сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-83-864

Л.Б.Литов, В.Н.Первушин

КВАНТОВАНИЕ СУПЕРТВИСТОРОВ

1983

Введение

Генераторы суперсимметрии /I/ преобразуются как различные представления группы Лоренца (спинор, вектор, антисимметричный тензор). Естественно возникает вопрос: существует ли нижележащая для супералгебры структура, которая основывалась бы только на фундаментальном представлении какой-нибудь группы. Компоненты этого представления можно было бы рассматривать как исходные элементы построения генераторов соответствующей супералгебры (в духе кварковой интерпретации группы классификации адронов). Возможными кандидатами для таких исходных фундаментальных элементов супералгебры являются супертвисторы /2/[x] (хотя это может быть не самый простой и естественный путь реализации супералгебры). В настоящей работе мы попытались последовательно осуществить эту "кварковую" идею с помощью супертвисторов и понять, как на таком пути возникает естественная групповая интерпретация суперпространства.

В разделе I определяем каноническую симплектическую структуру на супертвисторном пространстве. В разделе П с помощью этой структуры проводим квантование супертвисторов и строим генераторы суперконформной алгебры как билинейные комбинации компонент квантованных супертвисторов. Построены унитарные неприводимые представления суперконформной группы. В разделе 3 дается последовательная интерпретация кирального суперпространства $C^{4,2}$ как параметров когерентных состояний при квантовании супертвисторов. В разделе 4 обсуждается случай расширенных суперсимметрий.

I. Каноническая симплектическая структура на супертвисторном пространстве

Супертвисторы задают $(4+1)$ -мерное суперпространство

$$T = \begin{pmatrix} \lambda^A \\ \bar{\mu}_{\dot A} \\ \xi \end{pmatrix}, \qquad (I)$$

где λ^A и $\bar{\mu}_{\dot A}$ – обычные комплексные вейлевские спиноры, а ξ – ан-

---

x) Супертвисторы преобразуются по фундаментальному представлению суперконформной группы.

тикоммутирующая комплексная переменная . Дуальный твистор $\tilde{T}$ определяется как

$$\tilde{T} = (\mu_A , \bar{\lambda}^{\dot{A}} , - \bar{\xi}). \tag{2}$$

Эти объекты преобразуются по фундаментальному представлению суперконформной группы $SU(2,2|1)$ x). В супертвисторном пространстве можно ввести $SU(2,2|1)$ -инвариантную билинейную форму

$$F_{12} = \tilde{T}_1^{\alpha} T_{2\alpha} = \mu_{1A} \lambda_2^A + \bar{\lambda}_1^{\dot{A}} \bar{\mu}_{2\dot{A}} - \bar{\xi}_1 \xi_2 .$$

Нетрудно проверить, что каноническая форма первого порядка

$$\theta = \tilde{T}^{\alpha} d T_{\alpha} = \mu_A d\lambda^A + \bar{\lambda}^{\dot{A}} d\bar{\mu}_{\dot{A}} - \bar{\xi} d\xi$$

является суперконформным инвариантом. С ее помощью на супертвисторном пространстве можно построить симплектическую форму второго порядка

$$\omega_s = d\theta = \omega_{\alpha\beta}\, d\tilde{T}^{\alpha} \wedge dT^{\beta} \; ; \quad d\omega_s = 0$$

$$\omega_s = \epsilon^{AB} d\mu_A \wedge d\lambda_B + \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} d\bar{\lambda}^{\dot{A}} \wedge d\bar{\mu}^{\dot{B}} - d\bar{\xi} \wedge d\xi . \tag{3}$$

Для внешнего произведения ($\wedge$) выполняются следующие соотношения

$$\begin{aligned} d\mu_A \wedge d\lambda_B &= - d\lambda_B \wedge d\mu_A , \\ d\bar{\lambda}^{\dot{A}} \wedge d\bar{\mu}^{\dot{B}} &= - d\bar{\mu}^{\dot{B}} \wedge d\bar{\lambda}^{\dot{A}} , \\ d\bar{\xi} \wedge d\xi &= d\xi \wedge d\bar{\xi} . \end{aligned} \tag{4}$$

