, a=r+r_0$, $b=\sqrt{2(rr_0+\vec{x}\vec{x}_0)}=\pm 2u\cdot u_0$. Произведем замену $\chi\to\chi+\lambda$ и выберем λ так, чтобы $\sqrt{a^2-b^2}\,\mathrm{ch}\lambda=|a|$, $\sqrt{a^2-b^2}\,\mathrm{sh}\lambda=\pm b$. Тогда

$$K_0(\varkappa\sqrt{a^2-b^2})=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}d\chi\, e^{-\varkappa(|a|\mathrm{ch}\chi\pm b\,\mathrm{sh}\chi)}=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}d\chi\left[e^{-\varkappa(|a|\mathrm{ch}\chi+b\,\mathrm{sh}\chi)}+e^{-\varkappa(|a|\mathrm{ch}\chi-b\,\mathrm{sh}\chi)}\right],$$

и после замены $\mathrm{sh}\chi=(\mathrm{sh}\sigma)^{-1}$ получаем окончательно

$$K_0(\varkappa\sqrt{a^2-b^2})=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{d\sigma}{\mathrm{sh}\sigma}\left[e^{-\varkappa\left(|a|\mathrm{cth}\sigma-\frac{b}{\mathrm{sh}\sigma}\right)}+e^{-\varkappa\left(|a|\mathrm{cth}\sigma+\frac{b}{\mathrm{sh}\sigma}\right)}\right],$$
$$H_0^{\binom{1}{2}}(k\sqrt{a^2-b^2})=\pm\frac{1}{i\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{d\sigma}{\mathrm{sh}\sigma}\left[e^{\pm ik\left(|a|\mathrm{cth}\sigma-\frac{b}{\mathrm{sh}\sigma}\right)}+e^{\pm ik\left(|a|\mathrm{cth}\sigma+\frac{b}{\mathrm{sh}\sigma}\right)}\right].$$

Приложение Г. Матрицы Дирака в представлении Паули имеют вид

$$\gamma_m=\begin{pmatrix}0 & -i\sigma_m\\ i\sigma_m & 0\end{pmatrix}\ (m=1,2,3),\quad \gamma_4=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix},\quad \gamma_5=\begin{pmatrix}0 & -I\\ -I & 0\end{pmatrix}. \qquad (\text{Г.1})$$

Приведем вывод тождеств Фирца. В соотношении полноты (39) под γ^A (и аналогично под γ^B ниже) с A = 1,2,3,4,5 (или S,V,T,A,P) понимаются матрицы: I, γ_μ , $\sigma_{\mu\nu}=-i(\gamma_\mu\gamma_\nu-\delta_{\mu\nu})$, $i\gamma_\mu\gamma_5$, γ_5 ; $\gamma^A\dots\gamma^A$ обозначают I...I для S , $\gamma_\mu\dots\gamma_\mu$ для V , $\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\dots\sigma_{\mu\nu}$ для T , $i\gamma_\mu\gamma_5\dots i\gamma_\mu\gamma_5$ для A и $\gamma_5\dots\gamma_5$ для P , причем по μ и ν подразумевается суммирование. С помощью соотношений

$$\gamma_\nu\gamma_\nu=4,\quad \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu=-2\gamma_\mu,\quad \gamma_\nu\sigma_{\varkappa\mu}\gamma_\nu=0,$$
$$\sigma_{\varkappa\lambda}\sigma_{\varkappa\lambda}=12,\quad \sigma_{\varkappa\lambda}\gamma_\mu\sigma_{\varkappa\lambda}=0,\quad \sigma_{\varkappa\lambda}\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\varkappa\lambda}=-4\sigma_{\mu\nu}, \qquad (\text{Г.2})$$
$$(\gamma^B)^T=\varkappa_B C^{-1}\gamma^B C,\quad \varkappa_B\,(\text{и } \varkappa_A)=\begin{cases} I & \text{для } S,A,P,\\ -I & \text{для } V,T\end{cases} \qquad (\text{Г.3})$$