Алгебра скобок Пуассона задается на симплектическом многообразии следующим образом [3]:

$$[f, g] = \left(f \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \tilde{T}^{\alpha}} \right) (\omega^{-1})^{\alpha\beta} \left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial T^{\beta}} g \right),$$

где стрелки над производными означают правое и левое дифференцирование, соответственно. Используя (3) и (4), получаем:

$$\begin{aligned} [f, g] = {} & \frac{\partial}{\partial \mu_A} f \frac{\partial}{\partial \lambda^A} g - \frac{\partial}{\partial \lambda^A} f \frac{\partial}{\partial \mu_A} g + \\ & + \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}^{\dot{A}}} f \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}_{\dot{A}}} g - \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}_{\dot{A}}} f \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}^{\dot{A}}} g + \\ & + \left(f \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \bar{\xi}} \right) \left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \xi} g \right) + \left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \xi} f \right) \left(g \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \bar{\xi}} \right). \end{aligned} \tag{5}$$

---

x) Некоторые обозначения и трансформационные законы супертвисторов даны в Приложении А.

Можно показать [3], что эти соотношения задают супералгебру. Такое определение скобок Пуассона приводит к следующим каноническим соотношениям для компонент супертвисторов

$$\begin{aligned} [\mu_A , \lambda^B] &= - [\lambda^B , \mu_A] = \delta_A^{\;B} , \\ [\bar{\lambda}^{\dot{A}} , \bar{\mu}_{\dot{B}}] &= - [\bar{\mu}_{\dot{B}} , \bar{\lambda}^{\dot{A}}] = \delta_{\dot{B}}^{\;\dot{A}} , \\ [\xi , \bar{\xi}] &= [\bar{\xi} , \xi] = 1 , \end{aligned} \tag{6}$$

что в супертвисторных обозначениях выглядит как

$$[\tilde{T}^{\alpha} , T_{\beta}] = \delta^{\alpha}_{\;\beta} . \tag{7}$$

Все остальные скобки Пуассона равны нулю.

II. Квантование супертвисторов. Унитарные неприводимые представления группы $SU(2,2/1)$

Мы имеем бесконечномерную супералгебру Ли скобок Пуассона (5). Для квантования нужно построить представление некоторой подалгебры этой бесконечномерной супералгебры на эрмитовом гильбертовом пространстве . Это представление должно содержать основные наблюдаемые x). В соответствии с общей теорией [4] потребуем, чтобы в искомой супералгебре содержались канонические переменные T и $\tilde{T}$, а также обертывающая алгебра супералгебры Ли $SU(2,2/1)$.

Супертвисторные операторы T и $\tilde{T}$ в гильбертовом пространстве удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$[\tilde{T}^{\alpha} , T_{\beta} \} = \delta^{\alpha}_{\beta} , \tag{8}$$

где $[\;\;\}$ означает антикоммутатор между двумя фермионными операторами, и коммутатор между всеми остальными.

Постулируем, что гильбертово пространство содержит вакуумное состояние, т.е. собственное минимальное значение гамильтониана H , **который можно определить посредством матрицы, связывающей дуальный тензор $\tilde{T}$ с эрмитовым T^+ :**

$$H = \bar{\lambda} \lambda + \mu \bar{\mu} + \bar{\xi} \xi = \tilde{T}^{\alpha} \mathbb{B}^{\beta}_{\;\alpha} T_{\beta} = T^{+\beta} T_{\beta} ,$$

где матрица $\mathbb{B}$ имеет вид

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; ; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

---

x) Под "наблюдаемыми" мы понимаем такие функции супертвисторов, которые инвариантны относительно преобразований группы $SU(2,2/1)$.

С помощью этой матрицы можно определить вакуум в явном виде:

$$\tilde{T}\,\frac{1}{2}(\mathbb{1}+\mathbb{B})|0\rangle = 0 \quad ; \quad \frac{1}{2}(\mathbb{1}-\mathbb{B})T|0\rangle = 0 \qquad (9)$$

и фактически разложить твисторы на операторы рождения и уничтожения.

В базисе, в котором матрица $\mathbb{A}$ диагональна,

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

супертвистор имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} a^{A+} \\ b^{m} \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \tilde{T} = (a_A, -b^{+}_{m}, -\xi^{+}). \qquad (10)$$

Из (9) следует, что

$$a|0\rangle = 0 \quad ; \quad \begin{pmatrix} b \\ \xi \end{pmatrix}|0\rangle = 0,$$

т.е. операторы a_A и $\eta_M = \begin{pmatrix} b_m \\ \xi \end{pmatrix}$ являются операторами уничтожения. С помощью (8) для операторов a, b и ξ получаем стандартные коммутационные соотношения для бозе- и ферми- операторов рождения и уничтожения соответственно.

$$[a_A, a^{+B}] = \delta_A^{B},$$
$$[b^m, b^{+}_n] = \delta_n^{m}, \qquad (11)$$
$$\{\xi, \xi^{+}\} = 1.$$

Связь между двумя базисами осуществляется при помощи матрицы P.

$$P = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbb{B}' = P\mathbb{B}P^{-1},$$

$$T' = PT; \qquad S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Отсюда получаем соотношения между компонентами супертвисторов в реализациях (I), (2) и (I0)

$$a^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda + \bar{\mu}) \quad ; \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\lambda} + \mu)$$
$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\mu} - \lambda) \quad ; \quad b^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu - \bar{\lambda}) \qquad (13)$$
$$\xi = \xi \qquad \xi^{+} = \bar{\xi}\,.$$

Генераторы группы $SU(2,2/1)$ строятся при помощи супертвисторных операторов следующим образом:

$$K^{\alpha}{}_{\beta} = \tilde{T}^{\alpha}T_{\beta} - \frac{1}{2}(\mathbb{1}-\mathbb{B})^{\alpha}{}_{\beta}(\tilde{T}(\mathbb{1}-\mathbb{B})T) - \frac{1}{4}(\mathbb{1}+\mathbb{B})^{\alpha}{}_{\beta}(\tilde{T}(\mathbb{1}+\mathbb{B})T),$$

$$N = \tilde{T}^{\alpha}T_{\alpha} - \frac{1}{4}\tilde{T}(\mathbb{1}-\mathbb{B})T. \qquad (14)$$

Группа $SU(2,2/1)$ некомпактная. Ее четная подгруппа есть $S(U(2,2)\times U(1))$ (группа $SU(2,2)$ некомпактная с максимальной компактной подгруппой $S(U(2)\times U(2))$).

Теперь перейдем к построению неприводимых унитарных представлений рассматриваемой группы в суперфоковском пространстве, введенных выше операторов рождения и уничтожения (II). При этом будем следовать методам, развитым в работе /5/.

Операторы уничтожения a^A преобразуются ковариантно относительно $SU(2)$, а оператор уничтожения η^M преобразуется контравариантно относительно $SU(2/1)$.

Супералгебра Ли $SU(2,2/1)$ имеет градуированную структуру

$$L = L^{-} \oplus L^{0} \oplus L^{+},$$

где L^{0} есть супералгебра максимальной компактной суперподгруппы $S(U(2)\times U(2/1))$, а L^{-} и L^{+} соответствуют некомпактным генераторам.

$$L^{0} = K_A{}^{B} \oplus K_M{}^{N} \oplus N \; ; \; L^{-} = K_A{}^{M} \; ; \; L^{+} = K^{A}{}_{M}. \qquad (15)$$

Отметим, что градуировка достигается за счет генератора $(1/2)N$:

$$[\tfrac{1}{2}N, K_A{}^{B}] = 0 = [\tfrac{1}{2}N, K_M{}^{N}] \qquad L^{0}$$
$$[\tfrac{1}{2}N, K_A{}^{M}] = -K_A{}^{M} \qquad L^{-}$$
$$[\tfrac{1}{2}N, K^{A}{}_{M}] = K^{A}{}_{M}. \qquad L^{+}$$