находим тождества

$$\gamma^B_{\alpha\beta}\gamma^B_{\gamma\delta}=\frac{1}{4}\sum_A(\gamma^B\gamma^A\gamma^B)_{\alpha\delta}\gamma^A_{\gamma\beta}=\sum_A M_{BA}\gamma^A_{\alpha\delta}\gamma^A_{\gamma\beta}, \qquad (\text{Г.4})$$

$$\gamma^{B}_{\alpha\beta}\gamma^{B}_{\gamma\delta}=\varkappa_B\gamma^{B}_{\alpha\beta}(C^{-1}\gamma^B C)_{\delta\gamma}=-\sum_A\varkappa_B M_{BA}\varkappa_A(\gamma^A C)_{\alpha\gamma}(C^{-1}\gamma^A)_{\beta\delta}=$$
$$=\sum_A N_{BA}(\gamma^A C)_{\alpha\gamma}(C^{-1}\gamma^A)_{\beta\delta}\ . \qquad (Г.5)$$

Матрицы M и N имеют вид

$$\|M_{BA}\|=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\4&-2&0&2&-4\\6&0&-2&0&6\\4&2&0&-2&-4\\1&-1&1&-1&1\end{pmatrix},\qquad \|N_{BA}\|=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&1\\-4&-2&0&-2&4\\-6&0&-2&0&-6\\4&-2&0&-2&-4\\1&1&-1&-1&1\end{pmatrix}. \quad (Г.6)$$

С их помощью, обозначая

$$L_A=(\overline{\psi}_1\gamma^A\psi_2)(\overline{\psi}_3\gamma^A\psi_4),\quad J_A=(\overline{\psi}_1\gamma^A\psi_4)(\overline{\psi}_3\gamma^A\psi_2),$$
$$K_A=(\overline{\psi}_1\gamma^A C\overline{\psi}_3)(\psi_2 C^{-1}\gamma^A\psi_4), \qquad (Г.7)$$

для с-числовых спиноров ψ_1,ψ_2,ψ_3 и ψ_4 получаем следующие тождества Фирца:

$$\begin{array}{l|l}
4L_1= J_1+J_2+J_3+J_4+J_5, & 4L_1=-K_1+K_2+K_3-K_4-K_5,\\
4L_2=4J_1-2J_2\qquad +2J_4-4J_5, & 4L_2=4K_1+2K_2\qquad +2K_4-4K_5,\\
4L_3=6J_1\qquad -2J_3\qquad +6J_5, & 4L_3=6K_1\qquad +2K_3\qquad +6K_5,\\
4L_4=4J_1+2J_2\qquad -2J_4-4J_5, & 4L_4=-4K_1+2K_2\qquad +2K_4+4K_5,\\
4L_5=J_1-J_2+J_3-J_4+J_5, & 4L_5=-K_1-K_2+K_3+K_4-K_5
\end{array} \qquad (Г.8)$$

или в несколько упрощенном виде:

$$\begin{array}{ll}
L_2-L_4=-(J_2-J_4), & L_2+L_4=K_2+K_4,\\
2(L_1+L_5)=J_1+J_3+J_5, & 2(L_1+L_5)=-K_1+K_3-K_5,\\
2L_3=3(J_1+J_5)-J_3, & 2L_3=3(K_1+K_5)+K_3,\\
L_2+L_4=2(J_1-J_5), & L_2-L_4=2(K_1-K_5),\\
2(L_1-L_5)=J_2+J_4, & 2(L_1-L_5)=K_2-K_4\ .
\end{array} \qquad (Г.9)$$

В случаях $\psi_1=\psi_3$, или $\psi_2=\psi_4$, или $\psi_1=\psi_2=\psi_3=\psi_4$ имеем

$$J_A=L_A,\quad L_2=L_4=L_1-L_5,\quad L_3=L_1+L_5, \qquad (Г.10)$$

и отсюда следуют тождества (40) и (41). При этом под $\overline{\psi}$ мы понимаем комплексно-сопряженный спинор ψ^*. Тождество (42) выводится следующим образом:

$$4(\psi^*\psi)(\psi'^*\psi')=(\psi'^*\psi)(\psi^*\psi')+(\psi'^*\gamma_\mu\psi)(\psi^*\gamma_\mu\psi')+$$
$$+\frac{1}{2}(\psi'^*\sigma_{\mu\nu}\psi)(\psi^*\sigma_{\mu\nu}\psi')+(\psi'^*i\gamma_\mu\gamma_5\psi)(\psi^*i\gamma_\mu\gamma_5\psi')+(\psi'^*\gamma_5\psi)(\psi^*\gamma_5\psi')=$$
$$=L_1+L_2+L_3+L_4+L_5=2L_1+2L_2+2L_5+4K_5 \qquad (Г.11)$$
$$(=2L_1+2L_4+2L_5+4K_1),$$

где L_3 и L_4 (L_2) исключены с помощью соотношений

$$L_3=\frac{3}{2}(K_1+K_5)+\frac{1}{2}K_3=2(K_1+K_5)+L_1+L_5,$$
$$L_4=L_2-2(K_1-K_5)\qquad (L_2=L_4+2(K_1-K_5)). \qquad (Г.12)$$

Член K_5 можно представить следующим образом:

$$K_5=(\psi'^*\gamma_5 C\psi^*)(\psi C^{-1}\gamma_5\psi')=(\psi^*B\psi'^*)(\psi B\psi'). \qquad (Г.13)$$

Приложение Д. Из закона преобразования кватернионов (52) вытекает следующий закон преобразования a_μ и a'_μ:

$$\tilde{a}_0=z_0a_0+z_ma_m, \qquad (Д.1)$$
$$\tilde{a}_j=z_0a_j-z_ja_0-\varepsilon_{jkl}z_ka_l\ .$$

Легко проверить, что

$$\tilde{a}_0+i\tilde{a}_1=(z_0-iz_1)(a_0+ia_1)+(z_2+iz_3)(a_2-ia_3), \qquad (Д.2)$$
$$\tilde{a}_2+i\tilde{a}_3=(z_0-iz_1)(a_2+ia_3)-(z_2+iz_3)(a_0-ia_1).$$

Отсюда уже ясен закон преобразования (55.а).

Из формул (Д.1) видно, что если выбрать z_μ кратным a_μ:

$$z_\mu=|a|^{-1}a_\mu\qquad (|a|=\sqrt{a_\mu a_\mu}) \qquad (Д.3)$$

(z_μ должен быть единичным), то в такой калибровке

$$\tilde{a}_0=|a|=\sqrt{a_\mu a_\mu},\quad \tilde{a}_j=0, \qquad (Д.4.а)$$
$$\tilde{a}'_0=|a|^{-1}a_\mu a'_\mu,\quad \tilde{a}_j=|a|^{-1}(a_0a'_j-a_ja'_0-\varepsilon_{jkl}a_ka'_l), \qquad (Д.4.б)$$
$$x_0=2\tilde{a}_0\tilde{a}'_0,\quad x_j=2\tilde{a}_0\tilde{a}'_j,\quad x_4=\tilde{a}_0^2-\tilde{a}'_\mu\tilde{a}'_\mu \qquad (Д.5)$$

(для x_μ , определенных согласно (48)). В этой калибровке у спинора исключены (зафиксированы) калибровочные степени свободы: из восьми вещественных параметров ψ три обратились в нуль ($\tilde{a}_j=0$), и он принял вид

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tau}\cos\frac{\eta}{2} \\ 0 \\ \tilde{\alpha}'_0 + i\tilde{\alpha}'_1 \\ \tilde{\alpha}'_2 + i\tilde{\alpha}'_3 \end{pmatrix} \qquad \left(|\tilde{\alpha}'| = |\alpha'| = \sqrt{\tau}\sin\frac{\eta}{2}\right). \tag{Д.6}$$

Вектор $\vec{x}$ теперь просто выражается через спинор (см. (Д.5)), а именно: четыре первые его компоненты x_μ ($\mu = 0,1,2,3$) оказались кратными "4-вектору" $\tilde{\alpha}'_\mu$ $(x_4 = \tau\cos\eta)$. Для вектора $x_\mu = \psi^*\gamma_\mu\psi$ это верно с точностью до переобозначений (49). Теперь, если потребуется, легко получить вектор $\vec{x}$ в сферической системе в R^5. Нужно лишь $\tilde{\alpha}'_\mu = \sqrt{\tau}\sin\frac{\eta}{2} n_\mu$ $(n^2=1)$ представить в сферической системе в пространстве R^4.