Суперфоковское пространство F является тензорным произведением всех фоковских пространств операторов a и η. Вакуумное состояние $|0,0\rangle$ в F тогда определяется как тензорное произведение всех отдельных вакуумов

$$a_A|0,0\rangle = 0 \quad ; \quad \eta^{M}|0,0\rangle = 0.$$

Пусть заданы совокупность состояний $|\text{Ж}^{A\ldots}_{M\ldots}\rangle$, которые преобразуются по некоторому неприводимому представлению подгруппы $S(U(2)\times U(2/1))$ и уничтожаются всеми операторами $K_A{}^{M}$. Тогда бесконечномерная система состояний, полученных многократным действием операторами $K^{A}{}_{M}$ на $|\text{Ж}^{A\ldots}_{M\ldots}\rangle$

$$|\text{Ж}^{A\ldots}_{M\ldots}\rangle \; ; \; K^{B}{}_{N}|\text{Ж}^{A\ldots}_{M\ldots}\rangle \; ; \; K^{C}{}_{P}K^{B}{}_{N}|\text{Ж}^{A\ldots}_{M\ldots}\rangle ; \ldots$$

задает базис унитарного неприводимого представления супергруппы $SU(2,2/I)$.

Каждое состояние типа $(a^+)^k|0,0\rangle$ или $(\eta^+)^k|0,0\rangle$ уничтожается операторами $K_A{}^M$ из пространства L^-. При помощи проекционных операторов из этих состояний можно выделить состояния, преобразующиеся по неприводимым представлениям максимальной компактной подгруппы $S(U(2)\times U(2/1))$, и построить унитарные неприводимые представления $SU(2,2/1)$ путем многократного действия операторами из пространства L^+.

III. Представление когерентных состояний и суперпространство

Группа $SU(2,2/1)$ действует на фоковском пространстве следующим образом (см. Приложение B):

$$\hat{U} = \exp\{i\tilde{T} M T\}. \qquad (16)$$

Матрица M имеет вид

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \varkappa & -i\nu \\ \hline -i\nu^+ & \varepsilon \end{array}\right),$$

где

$$\varkappa^B{}_A = C^B{}_A \; ;$$

$$\nu^B{}_N = i(d^B{}_n, e^B) \; ; \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} g^m{}_n & h^m \\ m_n & ,n \end{pmatrix}.$$

Операторы T преобразуются по фундаментальному неунитарному представлению $SU(2,2/1)$

$$\hat{U}^+(M) T \hat{U}(M) = e^{iM} T = \mathcal{U} T,$$

$$\hat{U}^+(M) \tilde{T} \hat{U}(M) = -\tilde{T} e^{-iM} = \tilde{T} \mathcal{U}^{-1}, \qquad (17)$$

где $\mathcal{U} = e^{iM}$.

Фундаментальное представление всегда можно записать как произведение

$$\mathcal{U} = t \cdot h,$$

где h есть элемент максимальной компактной подгруппы $S(U(2)\times U(2/1))$, а t принадлежит фактор-пространству $SU(2,2/1)/S(U(2)\times U(2/1))$. Представим h в виде

$$h = \exp\left\{i \begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \qquad (18)$$

а t как

$$t = \exp\begin{pmatrix} 0 & \nu \\ \nu^+ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-zz^+}} & z\frac{1}{\sqrt{1-z^+z}} \\ \frac{1}{\sqrt{1-z^+z}}\, z^+ & \frac{1}{\sqrt{1-z^+z}} \end{pmatrix}, \qquad (19)$$

где

$$z^A{}_N = \left(\frac{\tanh\sqrt{\nu\nu^+}}{\sqrt{\nu\nu^+}}\,\nu\right)^A{}_N .$$

Соответствующее разложение унитарного оператора $\hat{U}$ дается выражением

$$\hat{U} = \hat{t}(z)\,\hat{h},$$

где

$$\hat{t}(z) = \exp\left\{i\tilde{T}\begin{pmatrix} 0 & -i\nu \\ -i\nu^+ & 0 \end{pmatrix} T\right\} = \exp\{a\nu\eta - \eta^+\nu^+ a^+\}.$$

В этом случае операторы $\hat{h}$ и $\hat{t}(z)$ унитарны.

Переменная z, параметризующая фактор-пространство $SU(2,2/1)/S(U(2)\times U(2/1))$, преобразуется нелинейно под действием $SU(2,2/1)$

$$z' = (\alpha z + \beta)(\gamma z + \delta)^{-1},$$

где элемент g фундаментального представления имеет вид

$$g = \exp(iM) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \delta \end{array}\right).$$

Рассмотрим совокупность состояний $|\Psi^A{}_M\ldots\rangle$, которые преобразуются по неприводимому представлению группы $S(U(2)\times U(2/1))$ и уничтожаются операторами $K_A{}^M$ из $L^{(-)}$ пространства. Определяем суперкогерентное состояние $|\Psi^A{}_M\ldots, z\rangle$ следующим образом:

$$\exp\{\eta^+_M z^{+M}{}_A a^{A+}\}|\Psi^B{}_N\ldots\rangle = |\Psi^B{}_N\ldots, z^+\rangle. \qquad (20)$$

Суперкогерентные состояния (20) задают полный базис для унитарного неприводимого представления, определяемого низшим состоянием $|\Psi^A{}_M\ldots\rangle$. При помощи этого базиса можно реализовать унитарные неприводимые представления суперконформной группы на супергильбертовом пространстве аналитических функций комплексной переменной z (причем эти представления принадлежат голоморфной дискретной серии) [6].

Таким образом, координаты кирального суперпространства $C^{4,2}$, естественно, появляются как параметры суперкогерентных состояний. Существенно отметить, что суперпространство возникает вследствие квантования, а не в результате наложения классических связей как в стандартной теории твисторов [2,7]. В предлагаемом здесь подходе на компоненты супертвисторов не налагаются никакие связи.

IV. Расширенная суперсимметрия

Мы ввели супертвисторы как операторы, из которых строятся генераторы конформной суперсимметрии. Координаты кирального суперпространства $C^{4,2}$ естественно возникают как параметры суперкогерентных состояний. При обобщении этого подхода в случае расширенной суперсимметрии имеются неоднозначности в выборе фактор-пространства и, следовательно, суперпространства.

Введем N антикоммутирующих комплексных переменных

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_q \; ; \; \beta^{q+1}, \ldots \beta^{N} \quad ; \quad q \leq N/2$$

$$\{\alpha_\mu, \alpha^{+\nu}\} = \delta_\mu^\nu \; ; \; \{\beta^\mu, \beta^+_\nu\} = \delta^\mu_\nu \; ; \; \{\alpha, \beta\} = \{\alpha^+, \beta^+\} = \ldots = 0.$$

Выберем супертвисторы в виде

$$T = \begin{pmatrix} \zeta^{+A} \\ \eta^M \end{pmatrix} \; ; \; \tilde{T} = (\zeta_A, -\eta^+{}_M), \tag{21}$$

где

$$\zeta_A = (a_a, \alpha_1, \ldots \alpha_q) \; ; \; \eta^+_M = (b^+_m, \beta^+_{q+1}, \ldots \beta^+_N).$$

a_a и b^+_m определены формулами (13). В соответствии с результатами работы [5] генераторы конформной суперсимметрии можно построить как билокальные комбинации супертвисторов лишь в случае

$$q \neq 2 \quad ; \quad N - q \neq 2. \tag{22}$$

Суперкогерентные состояния, аналогичные (20), определены в работе[5]

$$\exp\{\eta^+_M (Z^+)^M{}_A \zeta^{A+}\} |0\rangle = |Z^+\rangle,$$

где Z^+ – суперматрица $(2+q)\times(2+(N-q))$, которая параметризует когерентные состояния и состоит из координат факторпространства $SU(2,2/(N-q)+q)/S(U(2/N-q)\times SU(2/q))$. Возможные суперпространства соответствуют различному выбору q и суперматрицы Z. В частности, для $N=2$ имеется лишь одно значение q : $q=1$, а для $N=4$ – два значения – $q=0,1$.

Таким образом, задавая супертвисторы как исходные элементы супералгебры, можно попытаться отыскать наиболее подходящие суперпространства для адекватного описания неприводимых представлений расширенной группы суперсимметрии.

Авторы благодарят Е.А.Иванова и И.Нидерле за обсуждение результатов.

Приложение А.

Спиноры λ^A и $\bar{\mu}_{\dot{B}}$ $(A,B=1,2)$ преобразуются обычным образом по $SL(2,C)$. Индексы поднимаются и опускаются при помощи антисимметрической матрицы ϵ_{AB} (ϵ^{AB}), где

$$\epsilon_{12} = -\epsilon^{12} = 1 = \epsilon_{\dot{1}\dot{2}} = -\epsilon^{\dot{1}\dot{2}} = 1,$$

$$\lambda^A = \epsilon^{AB}\lambda_B \quad , \quad \lambda_A = \epsilon_{AB}\lambda^B,$$

$$\bar{\lambda}^{\dot{A}} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}}\bar{\lambda}_{\dot{B}} \quad , \quad \bar{\lambda}_{\dot{A}} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\lambda^B.$$

Спиноры λ_A и $\bar{\lambda}_{\dot{A}}$ связаны комплексным сопряжением $(\lambda_A)^* = \bar{\lambda}_{\dot{A}}$.