Литература

I. Kustaanheimo P., Stiefel E. Journ.f.reine u.angew.Math., Berlin, 1965, 218, p. 204.
2. Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. "Наука", М., 1975.
3. Aarseth S.J., Zare K. Celestial Mechanics, 1974, 10, p.185.
4. Zare K. Celestial Mechanics, 1974, 10, p.207.
5. Heggie D.C. Celestial Mechanics, 1974, 10, p.217.
6. Duru I.H., Kleinert H. Phys.Lett., 1979, 84B, p.185.
7. Ho R., Inomata A. Phys.Rev.Lett., 1982, 48, p.231.
8. Kennedy J. Proc. R.Irish.Acad., 1982, 82A, No. 1, p.1.
9. Polubarinov I.V. JINR, E2-82-932, Dubna, 1982; Полубаринов И.В.Квантовая механика и расслоение Хопфа. В кн.: Труды II Международного семинара "Теоретико-групповые методы в физике" (Звенигород, 24-26 ноября, 1982 г.). "Наука", М., 1983, т.2.
I0. Polubarinov I.V. JINR, E2-83-384, Dubna, 1983.
11. Weyl H. Zs.f.Phys., 1929, 56, p.330.
12. Smrz P. Can.J.Phys., 1968, 46, p.2073.
13. Tait W., Cornwell J.F. Lett. Nuovo Cim., 1970, 4, p.1109.
14. Araki S., Okubo S. Lett. Nuovo Cim., 1972, 3, p.511.
15. Nguyen Thi Hong. Prog.Theor.Phys., 1976, 56, p.1647; Can.J.Phys., 1978, 56, p.395; 1979, 57, p.298; ОИЯИ, Р2-12768, Дубна, 1979.
16. Hopf H. Math.Annalen, 1931, 104, p.637; Hopf H. Fundamenta Mathematicae (Warszawa), 1935, 25, p.427.

17. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. "Наука", М., 1979.
18. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. "Мир", М., 1970.
I9. Стинрод Н. Топология косых произведений. ИЛ, М., 1953.
20. Fock V. Zs. f.Phys., 1935, 98, p.145.
2I. Schwinger H. Journ.Math.Phys., 1964, 5, p.1606.
22. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. ИЛ, М., 1949.
23. Мардоян Л.Г., Погосян Г.С., Сисакян А.Н., Тер-Антонян В.М. ОИЯИ, Р2-83-475, Дубна, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
2I декабря 1983 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Р2-83-872

Полубаринов И.В.

Квантовая механика и расслоения Хопфа. Функции Грина

В квантовой механике системы двух тел исследуется переход от декартовых координат в 2-, 3- и 5-мерном пространствах к спинорным. В основе преобразований лежат двухлистное накрытие окружности окружностью и отображения Хопфа $S^3 \to S^2$ и $S^7 \to S^4$. Двухчастичные функции Грина в 2-, 3- и 5-мерном пространствах представлены как интегралы по слоям от некоторых других функций Грина в 2-, 4- и 8-мерном пространствах. Кулоновские и свободные функции Грина выражаются через известные функции Грина для многомерных гармонических осцилляторов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

P2-83-872

Polubarinov I.V.

Quantum Mechanics and Hopf Fibre Bundles. Green Functions

A transformation from the Cartesian coordinates in 2-, 3- and 5-dimensional spaces to spinor ones is considered in two-body problems in quantum mechanics. These transformations are based on a two-fold covering of a circle by circle and on Hopf fibre bundles $S^3 \to S^2$ and $S^7 \to S^4$. Two-particle Green functions in the 2, 3 and 5 dimensions are represented to be integrals over fibres of some other Green functions in 2, 4 and 8 dimensions. Coulomb and free Green functions are expressed via well-known Green functions for many-dimensional harmonic oscillators.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод автора