В супертвисторном пространстве компоненты супертвисторов преобразуются под действием группы $SU(2,2/1)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta\lambda^A &= L^A{}_B\lambda^B + \tfrac{1}{2}(-D+iG)\lambda^A - iK^{A\dot{B}}\bar{\mu}_{\dot{B}} + \psi^A\xi, \\ \delta\bar{\mu}_{\dot{A}} &= -iP_{\dot{A}B}\lambda^B - \bar{L}^{\dot{B}}{}_{\dot{A}}\bar{\mu}_{\dot{B}} + \tfrac{1}{2}(D+iG)\bar{\mu}_{\dot{A}} + \bar{\phi}_{\dot{A}}\xi, \\ \delta\xi &= \phi_B\lambda^B + \bar{\psi}^{\dot{B}}\bar{\mu}_{\dot{B}} + 2iG\xi, \end{aligned} \tag{A1}$$

где D и G – вещественные; $K^{A\dot{B}}$ – эрмитовы; $L^A{}_B$ – элементы алгебры $SL(2,C)$, ϕ_A и ψ^B –антикоммутирующие спиноры.

Супертвисторы T и $\tilde{T}$ можно представить в виде

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \Pi^i \\ \xi \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{T}^\alpha = (\tilde{\Pi}_i, -\bar{\xi}),$$

где

$$\Pi^i = \begin{pmatrix} \lambda^A \\ \bar{\mu}_{\dot{A}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \tilde{\Pi}_i = (\mu_A, \bar{\lambda}^{\dot{A}}).$$

Тогда существует вещественная матрица $\mathbb{A}$ с двумя положительными и двумя отрицательными собственными значениями [4], такая, что

$$\tilde{\Pi} = \Pi^+\mathbb{A}.$$

В базисе, в котором супертвисторы задаются соотношениями (1) и (2), матрица $\mathbb{A}$ имеет следующий вид:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A2}$$

Удобно ввести матрицу $\mathbb{B}$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A3}$$

связывающую $\tilde{T}$ и T^+

$$\tilde{T} = T^+\mathbb{B}.$$

Приложение В

Построим действие суперконформной группы в суперфоковском пространстве.

Если через H_a и A_α обозначить соответственно четные и нечетные генераторы $SU(2,2/1)$, унитарное действие группы на суперфоковском пространстве задается оператором

$$\hat{\mathcal{U}}(g) = \exp\{ i\, \omega^a H_a + i\, \theta^\alpha A_\alpha \}, \tag{BI}$$

где параметры ω^a и θ^α – вещественные и $\{ A_\alpha, \theta^\beta \} = 0$. Из унитарности оператора $\hat{\mathcal{U}}(g)$ следует, что четные генераторы являются эрмитовыми операторами, а нечетные – антиэрмитовыми. Такая конструкция называется суперэрмитовым базисом. Чтобы перейти к нему, надо построить эрмитовы и антиэрмитовы комбинации из генераторов (I3).

Выберем эрмитовы комбинации генераторов и их параметров в виде

$$\begin{aligned}
W_A{}^B &= a_A a^{B+} - \delta_A{}^B a_C a^{C+} + a_B a^{A+} \quad &;\ \omega_A{}^B \\
V_A{}^B &= i(a_A a^{B+} - a_B a^{A+}) \quad &;\ V_A{}^B \\
\mathcal{U}_m{}^n &= b_m^+ b^n - 2\delta_m{}^n b_q^+ b^q - 2\delta_m{}^n \zeta^+\zeta - b_n^+ b^m \quad &;\ u_m{}^n \\
R_m{}^n &= i(b_m^+ b^n - b_n^+ b^m) \quad &;\ r_m{}^n \\
W_A{}^m &= a_A b^m + b_m^+ a^{A+} \quad &;\ \omega_A{}^m \\
V_A{}^m &= i(a_A b^m - b_m^+ a^{A+}) \quad &;\ V_A{}^m \\
N &= \tfrac{1}{2} a_A a^{A+} + b_n^+ b^m + \zeta^+\zeta \quad &;\ \rho,
\end{aligned} \tag{B2}$$

а антиэрмитовы комбинации и их грассмановые параметры – в виде

$$\begin{aligned}
P_m &= b_m^+ \zeta - \zeta^+ b^m \quad &;\ \theta^m \\
Q_m &= i(b_m^+ \zeta + \zeta^+ b^m) \quad &;\ \varepsilon^m \\
P_A &= a_A \zeta - \zeta^+ a^{A+} \quad &;\ \theta^A \\
Q_A &= i(a_A \zeta + \zeta^+ a^{A+}) \quad &;\ \varepsilon^A
\end{aligned} \tag{B3}$$

Подставляя (B2) и (B3) в (BI), получаем

$$\hat{\mathcal{U}}(g) = \exp\{ i \tilde{T}^\alpha M_\alpha{}^\beta T_\beta \}, \tag{B4}$$

где

$$M = \begin{pmatrix} c^B{}_A, & d^B{}_m, & e^B \\ f^m{}_A, & g^m{}_n, & h^m \\ k_A, & m_m, & n \end{pmatrix}.$$

Отдельные блоки матрицы M выражаются через параметры следующим образом:

$$\begin{aligned}
c^B{}_A &= 2(\omega_A{}^B + i V_A{}^B) - \delta_A{}^B \omega_C{}^C + \tfrac{1}{2}\rho\, \delta_A{}^B \\
d^B{}_m &= \omega_B{}^m + i V_B{}^m \\
e^B &= \theta^B + i\varepsilon^B \\
f^m{}_A &= \omega_A{}^m + i V_A{}^m \\
g^m{}_n &= -2(u_n{}^m + i r_n{}^m) + 2\delta_n{}^m u_p{}^p - \rho\, \delta_n{}^m \\
h^m &= -(\theta^m + i\varepsilon^m) \\
m_m &= -(\theta_m - i\varepsilon_m) \\
n &= -\rho + 2 u_p{}^p.
\end{aligned}$$

Унитарность оператора (B4) легко проверяется с помощью соотношения

$$\mathcal{B} M \mathcal{B} = M^+.$$

ЛИТЕРАТУРА

I. Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П. Проблемы теоретической физики М.. "Наука". I972. с. 37.
Volkov D.V., Akulov V.P. Phys.Lett., 1973, B46, p. 109.
2. Ferber A. Nucl.Phys. B132, 55 (1978).
Witten E. Phys.Lett., 77B, 394, (1978).
3. Березин Ф.А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными . МГУ, Москва, I983 г.
4. Todorov I.T. Conformal Descroption of Spinning particles Trieste preprint II8I/E. 1981.
5. Bars I., Günaydin M. Commun. Math. Phys. 91, p. 31, 1983.
6. Переломов А.М. УФН, 20, .03 (I977).
7. Lukierski J. Wroclav preprint No 534, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 декабря I983 года.

Литов Л.Б., Первушин В.Н. Р2-83-864

Квантование супертвисторов

Квантовые супертвисторы рассматриваются как исходные элементы для построения генераторов супералгебры. Предлагается интерпретация кирального суперпространства как параметров когерентных состояний. Показывается, что в случае расширенной суперсимметрии такой подход ведет к естественному ограничению возможных типов суперпространств. В частности, для N= 2 суперсимметрии существует только одно суперпространство, параметризованное дополнительной скалярной переменной. Для N = 4 число скалярных переменных может равняться нулю или трем.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Litov L.B., Pervushin V.N. P2-83-864

Quantization of Supertwistors

Quantum supertwistors are considered as initial elements for constructing superalgebra generators. An interpretation is proposed of chiral superspace as parameters of coherent states. It is shown that in the case of extended supersymmetry such approach leads to the natural limitation of possible types of superspaces. In particular, for N = 2 of supersymmetry only one superspace exists parametrized with an additional scalar variable. For N=4 scalar variable number could equal zero or 3.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой.