объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-83-844

В.Г.Кадышевский, М.Д.Матеев

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И НОВЫЙ УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МАСШТАБ В ОБЛАСТИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Скалярная модель

Направлено в журнал "Nuclear Physics"

1983

§1. ВВЕДЕНИЕ

Этой статьей открывается новый цикл наших публикаций, посвященных проблеме построения, обоснования и физической интерпретации квантовой теории поля /КТП/ с импульсным пространством постоянной кривизны. Как и ранее [1], радиус кривизны p-пространства M играет роль нового универсального параметра теории - фундаментальной массы. Обратная величина

$$\ell = \frac{1}{M} \qquad /1.1/$$

выступает, соответственно, в роли фундаментальной длины. Стандартной КТП по-прежнему отвечает т.н. плоский предел $M \to \infty$ $(\ell \to 0)$. Существенно новым моментом теперь является последовательное применение, в духе работ [2], пятимерного конфигурационного представления. Это дает возможность обобщить принцип локальной калибровочной инвариантности на случай $\ell \neq 0$. Как мы увидим, данный путь ведет к новой КТП, которая углубляет и обобщает соответствующий "плоский прототип", оставаясь вместе с тем локальной лагранжевой схемой.

Мы уже не раз приводили аргументы, имеющие целью обосновать нашу главную стратегическую линию и адекватность применяемых математических средств. Однако этот вопрос столь важен, что мы снова уделим ему внимание.

Сама гипотеза о существовании в природе фундаментальной длины* обсуждалась в литературе многократно, причем главным образом в связи с поиском решения проблемы ультрафиолетовых расходимостей в КТП [3]. Нарастающий успех перенормируемых теорий поля в описании экспериментальных данных и полное сокращение ультрафиолетовых расходимостей в некоторых суперсимметричных теориях [4] отодвинули эту проблему на задний план. С позиций сегодняшнего дня многим теоретикам представляется весьма вероятным, что "истинная" теория поля, способная дать адекватное описание всех взаимодействий элементарных частиц, будет по меньшей мере перенормируемой лагранжевой теорией, обладающей локальной калибровочной /супер/симметрией. Спрашивается, может ли такая схема содержать параметр типа фундаментальной длины? Ответ на этот вопрос могут дать лишь будущие эксперименты. Согласно современным данным, если константа ℓ и существует, то во всяком

---

*Отдавая дань традиции, мы не используем здесь выражение "гипотеза о фундаментальной массе".

случае она подчиняется ограничению $\ell \lesssim 10^{-18}$см. Этот рубеж еще чрезвычайно далеко отстоит от "планковской длины" $\ell \sim 10^{-33}$см, определяющей пространственные масштабы эффектов квантовой гравитации. И, конечно, нельзя исключить, что по мере преодоления колоссального интервала 10^{-18}- 10^{-33}см будут открыты новые физические явления и закономерности, ассоциированные с новым "масштабом природы" - фундаментальной длиной ℓ. Размерность этого гипотетического параметра и свойство универсальности, которое мы вправе у него предполагать, наводят на мысль о том, что проявление ℓ во взаимодействиях частиц могло бы быть связано с наличием у самого пространства-времени в малых масштабах $\sim\ell$ какой-то новой геометрической структуры /дискретности, зернистости и т.п./. Однако многочисленные попытки построить более общую КТП, исходя из такого рода посылок, не дали существенных результатов. Возможно, эта неудача объясняется тем, что на сегодняшний день почти не разработана математическая теория пространств, геометрия которых лишь "в малом" отличается от /псевдо/ евклидовой геометрии, и, тем более, в подобного рода пространствах не развит математический аппарат, отвечающий потребностям КТП.

Выход из создавшейся ситуации подсказывает сама КТП. Как известно, в рамках этой теории пространственно-временное описание является совершенно равноправным с описанием в терминах импульсно-энергетических переменных. Если теорию формулировать в p-представлении, то поля, источники, функции Грина и другие атрибуты теории оказываются определенными в четырехмерном /псевдо/ евклидовом импульсном пространстве.

В евклидовой формулировке КТП, которая в дальнейшем будет преимущественно нами использоваться, импульсное 4-пространство теории несет плоскую евклидову геометрию. Например, евклидово действие скалярной ϕ^4-модели после перехода к p-представлению и с учетом свойства нейтральности поля

$$\phi^+(p) = \phi(-p) \qquad /1.2/$$

записывается в виде

$$S = \pi \int (p^2 + m^2)|\phi(p)|^2 d^4p + \frac{\lambda}{4!(2\pi)^2} \int \delta^{(4)}(p_{(1)} + \ldots + p_{(4)}) \times$$
$$\times \phi(p_{(1)}) \ldots \phi(p_{(4)}) d^4 p_{(1)} \ldots d^4 p_{(4)}, \quad (p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2), \qquad /1.3/$$

где все 4-векторы p, $p_{(1)}, \ldots, p_{(4)}$ можно рассматривать как векторы евклидова импульсного пространства E_4. Роль этих переменных сводится к тому, чтобы "нумеровать" континуальные степени свободы данной полевой системы. Подчеркнем, что ввиду полной однородности пространства E_4, описание этих степеней свободы не зависит от того, каким импульсам - большим или малым - они отвечают.

Возвращаясь снова к гипотезе о фундаментальной длине ℓ, мы теперь можем облечь ее в геометрическую форму. Предварительно заметим, что в p-представлении теории, по соображениям размерности, роль нового универсального масштаба уже будет выполнять фундаментальная масса M.

Предположим теперь, что параметр M имеет непосредственное отношение к геометрии импульсного 4-пространства теории, определяя его крупно-масштабную структуру, т.е. строение области "больших" импульсов $|p| \gtrsim M$. Область "малых" импульсов $|p| \ll M$ при этом должна оставаться приближенно евклидовой, чтобы не нарушалось соответствие со стандартной евклидовой КТП. Но именно такой геометрией обладают простейшие римановы 4-пространства, имеющие постоянную /положительную или отрицательную/ кривизну. Эти пространства досконально изучены. В качестве их моделей удобно рассматривать гиперсферы в пространстве пяти измерений, отождествляя радиусы гиперсфер с фундаментальной массой M:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = M^2 \quad \text{/пространство положительной кривизны/} \qquad /1.4/$$

$$-p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_4^2 + p_5^2 = M^2 \quad \text{/пространство отрицательной кривизны/} \qquad /1.5/$$

Если компоненты 4-вектора $p_n = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ использовать как независимые переменные на поверхностях /1.4/-/1.5/, то в случае /1.4/ всегда

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 \leq M^2, \qquad /1.6/$$

тогда как в случае /1.5/ величины $p_1, \ldots, p_4$, подобно компонентам евклидовых 4-импульсов в действии /1.3/, пробегают всю вещественную ось:

$$-\infty < p_n < \infty, \quad n = 1,2,3,4. \qquad /1.7/$$

Пространство E_4, обладающее постоянной нулевой кривизной, в математике рассматривается как вырожденный предельный случай любого из пространств /1.4/-/1.5/. Иными словами, как геометрия на сфере /1.4/, так и геометрия на двуполостном гиперболоиде /1.5/ - суть более общие схемы, и в определенном смысле - более естественные, чем евклидова геометрия. Поэтому можно надеяться, что разработка теоретико-полевого аппарата на базе одной из этих геометрий должна привести к более общей и более естественной формулировке КТП, чем стандартная евклидова формулировка. Эта новая схема будет органически содержать в себе фундаментальную массу M и поэтому должна предсказывать новые физические явления в области сверхвысоких энергий $E \gtrsim M$.

Фактически мы сейчас изложили суть нашего подхода. Остается добавить, что из двух возможностей /1.4/ и /1.5/ мы выберем вторую, т.е. будем развивать новую КТП исходя из предположения, что плоское импульсное пространство E_4, фигурирующее в стандартной евклидовой формулировке теории, должно быть заменено импульсным 4-пространством постоянной отрицательной кривизны /1.5/*. Обе теории поля, новая и прежняя, обязаны быть эквивалентными друг другу в приближении малых импульсов $|p| \ll M$ или в плоском пределе. Формально этот предел достигается при $M \to \infty$.

Поскольку новая КТП обобщает евклидову форму стандартной теории, то в ней непременно должна быть предусмотрена возможность перехода к релятивистскому формализму. Такой переход мы будем называть релятивистским разворотом теории**.

Конкретно в данной работе в искривленном импульсном 4-пространстве /1.5/ будет построен аналог скалярной модели /1.3/. Мы преследуем при этом главным образом методические цели, стремясь познакомить читателя с основными понятиями и математическим аппаратом новой схемы. Вместе с тем здесь будет сформулирован алгоритм, с помощью которого в дальнейшем на новую геометрическую арену будут перенесены поля Максвелла, Янга-Миллса, Дирака и развиты реалистические квантовополевые модели.

§2. О ДЕЙСТВИИ ИСХОДНОЙ МОДЕЛИ

Мы уже знаем, что с новой точки зрения скалярная модель с действием /1.3/ является лишь плоским пределом более общей модели, основанной на p-пространстве /1.5/. Чтобы построить действие, адекватное новым геометрическим требованиям, резюмируем наиболее важные свойства исходного "плоского" выражения /1.3/.

1. Неотрицательность:

$$S \geq 0. \qquad /2.1/$$

Это свойство справедливо и для свободной части действия

$$S_0 = \pi \int (p^2 + m^2)\, |\phi(p)|^2\, d^4p \geq 0. \qquad /2.2/$$

2. SO(4)-инвариантность, соответствующая преобразованию поля

$$\phi(p) \to \phi(Lp), \quad L \in SO(4). \qquad /2.3/$$

*Относительно варианта /1.4/ см. комментарий в §7.

**Эта процедура является обратной по отношению к евклидову развороту /см. [5]/.

3. Трансляционная инвариантность, соответствующая преобразованию поля

$$\phi(p) \to e^{ipa}\, \phi(p). \qquad /2.4/$$

4. Если поле $\phi(p)$ подвергнуть преобразованию Фурье, т.е. разложить по матричным элементам группы трансляций /2.4/,

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipx}\, \phi(p)\, d^4p, \qquad /2.5/$$

то действие S примет вид интеграла по евклидову x-пространству от локального лагранжиана

$$S = \int L(x)\, d^4x = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_n}\right)^2 + m^2\phi^2(x)\right] d^4x + \frac{\lambda}{4!} \int \phi^4(x)\, d^4x. \qquad /2.6/$$

При традиционном подходе формула /2.6/ является исходной, у нас она - вторичная.

§3. ИМПУЛЬСНОЕ 4-ПРОСТРАНСТВО ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Как уже говорилось в §1, в качестве конкретной реализации этого пространства мы рассматриваем поверхность двуполостного гиперболоида /1.5/. На верхней полé, очевидно,

$$p_5 = +\sqrt{p^2 + M^2} \equiv M\kappa, \qquad /3.1/$$

на нижней, соответственно, $p_5 = -M\kappa$. Величина $p_5/|p_5|$ является новой дискретной степенью свободы, не имеющей аналога в плоской теории. Если на поверхности /1.5/ введено какое-то поле $\phi(p, p_5)$, то его всегда можно представить как совокупность двух полей

$$\begin{pmatrix} \phi(p, M\kappa) \\ \phi(p, -M\kappa) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_1(p) \\ \phi_2(p) \end{pmatrix}, \qquad /3.2/$$

зависящих от 4-импульса $p_n = (p_1, p_2, p_3, p_4)$. Поскольку в то же время $\phi(p, M\kappa) = \theta(p_5)\,\phi(p, p_5)$ и $\phi(p, -M\kappa) = \theta(p_5)\,\phi(p, -p_5)$, то двухкомпонентную величину /3.2/ мы вправе считать заданной только на верхней полé гиперболоида

$$p_5^2 - p^2 = M^2, \quad p_5 > 0, \qquad /3.3/$$

или в 4-пространстве Лобачевского [6].

Геометрия Лобачевского принадлежит к числу так называемых неевклидовых геометрий. Поэтому в дальнейшем новую схему мы для кратности будем именовать неевклидовой КТП.

Пятимерный импульс, фигурирующий в /1.5/ и /3.3/, можно трактовать либо как контравариантный, либо как ковариантный вектор. Положим, по определению,

$$p^L = (p^1, p^2, p^3, p^4, p^5) = (\vec{p}, p^4, p^5). \qquad /3.4/$$

Тогда

$$p_L = g_{LM} p^M = (-\vec{p}, -p^4, p^5), \qquad /3.5/$$

где $g_{LM} = g^{LM}$ – диагональный метрический тензор, у которого $g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = -g_{55} = -1$. Очевидно, что

$$p_L q^L = g^{LM} p_L q_M = -p_n q_n + p_5 q_5, \quad p_L p^L = g^{LM} p_L p_M = -p^2 + p_5^2. \qquad /3.6/$$

Группой движений пространства Лобачевского /3.3/ служит группа $SO(4,1)$ – пятимерный аналог собственной ортохронной группы Лоренца:

$$p^{L'} = \Lambda^L{}_M p^M, \quad \Lambda g \Lambda^T = g, \quad g = \|g_{LM}\|, \quad \Lambda^5{}_5 \geq 1. \qquad /3.7/$$

Вращения вокруг пятой оси образуют подгруппу $SO(4)$, представляющую собой "евклидов разворот" группы Лоренца $SO(3,1)$ /см. примечание на стр. 4/.

Релятивистский разворот обычной евклидовой КТП, т.е. превращение $SO(4)$-инвариантной теории в $SO(3,1)$-инвариантную, связан, как известно, с аналитическим продолжением к чисто мнимым значениям координаты p^4:

$$p^4 \to ip_0. \qquad /3.8/$$

Неевклидова КТП также допускает операцию релятивистского разворота, основанную на процедуре /3.8/. Если в p-пространство Лобачевского /3.3/ ввести декартовы координаты u_n / $n = 1,2,3,4$/ [8]:

$$p^1 = M \operatorname{sh}\frac{u_1}{M}, \qquad p^2 = M \operatorname{sh}\frac{u_2}{M} \operatorname{ch}\frac{u_1}{M},$$

$$p^3 = M \operatorname{sh}\frac{u_3}{M} \operatorname{ch}\frac{u_2}{M} \operatorname{ch}\frac{u_1}{M}, \quad p^4 = M \operatorname{sh}\frac{u_4}{M} \operatorname{ch}\frac{u_3}{M} \operatorname{ch}\frac{u_2}{M} \operatorname{ch}\frac{u_1}{M}, \qquad /3.9/$$

$$p^5 = M\kappa = M \operatorname{ch}\frac{u_4}{M} \operatorname{ch}\frac{u_3}{M} \operatorname{ch}\frac{u_2}{M} \operatorname{ch}\frac{u_1}{M} \quad (-\infty < u_1, u_2, u_3, u_4 < \infty),$$

то комплексификация переменной p^4 может быть получена, например, при переходе к комплексным значениям u_4:

$$u_4 \to z = u_4 + iv_0. \qquad /3.10/$$

При этом κ также становится комплексной величиной. Для чисто мнимых значений $z = iv_0$, $|v_0| < M\pi/2$, очевидно,

$$p^4 = ip_0 = iM \sin\frac{v_0}{M} \operatorname{ch}\frac{u_3}{M} \operatorname{ch}\frac{u_2}{M} \operatorname{ch}\frac{u_1}{M},$$

$$\kappa = \cos\frac{v_0}{M} \operatorname{ch}\frac{u_3}{M} \operatorname{ch}\frac{u_2}{M} \operatorname{ch}\frac{u_1}{M} = \sqrt{1 - \frac{p_0^2 - \vec{p}^2}{M^2}} > 0. \qquad /3.11/$$

Следовательно, релятивистский разворот, основанный на процедуре /3.10/, может иметь только ограниченное применение, поскольку функции лоренцевских 4-векторов p_μ здесь удается получить лишь в области

$$p_0^2 - \vec{p}^2 < M^2. \qquad /3.12/$$

Операция релятивистского разворота неевклидовой КТП, свободная от этого недостатка, обсуждается в §6.

Неевклидово расстояние S_{pq} между произвольными точками p и q пространства Лобачевского определяется по формуле:

$$\operatorname{ch}\frac{S_{pq}}{M} = \frac{p_L q^L}{M^2}. \qquad /3.13/$$

В частности, если одна из точек совпадает с началом координат

$$q^L = (0,0,0,0,M) \equiv V^L, \qquad /3.14/$$

то

$$\operatorname{ch}\frac{S_{p0}}{M} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{M^2}} = \kappa. \qquad /3.15/$$

В силу /3.11/ при релятивистском развороте формулы /3.15/ к точке $p_0 = m \leq M$, $\vec{p} = 0$ будем иметь:

$$\operatorname{ch}\frac{S_{p0}}{M} \to \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}. \qquad /3.15'/$$

Из /3.13/ легко найти вид линейного элемента

$$ds^2 = (dp_n)^2 - \frac{(p_n dp_n)^2}{p^2 + M^2} \quad (n = 1,2,3,4). \qquad /3.16/$$

Отсюда получается выражение для инвариантной меры, которую необходимо использовать при интегрировании в пространстве Лобачевского /3.3/:

$$d\Omega_p = \frac{d^4p}{\sqrt{1 + p^2/M^2}} = \frac{d^4p}{\kappa}. \qquad /3.17/$$

Применительно к /3.17/ определим единичный оператор / δ -функцию/ в пространстве /3.3/, полагая

$$f(p) = \int \delta^{(4)}(p, q)\, f(q)\, d\Omega_q . \qquad /3.18/$$

Очевидно,

$$\delta^{(4)}(p, q) = \kappa \delta^{(4)}(p - q) . \qquad /3.19/$$

При взятии вариационных производных от функций, заданных в p-пространстве Лобачевского, удобно считать, что

$$\frac{\delta f(p)}{\delta f(q)} = \delta^{(4)}(p, q) . \qquad /3.20/$$

§4. ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ СВОБОДНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В p-ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Покажем теперь, что в скалярной неевклидовой КТП существует аналог функционала действия /2.2/ для свободного поля, обладающий всеми свойствами 1-4, перечисленными в §2. Фактически определение самого поля ϕ в новой схеме уже было дано в предыдущем параграфе. Согласно /3.2/, задание ϕ как функции пяти переменных $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ на поверхности /1.5/ эквивалентно рассмотрению пары полей $\phi_1(p)$ и $\phi_2(p)$, определенных в пространстве Лобачевского /3.3/*.

Подчиним поля $\phi_1(p)$ и $\phi_2(p)$ прежнему условию нейтральности /1.2/:

$$\phi^+_k(p) = \phi_k(-p), \quad k = 1,2. \qquad /4.1/$$

Отсюда и из /3.2/, очевидно, имеем

$$\phi^+(p, p_5) = \phi(-p, p_5) . \qquad /4.2/$$

Обозначая неевклидов аналог действия /2.2/ посредством $S_0(M)$, будем искать этот функционал в виде следующего инвариантного интеграла по пространству Лобачевского /см. /3.17//:

$$S_0(M) = \pi \int d\Omega_p [K_{11}(p^2, m^2, M^2)|\phi_1(p)|^2 + K_{22}(p^2, m^2, M^2)|\phi_2(p)|^2] . \qquad /4.3/$$

---

*Подчеркнем, что в неевклидовой КТП удвоение числа полевых переменных, связанное с двузначностью координаты $p_5 = \pm\sqrt{p^2 + M^2}$, носит универсальный характер и не зависит от тензорных свойств поля.

Если считать, что

$$K_{11}(p^2, m^2, M^2) \geq 0 , \quad K_{22}(p^2, m^2, M^2) \geq 0 , \qquad /4.4/$$

то $S_0(M)$ будет неотрицательной формой.

Поскольку $S_0(M)$ не изменяется при подстановках

$$\phi_k(p) \to \phi_k(Lp) , \quad L \in SO(4) , \qquad /4.5/$$

$$\phi_k(p) \to e^{ipa}\phi_k(p) \quad (k = 1,2), \qquad /4.6/$$

свойства 2-3 для него так же справедливы, как и для функционалов /1.3/ и /2.2/. Необходимо ясно понимать, что сама возможность применения преобразования /4.6/ к полям, заданным в импульсном 4-пространстве Лобачевского, является следствием того очевидного факта, что соотношения коммутации $[p_n, p_m] = 0$ выполняются в p-пространстве безотносительнс к его геометрии.

Вид функций $K_{11}(p^2, m^2, M^2)$ и $K_{22}(p^2, m^2, M^2)$ мы конкретизируем, опираясь на простые эвристические соображения. Сравнивая /4.3/ и /2.2/, замечаем, во-первых, что роль евклидова волнового оператора $p^2 + m^2$ в нашем случае выполняет матрица

$$\begin{pmatrix} K_{11}(p^2, m^2, M^2) & 0 \\ 0 & K_{22}(p^2, m^2, M^2) \end{pmatrix} . \qquad /4.7/$$

Учитывая /3.3/, величину $p^2 + m^2$ представим в виде:

$$p^2 + m^2 = M^2\kappa^2 - (M^2 - m^2) . \qquad /4.8/$$

Если теперь предположить, что массовый параметр m^2 в новой схеме всегда подчиняется ограничению

$$m^2 \leq M^2 , \qquad /4.9/$$

то правую часть /4.8/ можно разложить на положительные вещественные множители

$$p^2 + m^2 = M^2(\kappa - \cos\mu)(\kappa + \cos\mu), \qquad /4.10/$$

где параметр μ определяется из соотношения /ср. /3.15′//:

$$\cos\mu = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}} . \qquad /4.11/$$

Положим теперь *

---

*Ср. с процедурой "вывода" уравнения Дирака из уравнения Клейна-Гордона.

$$K_{11}(p^2, m^2, M^2) = 2M^2(\kappa - \cos\mu), \qquad /4.12/$$

$$K_{22}(p^2, m^2, M^2) = 2M^2(\kappa + \cos\mu). \qquad /4.13/$$

Условие /4.4/, очевидно, выполняется при всех значениях p^2.
Подставляя /4.12/ и /4.13/ в /4,3/, будем иметь:

$$S_0(M) = \pi M^2 \int \frac{d^4p}{\kappa}[2(\kappa - \cos\mu)|\phi_1(p)|^2 + 2(\kappa + \cos\mu)|\phi_2(p)|^2]. \qquad /4.14/$$

Из /4.14/ следует, что размерность полей $\phi_{1,2}(p)$ является канонической:

$$[\phi_{1,2}(p)] = /\text{масса}/^{-3}. \qquad /4.15/$$

Величина $1/(p^2 + m^2)$, называемая в евклидовой КТП функцией Швингера, при аналитическом продолжении /3.8/ имеет полюс на массовой поверхности свободной частицы

$$p_0^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2. \qquad /4.16/$$

В нашем случае роль $1/(p^2 + m^2)$ играет матрица, обратная по отношению к /4.7/. Ее диагональные элементы

$$K_{11}^{-1} = \frac{1}{2M^2(\kappa - \cos\mu)} = \frac{1}{2M^2(\sqrt{1 + p^2/M^2} - \sqrt{1 - m^2/M^2})}, \qquad /4.17/$$

$$K_{22}^{-1} = \frac{1}{2M^2(\kappa + \cos\mu)} = \frac{1}{2M^2(\sqrt{1 + p^2/M^2} + \sqrt{1 - m^2/M^2})} \qquad /4.18/$$

определяют вид функций Швингера для полей ϕ_1 и ϕ_2 /точное вычисление этих функций с учетом всех кинематических множителей произведено в §6/.Заметим, что в плоском пределе $M \to \infty$ величина /4.17/ совпадает с $1/(p^2 + m^2)$.
Разворачивая /4.17/-/4.18/ в релятивистскую область с помощью /3.8/, находим

$$K_{11}^{-1} \to \frac{1}{2M^2(\sqrt{1 - p_\mu p^\mu/M^2} - \sqrt{1 - m^2/M^2})}, \qquad /4.19/$$

$$K_{22}^{-1} \to \frac{1}{2M^2(\sqrt{1 - p_\mu p^\mu/M^2} + \sqrt{1 - m^2/M^2})}, \qquad /4.20/$$

где $p_\mu p^\mu = p_0^2 - \vec{p}^{\,2} < M^2$. Видно, что знаменатель в выражении /4.19/ обращается в нуль при $p_\mu p^\mu = m^2$, тогда как знаменатель

в /4.20/ отличен от нуля во всей области $p_\mu p^\mu < M^2$. Это означает, что на массовой поверхности /4.16/ может быть отлично от нуля только релятивистски развернутое поле $\phi_1(p_0, \vec{p})$, а поле $\phi_2(p_0, \vec{p})$ тождественно исчезает. Иными словами, $\phi_1(p_0, \vec{p})$ при $p_\mu p^\mu = m^2$ описывает свободную скалярную частицу с массой $m \leq M$, а компонента $\phi_2(p_0, \vec{p})$ может проявляться лишь вне массовой поверхности, т.е. во взаимодействии полей.

Обладает ли действие /4.14/ свойством локальности в смысле пункта 4 из §2? На первый взгляд, нет, поскольку после преобразования Фурье /2.5/ над полями $\phi_1(p)$ и $\phi_2(p)$ из-за наличия $\sqrt{p^2 + M^2}$ в подынтегральном выражении /4.14/ $S_0(M)$ не представляется в виде:

$$S_0(M) = \int L_0(x, M)\, d^4x. \qquad /4.21/$$

Введем, однако, вместо полей $\phi_1(p)$ и $\phi_2(p)$ новые переменные

$$\phi(p) = \frac{1}{\kappa}[\phi\ (p) + \phi\ (p)], \qquad /4.22/$$

$$\chi(p) = \phi_1(p) - \phi_2(p). \qquad /4.23/$$

Очевидно, $\phi(p)$ и $\chi(p)$ удовлетворяют условию нейтральности /4.1/ и обладают трансформационными свойствами /4.5/-/4.6/ относительно преобразований 4-вращений и трансляций.

В новых переменных действие /4.14/ принимает вид:

$$S_0(M) = \pi \int d^4p\,[(p^2 + m^2)|\phi(p)|^2 + M^2|\chi(p) - \cos\mu\,\phi(p)|^2]. \qquad /4.24/$$

Подынтегральное выражение в /4.24/ не содержит иррациональностей. Поэтому, полагая

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipx} \phi(p)\, d^4p, \qquad /4.25/$$

$$\chi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipx} \chi(p)\, d^4p, \qquad /4.26/$$

мы уже можем представить $S_0(M)$ в форме /4.21/, где новый локальный лагранжиан $L_0(x, M)$ имеет вид:

$$L_0(x, M) = \frac{1}{2}\{(\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_n})^2 + m^2\phi^2(x) + M^2[\chi(x) - \cos\mu\,\phi(x)]^2\}. \qquad /4.27/$$

Итак, неевклидова скалярная теория поля допускает построение действия $S_0(M)$, которое, подобно действию S_0 евклидовой модели /см. /2.2//, является положительно определенным, SO(4) -инвариантным, трансляционно-инвариантным и локальным. Принципиальное отличие неевклидова лагранжиана $L_0(x, M)$ от евклидова выражения $L_0(x) = 1/2(\partial\phi/\partial x_n)^2 + m^2/2 \cdot \phi^2(x)$ состоит в том, что

$L_0(x, M)$ зависит от двух вещественных скалярных полей $\phi(x)$ и $\chi(x)$. Появление новой полевой степени свободы, как это видно из /4.22/-/4.23/ и /3.2/, непосредственно связано с существованием в импульсном пространстве /1.5/ нового дискретного квантового числа $p_5/|p_5|$. Заметим, что в "неевклидову" часть лагранжиана /4.27/ масса m входит через функцию $\cos\mu = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}$.

Это, разумеется, соответствует принятому ранее ограничению /4.9/. Данное ограничение вместе с появлением дополнительной полевой степени свободы $\chi(x)$ есть именно та цена, которую мы обязаны заплатить, чтобы в рамках неевклидовой КТП иметь в своем распоряжении действие $S_0(M)$, обладающее всеми необходимыми свойствами 1-4.

Если к свободному лагранжиану $L_0(x, M)$ добавить лагранжиан взаимодействия $L_{int}(x, M) = L_{int}(\phi(x), \chi(x))$ так, чтобы полное действие

$$S(M) = \int L(x, M)\, d^4x = \int [L_0(x, M) + L_{int}(\phi(x), \chi(x))]\, d^4x \qquad /4.28/$$

удовлетворяло требованиям 1-4, то в результате получим полноценную скалярную модель неевклидовой теории поля. В частности, неевклидовым аналогом ϕ^4-модели /2.6/ может служить теория с действием /4.28/, в котором $L_{int}(\phi(x), \chi(x))$ является однородным полиномом 4-й степени по полям $\phi(x)$ и $\chi(x)$.

В заключение этого параграфа приведем компактное выражение для свободного неевклидова действия /4.14/, которое возникает при переходе от полей $\phi_1(p)$ и $\phi_2(p)$ к исходному полю $\phi(p, p_5)$ /см. /3.2//, заданному на всем гиперболоиде /1.5/:

$$S_0(M) = 2\pi M^2 \int \epsilon(p_5)\, \delta(p_L p^L - M^2)\, d^5p\, \phi^+(p, p_5)(2p_5 - 2M\cos\mu)\, \phi(p, p_5) \qquad /4.29/$$

§5. ПЯТИМЕРНОЕ КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Пятимерный характер импульсного представления теории позволяет произвести в ее рамках расширение 4-мерного x-пространства до конфигурационного пространства пяти измерений и прийти в результате к новой интерпретации полей $\phi(x)$, $\chi(x)$ и действия /4.27/.

Во-первых, заметим, что действие в форме /4.14/ остается инвариантным, если поля $\phi_1(p)$ и $\phi_2(p)$ подвергнуть фазовому преобразованию /ср./4.6//:

$$\phi_1(p) \to e^{-i\kappa\tau}\phi_1(p) \equiv \phi_1(p, \tau), \quad \phi_2(p) \to e^{i\kappa\tau}\phi_2(p) \equiv \phi_2(p, \tau), \qquad /5.1/$$

где τ - произвольный безразмерный вещественный параметр. Иными словами,

$$S_0(M) = \pi M^2 \int \frac{d^4p}{\kappa}[2(\kappa - \cos\mu)|\phi_1(p, \tau)|^2 + 2(\kappa + \cos\mu)|\phi_2(p, \tau)|^2]. \qquad /5.2/$$

Определим теперь новые поля $\phi(p, \tau)$ и $\chi(p, \tau)$ соотношениями, подобными /4.22/-/4.23/:

$$\phi(p, \tau) = \frac{1}{\kappa}[\phi_1(p, \tau) + \phi_2(p, \tau)] = \frac{1}{\kappa}[e^{-i\kappa\tau}\phi_1(p) + e^{i\kappa\tau}\phi_2(p)], \qquad /5.3/$$

$$\chi(p, \tau) = \phi_1(p, \tau) - \phi_2(p, \tau) = e^{-i\kappa\tau}\phi_1(p) - e^{i\kappa\tau}\phi_2(p). \qquad /5.4/$$

Легко видеть, что

$$\chi(p, \tau) = i\frac{\partial\phi(p, \tau)}{\partial\tau} \qquad /5.5/$$

и

$$\phi^+(p, \tau) = \phi(-p, -\tau), \quad \chi^+(p, \tau) = \chi(-p, -\tau). \qquad /5.6/$$

После перехода к переменным $\phi(p, \tau)$ и $\chi(p, \tau)$ действие /5.2/ примет вид:

$$S_0(M) = \pi \int [(p^2 + m^2)\, |\phi(p, \tau)|^2 + M^2 |i\frac{\partial\phi(p, \tau)}{\partial\tau} - \cos\mu\, \phi(p, \tau)|^2]\, d^4p. \qquad /5.7/$$

Полагая далее /ср. /4.25//

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipx}\phi(p, \tau)\, d^4p \equiv \phi(x, \tau), \qquad /5.8/$$

будем иметь вместо /5.7/:

$$S_0(M) = \frac{1}{2}\int [|\frac{\partial\phi(x, \tau)}{\partial x_n}|^2 + m^2|\phi(x, \tau)|^2 + M^2|i\frac{\partial\phi(x, \tau)}{\partial\tau} - \cos\mu\, \phi(x, \tau)|^2]\, d\, x \equiv \int L_0(x, \tau; M)\, d^4x, \qquad /5.9/$$

причем

$$\phi^+(x, \tau) = \phi(x, -\tau). \qquad /5.10/$$

Соотношение /5.10/ будем называть условием комбинированной эрмитовости [5].

Поле $\phi(x, \tau)$, в силу /5.8/, /5.3/, /5.4/ и /3.2/ разлагается в 5-интеграл Фурье

$$\phi(x, \tau) = \frac{2M}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ip_L x^L} d^5p\, \delta(p_L p^L - M^2)\, \phi(p, p_5), \quad x^L = (x^\ell, \frac{\tau}{M}) = (x^\ell, x^5) \qquad /5.11/$$

и удовлетворяет, очевидно, дифференциальному уравнению типа Клейна-Гордона в конфигурационном 5-пространстве:

$$(M^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + M^2)\, \phi(x, \tau) = 0. \qquad /5.12/$$

Сравнивая /5.11/ с /4.25/-/4.26/, заключаем, что

$$\phi(x) = \phi(x, 0), \quad \chi(x) = i\frac{\partial\phi(x,0)}{\partial\tau}. \qquad /5.13/$$

Следовательно, введенные нами в §4 переменные $\phi(x)$ и $\chi(x)$ играют роль начальных данных Коши на плоскости $\tau = 0$ для уравнения /5.12/*.

Поскольку действие /5.9/ не зависит от "времени" τ

$$\frac{\partial S_0(M)}{\partial\tau} = 0, \qquad /5.14/$$

мы вправе его истолковать как интеграл движения уравнения /5.12/, описывающего эволюцию поля $\phi(x, \tau)$ по инвариантному параметру τ при начальных условиях /5.13/.

Вводя в рассмотрение интеграл действия

$$\int d^5x \left[\frac{\partial\phi^+(x,\tau)}{\partial x^L}\frac{\partial\phi(x,\tau)}{\partial x_L} - M^2\phi^+(x,\tau)\phi(x,\tau)\right],$$

в котором $\phi(x,\tau)$ и $\partial\phi(x,\tau)/\partial\tau$ играют роль обобщенных координат и скоростей и для которого /5.12/ является уравнением Лагранжа-Эйлера, можно построить сохраняющийся 5-тензор "энергии-импульса" $T_{KL}(x,\tau)$ и 5-вектор тока $J_L(x,\tau)$**. Нетрудно убедиться далее, что действие /5.9/ представляется в виде

$$S_0(M) = \int [T_{55}(x,\tau) + \cos\mu\, J_5(x,\tau)]\,d^4x. \qquad /5.15/$$

Теперь равенство /5.14/ становится очевидным.

Резюмируем наши наблюдения, касающиеся действия $S_0(M)$. Как было показано в §4, эта величина в полной аналогии с плоским случаем определяется заданием лагранжиана $L_0(x, M)$, локального в 4-мерном x-пространстве. Теперь же мы установили, что свойство локальности в новой схеме является даже более глубоким, чем прежде. Согласно /5.9/, действие $S_0(M)$ задается лагранжианом $L_0(x,\tau; M)$, локальным в пяти измерениях, причем $L_0(x,M) = L_0(x, 0; M)$. Однако, хотя пятый параметр и фигурирует явно в аппарате теории, она реально остается четырехмерной. В этом состоит принципиальное отличие развиваемого подхода от существенно 5-мерных теорий, например, теории Калуза-Клейна, 5-оптики Румера и т.п. Можно заметить, тем не менее, определенный параллелизм между данной схемой и пятимерным формализмом стохастического квантования Паризи-Ву [7]/ср.также [10]/.

Имеет смысл подчеркнуть еще раз, что поле $\phi(x,\tau)$ в нашем аппарате является естественным объектом, поскольку разложение

---

* Более общая постановка задачи Коши для уравнения /5.12/ обсуждается в Приложении.

** Напомним, что в силу /5.10/ поле $\phi(x,\tau)$ неэрмитово при $\tau \neq 0$.

/5.11/ представляет собой адекватное преобразование Фурье для функций, заданных на гиперболоиде /1.5/. Ясно, что обращением /5.11/ служат соотношения /см. /3.2//:

$$\phi_1(p) = -\frac{i}{(2\pi)^{5/2}}\int d^4x\, e^{-ip_nx_n}\left(\phi(x,\tau)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial\tau}} e^{i\kappa\tau}\right), \qquad /5.16/$$

$$\phi_2(p) = \frac{i}{(2\pi)^{5/2}}\int d^4x\, e^{-ip_nx_n}\left(\phi(x,\tau)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial\tau}} e^{-i\kappa\tau}\right), \qquad /5.17/$$

где, как обычно, $f_1\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial\tau}}f_2 = f_1\frac{\partial f_2}{\partial\tau} - \frac{\partial f_1}{\partial\tau}f_2$. Независимость правых частей /5.16/ и /5.17/ от τ обеспечивается тем, что $\phi(x,\tau)$ удовлетворяет /5.12/.

Если построить фундаментальное решение уравнения /5.12/ для задачи Коши /5.18/

$$D(x,\tau) = \frac{i}{(2\pi)}\int \epsilon(p_5)\delta(p_Lp^L - M^2)\,d^5p\, e^{-ip_Lx^L},\ D(x,0) = 0,\ \frac{\partial D(x,0)}{\partial\tau} = \frac{1}{M}\delta^4(x),$$

то поле $\phi(x,\tau)$ можно явно выразить через начальные данные $\phi(x)$ и $\chi(x)$:

$$\phi(x,\tau) = M\int\frac{\partial D(x-x',\tau)}{\partial\tau}\phi(x')\,d^4x' - iM\int D(x-x',\tau)\chi(x')\,d^4x'. \qquad /5.19/$$

§6 ПРОИЗВОДЯЩИЙ ФУНКЦИОНАЛ И ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ

Для квантования нашей модели применим метод функционального интеграла. Учитывая, что действие /4.28/ зависит от пары полей $\phi(x)$ и $\chi(x)$, производящий функционал для корреляционных функций /функций Швингера/ запишем в виде

$$Z[g,j] = \frac{\int e^{-S(M) + \frac{1}{2}\int d^4x[g(x)\phi(x) + j(x)\chi(x)]}D\phi D\chi}{\int e^{-S(M)}D\phi D\chi}, \qquad /6.1/$$

где $g(x)$ и $j(x)$ - классические источники полей $\phi(x)$ и $\chi(x)$ соответственно. Не теряя общности, можно положить:

$$j(x) = j(x,0), \quad g(x) = i\frac{\partial j(x,0)}{\partial\tau}, \qquad /6.2/$$

где $j(x,\tau)$ - функция в конфигурационном 5-пространстве, удовлетворяющая условию комбинированной эрмитовости $j^+(x,\tau) = j(x,-\tau)$. Сравнивая /6.2/ с /5.13/ и принимая во внимание /4.25/-/4.26/ и /4.22/-/4.23/, представим функции источников в виде:

$$j(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{ipx}\,d^4p\,\frac{j_1(p) + j_2(p)}{\kappa}, \qquad /6.3/$$

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipx}\, d^4p\, [j_1(p) - j_2(p)]. \qquad /6.4/$$

Нетрудно убедиться далее, что

$$\frac{1}{2} \int d^4x\, [g(x)\,\phi(x) + j(x)\,\chi(x)] = 2\pi \int d\Omega_p [\phi_1(p)\, j_1(-p) - \phi_2(p)\, j_2(-p)], \qquad /6.5/$$

где $d\Omega_p$ - инвариантная мера /3.17/ в p-пространстве Лобачевского. Таким образом, величины $j_1(p)$ и $-j_2(p)$ представляют собой источники полей $\phi_1(p)$ и $\phi_2(p)$.

Используя /6.1/, можно построить функции Швингера для рассматриваемой модели:

$$\langle \phi(x_1) \ldots \phi(x_k)\, \chi(x_{k+1}) \ldots \chi(x_n) \rangle_0 =$$

$$= \frac{\int \phi(x_1) \ldots \phi(x_k)\, \chi(x_{k+1}) \ldots \chi(x_n)\, e^{-S(M)} D\phi\, D\chi}{\int e^{-S(M)} D\phi\, D\chi} = \qquad /6.6/$$

$$= 2^n \frac{\delta^n Z[g, j]}{\delta g(x_1) \ldots \delta g(x_k)\, \delta j(x_{k+1}) \ldots \delta j(x_n)} \Big|_{g = j = 0}.$$

В свободном случае, когда лагранжиан дается выражением /4.27/, Z-функционал вычисляется точно:

$$Z_0[g, j] = \exp\{ \frac{1}{8} \int [g(x) + \cos\mu\, j(x)]\, S_0(x - y)\, [g(y) + \cos\mu\, j(y)]\, d^4x\, d^4y \} \times$$
$$\times \exp\{ \frac{1}{8M^2} \int j^2(x)\, d^4x \}, \qquad /6.7/$$

где

$$S_0(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ip(x-y)} \frac{d^4p}{p^2 + m^2}. \qquad /6.8/$$

С помощью /6.6/ и /6.7/ находим свободные двухточечные функции Швингера:

$$\langle \phi(x_1)\, \phi(x_2) \rangle_0 = S_0(x_1 - x_2), \quad \langle \phi(x_1)\, \chi(x_2) \rangle_0 = \cos\mu\, S_0(x_1 - x_2),$$
$$\langle \chi(x_1)\, \chi(x_2) \rangle_0 = \cos^2\mu\, S_0(x_1 - x_2) + \frac{1}{M^2}\, \delta^4(x_1 - x_2). \qquad /6.9/$$

В импульсном представлении, в силу /4.25/-/4.26/, вместо /6.9/ будем иметь:

$$\langle \phi(p)\, \phi(q) \rangle_0 = \frac{\delta^4(p+q)}{2\pi} \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad \langle \phi(p)\, \chi(q) \rangle_0 = \frac{\delta^4(p+q)}{2\pi} \frac{\cos\mu}{p^2 + m^2},$$
$$\langle \chi(p)\, \chi(q) \rangle_0 = \frac{\delta^4(p+q)}{2\pi} \frac{1}{M^2} \frac{p^2 + M^2}{p^2 + m^2}. \qquad /6.10/$$

С помощью /6.10/ и соотношений /4.22/-/4.23/ легко построить свободные функции Швингера для полей $\phi_1(p)$ и $\phi_2(p)$ /ср. /4.17/-/4.18//:

$$\langle \phi_1(p)\, \phi_1(q) \rangle_0 = \frac{\delta^{(4)}(p, -q)}{2\pi} \frac{1}{2M^2(\kappa - \cos\mu)}, \quad \langle \phi_1(p)\, \phi_2(q) \rangle_0 = 0,$$
$$\langle \phi_2(p)\, \phi_2(q) \rangle_0 = \frac{\delta^{(4)}(p, -q)}{2\pi} \frac{1}{2M^2(\kappa + \cos\mu)}, \qquad /6.11/$$

где $\delta^{(4)}(p, -q)$ есть δ-функция в p-пространстве Лобачевского /см. /3.18/-/3.19//. Нетрудно убедиться, что выражение для Z_0-функционала эквивалентно следующему:

$$Z_0[j_1, j_2] = \exp\{ \pi \int d\Omega_p [\frac{j_1(-p)\, j_1(p)}{2M^2(\kappa - \cos\mu)} + \frac{j_2(-p)\, j_2(p)}{2M^2(\kappa + \cos\mu)}] \}. \qquad /6.12/$$

Варьируя /6.12/, с учетом /3.20/ и /6.5/, по источникам $j_1(p)$ $j_2(p)$, можно снова прийти к /6.11/:

$$\frac{1}{4\pi^2} \frac{\delta^2 Z_0}{\delta j_1(-p)\, \delta j_1(-q)} \Big|_{j_1 = j_2 = 0} = \langle \phi_1(p)\, \phi_1(q) \rangle_0, \qquad /6.13/$$

$$\frac{\delta^2 Z_0}{\delta j_1(-p)\, \delta j_2(-q)} \Big|_{j_1 = j_2 = 0} = 0, \qquad /6.14/$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \frac{\delta^2 Z_0}{\delta j_2(-p)\, \delta j_2(-q)} \Big|_{j_1 = j_2 = 0} = \langle \phi_2(p)\, \phi_2(q) \rangle. \qquad /6.15/$$

Все три соотношения /6.11/ объединяются в одну компактную формулу, если использовать 5-мерные обозначения /ср./4.29//:

$$\delta(p_L p^L - M^2)\, \delta(q_L q^L - M^2) \langle \phi(p, p_5)\, \phi(-q, q_5) \rangle_0 = \frac{\delta^{(5)}(p-q)}{4\pi M^2} \frac{\epsilon(q_5)\, \delta(q_L q^L - M^2)}{2q_5 - 2M\cos\mu}. \qquad /6.16/$$

Отсюда с помощью /5.11/ находим двухточечную корреляционную функцию для поля $\phi(x, \tau)$ в отсутствие взаимодействия между "начальными данными" $\phi(x)$ и $\chi(x)$:

$$\langle \phi(x_1, \tau_1)\, \phi(x_2, -\tau_2) \rangle_0 = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-iq_L(x_1^L - x_2^L)}\, \epsilon(q_5)\, \delta(q_L q^L - M^2)\, d^5q}{q_5 - M\cos\mu} \qquad /6.17/$$

Ясно, что все соотношения /6.9/ содержатся в /6.17/.

В общем случае, при наличии взаимодействия между полями $\phi(x)$ и $\chi(x)$, n-точечная корреляционная функция для поля $\phi(x, \tau)$

$$\langle \phi(x_1, \tau_1)\, \phi(x_2, \tau_2) \ldots \phi(x_n, \tau_n) \rangle \qquad /6.18/$$

может быть выражена через n -точечные функции Швингера /6.6/, если воспользоваться соотношением /5.20/. Таким образом, величина $\phi(x, \tau)$, удовлетворяющая уравнению движения /5.12/ в 5-мерном конфигурационном пространстве, представляет собой стохастическое поле, причем случайный характер этого поля обусловлен случайным характером начальных данных $\phi(x, 0) = \phi(x)$ и $\partial\phi(x,0)/\partial\tau = -i\chi(x)$. Плотность распределения вероятности для начальных данных определяется выражением

$$dP[\phi, \chi] = \frac{e^{-S(M)} D\phi D\chi}{\int e^{-S(M)} D\phi D\chi}. \qquad /6.19/$$

Возвратимся теперь снова к Z-функционалу /6.1/ и рассмотрим его в плоском пределе $M \to \infty$. С этой целью выделим в подынтегральных выражениях числителя и знаменателя экспоненциальный множитель, явно зависящий от M /см. /4.27//:

$$e^{-\frac{M^2}{2}\int (\chi(x) - \cos\mu\phi(x))^2 d^4x}. \qquad /6.20/$$

Вспоминая теперь, что в одномерном случае

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{e^{-(x-y)^2/2\epsilon}}{\sqrt{2\pi\epsilon}} = \delta(x-y) \qquad /6.21/$$

и учитывая, что $\lim\limits_{M\to\infty}\cos\mu = 1$, получаем: $\lim\limits_{M\to\infty} Z[g,j] =$

$$= \frac{\int e^{-\frac{1}{2}\int d^2x[(\frac{\partial\phi}{\partial x_n})^2 + m^2\phi^2] - \int d^4x L_{int}[\phi,\chi] + \frac{1}{2}\int[\phi g + \chi j]d^4x} \prod\limits_x \delta(\phi(x) - \chi(x)) D\phi D\chi}{\int e^{-\frac{1}{2}\int d^4x[(\frac{\partial\phi}{\partial \chi_n})^2 + m^2\phi^2] - \int d^4x L_{int}[\phi,\chi]} \prod \delta(\phi(x) - \chi(x)) D\phi D\chi} =$$

$$= \frac{\int e^{-\int d^4x[L_0(x) + L_{int}(\phi(x),\phi(x))] + \int d^4x \phi(x)\frac{1}{2}(g(x)+j(x))} D\phi}{\int e^{-\int d^4x[L_0(x) + L_{int}(\phi(x),\phi(x))]} D\phi} = Z[\frac{g+j}{2}], \qquad /6.22/$$

где функция источника $(g(x) + j(x))/2$ есть полусумма выражений /6.3/-/6.4/ при $M \to \infty$:

$$\frac{g(x) + j(x)}{2} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipx} j_1(x) d^4p. \qquad /6.23/$$

Причина исчезновения зависимости Z-функционала от источника $j_2(x)$ при $M \to \infty$ становится совсем прозрачной, если анализировать /6.22/ в импульсном представлении. В самом деле, в пределе $M \to \infty$ соотношения /4.22/-/4.23/ эквивалентны равенствам $\phi_1(p) = (\phi(p) + \chi(p))/2$ и $\phi_2(p) = (\phi(p) - \chi(p))/2$. Наличие в /6.22/

континуальной δ-функции $\prod\limits_x \delta(\phi(x) - \chi(x))$ означает, что фактически в плоском пределе $\phi_1(p) = \phi(p)$, $\phi_2(p) = 0$. Следовательно, в силу /6.5/, Z-функционал в рассматриваемом пределе перестает зависеть от $j_2(p)$. В частности, в свободном случае это непосредственно видно из /6.12/.

Итак, мы можем заключить, что в плоском пределе $M \to \infty$ неевклидов Z-функционал /6.1/, отвечающий действию $S(M) = L_0(x, M) + L_{int}[\phi(x), \chi(x)]$, совпадает с Z-функционалом скалярной евклидовой модели с действием $S = 1/2\cdot(\partial\phi/\partial\chi_n)^2 + m^2/2\cdot\phi^2 + L_{int}[\phi(x), \phi(x)]$. При этом в импульсном представлении евклидово поле $\phi(p) = 1/(2\pi)^{5/2} \int e^{-ipx}\phi(x)\, d^4x$ оказывается тождественным полю $\phi_1(p)$, а зависимость от компоненты $\phi_2(p)$ полностью исчезает.

В заключение этого параграфа вернемся к обсуждавшейся в §§3 и 4 проблеме релятивистского разворота неевклидовой КТП. Поскольку взаимодействие полей $\phi(x)$ и $\chi(x)$ у нас выбрано локальным, а функции Швингера /6.10/ обладают стандартными аналитическими свойствами по переменной p^2, то, по крайней мере, в теории возмущений релятивистский разворот в данной схеме является столь же законной операцией, как и в обычной евклидовой КТП. При этом никаких ограничений типа /3.12/ на область аналитичности по переменной $p_\mu p^\mu = p_0^2 - \vec{p}^2$, очевидно, не возникает.

Можно обратить эти рассуждения и рассмотреть релятивистскую теорию, которая после евклидова разворота становится эквивалентной нашей модели. Ясно, что такая теория в x-пространстве Минковского должна описываться локальным лагранжианом *

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_\mu}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\mu} - \frac{m^2}{2}\phi^2(x) - \frac{M^2}{2}(\chi(x) - \cos\mu\phi(x))^2 + L_{int}[\phi(x), \chi(x)]. \qquad /6.24/$$

Отсюда получаются следующие уравнения движения для гейзенберговых полей $\phi(x)$ и $\chi(x)$:

$$\Box\phi(x) + m^2\phi(x) = \frac{\partial L_{int}[\phi(x), \chi(x)]}{\partial\phi(x)} + M^2\cos\mu(\chi(x) - \cos\mu\phi(x)), \qquad /6.25/$$

$$\chi(x) - \cos\mu\phi(x) = \frac{1}{M^2}\frac{\partial L_{int}[\phi(x), \chi(x)]}{\partial\chi(x)}. \qquad /6.26/$$

В бесконечно удаленном прошлом в отсутствие взаимодействия будем иметь вместо /6.25/-/6.26/:

$$(\Box + m^2)\phi^{in}(x) = 0, \quad \chi^{in}(x) = \cos\mu\phi^{in}(x), \qquad /6.27/$$

откуда

---

*Предполагается, что контрчлены включены в $L_{int}[\phi, \chi]$.

$$\phi^{in}(p) = \delta(p_\mu p^\mu - m^2)\tilde{\phi}^{in}(p), \quad \chi^{in}(p) = \cos\mu\,\delta(p_\mu p^\mu - m^2)\tilde{\phi}^{in}(p). \qquad /6.28/$$

Далее, оставаясь в in-представлении, можно стандартным образом построить пространство Фока и унитарную матрицу рассеяния S как функционал свободного ϕ^{in}-поля:

$$S = S[\phi^{in}]; \quad S^+S = SS^+ = I. \qquad /6.29/$$

Коэффициентные функции S-матрицы посредством редукционных формул будут выражаться через функции Грина, которые есть не что иное, как релятивистски развернутые функции Швингера /6.6/ нашей неевклидовой модели.

С другой стороны, разворачивая в релятивистскую область соотношения /4.22/-/4.23/ и принимая во внимание /6.28/, получим /ср. §4/:

$$\phi_1^{in}(p_0,\vec{p}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\frac{p_\mu p^\mu}{M^2}}\,\phi^{in}(p) + \chi^{in}(p)\right) = \cos\mu\,\delta(p_\mu p^\mu - m^2)\phi^{in}(p) =$$
$$= \delta\left(2M^2\sqrt{1-\frac{p_\mu p^\mu}{M^2}} - 2M^2\cos\mu\right)\phi^{in}(p), \quad \phi_2^{in}(p_0,\vec{p}) = 0. \qquad /6.30/$$

Таким образом, поля $\phi_1^{in}(p_0,\vec{p})$ и $\phi^{in}(p)$ фактически тождественны друг другу, а /6.29/ играет роль S-матрицы в нашей схеме.

Подчеркнем, что в релятивистской формулировке теории, основанной на лагранжиане /6.24/, явно фигурирует наш новый параметр - фундаментальная масса M. Роль его двояка. С одной стороны, как это непосредственно видно из /6.24/, M является предельным значением для массы частицы m /ср. /4.9//. С другой, - при энергиях $E \gtrsim M$ из-за присутствия поля $\chi(x)$ существенно модифицируется характер взаимодействия. Действительно, рассмотрим простейший аналог плоской ϕ^3-модели:

$$L_{int} = \lambda\chi(x)\phi^2(x). \qquad /6.31/$$

Тогда из /6.26/ получим $\chi(x) = \cos\mu\,\phi(x) + \lambda/M^2\cdot\phi^2(x)$. Это означает, в силу /6.25/, что поле $\phi(x)$ описывается следующим эффективным лагранжианом:

$$L_{эфф}(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) + \lambda\cos\mu\,\phi^3(x) + \frac{\lambda^2}{2M^2}\phi^4(x). \qquad /6.32/$$

§7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируем еще раз некоторые узловые моменты данной работы.

1. Импульсное 4-пространство постоянной отрицательной кривизны /1.5/ является вполне подходящей "строительной площадкой"

для теории поля. Соответствующая неевклидова КТП содержит новый универсальный параметр - фундаментальную массу M и представляет собой нетривиальную альтернативу прежней "плоской" теории в области сверхвысоких энергий $E \gtrsim M$.

2. В математическом отношении неевклидова КТП эквивалентна некоторому варианту стандартной евклидовой теории поля с удвоенным числом полевых переменных. Область локальности новой схемы естественно расширяется до пространства пяти измерений.

3. Чтобы развитая теория поля была внутренне непротиворечивой, необходимо предположить, что массы "элементарных" частиц, для описания которых она применяется, ограничены фундаментальной массой M. В соответствии с общими свойствами релятивистского "оператора положения"[8,3] это означает, что рассматриваемые частицы нельзя локализовать в пространстве с точностью, превышающей фундаментальную длину $\ell = 1/M$.

4. Если сравнить свободное действие /2.2/ "плоской" скалярной модели с его неевклидовым аналогом /4.29/, то становится видно, что /4.29/ может быть получено из /2.2/ с помощью формальной замены:

$$\phi(p) \to \phi(p, p_5), \quad d^4p \to 2M\epsilon(p_5)\delta(p_L p^L - M^2)\,d^5p,$$
$$p^2 + m^2 \to 2M(p_5 - M\cos\mu). \qquad /7.1/$$

Этот алгоритм мы будем использовать при построении интеграла действия для полей с другими тензорными размерностями, модифицируя соответствующим образом волновой оператор.

5. Построение локальной и трансляционно-инвариантной неевклидовой КТП на базе компактного сферического p-пространства /1.4/ оказывается невозможным. В самом деле, как легко понять, в данном варианте для описания полей в p-представлении мы должны использовать финитные функции, исчезающие вне области /1.6/. Их фурье-образы, какие-то $\phi(x)$, $\chi(x)$, ..., принадлежат к определенному классу целых аналитических функций[9], для элементов которого не существует операций возведения в степень и умножения друг на друга*. Следовательно, не впадая в противоречие, мы не можем здесь строить величины $\phi^2(x)$, $\phi(x)\chi(x)$, $\phi^4(x)$ и, таким образом, лишаемся возможности развивать локальную теорию поля.

Авторы приносят искреннюю благодарность А.Д.Донкову, Р.М.Ибадову и М.В.Чижову за постоянное сотрудничество и многочисленные конструктивные дискуссии.

---

*Иначе говоря, обращение Фурье произведения двух функций из данного класса уже не является финитной функцией в p-пространстве.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Б.А.Арбузова, Н.Н.Боголюбова, А.Н.Васильева, А.А.Логунова, В.А.Мещерякова, Р.М.Мир-Касимова, Л.В.Прохорова, И.Т.Тодорова и Ф.И.Федорова за интерес к работе и плодотворные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Расширенные поля в конфигурационном 5-пространстве

Рассмотрим в конфигурационном 5-пространстве произвольное поле $\hat{\phi}(x,r)$, подчиняющееся условию комбинированной эрмитовости /5.10/ и имеющее по переменным (x, r) частные производные не ниже 2-го порядка. Чтобы подчеркнуть отличие $\hat{\phi}(x,r)$ от величины $\phi(x,r)$, являющейся решением уравнения /5.12/, будем называть новое поле расширенным.

Предположим далее, что на гиперплоскости $r = 0$ поля $\phi(x,r)$ и $\hat{\phi}(x, r)$ удовлетворяют соотношениям

$$\phi(x, 0) = \hat{\phi}(x, 0)\,, \quad \frac{\partial\phi(x,0)}{\partial r} = \frac{\partial\hat{\phi}(x,0)}{\partial r}\,. \qquad /П.1/$$

Тогда, интерпретируя /П.1/ как начальные данные в нашей задаче Коши и применяя /5.20/, получим:

$$\phi(x,r) = M^2\int\delta(r')\, d^5x'[D(x-x', r-r')\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial r'}}\hat{\phi}(x', r')]; \qquad /П.2/$$

$$d^5x = d^4x\,dx^5 = \frac{1}{M}\,d^4x\,dr\,.$$

Соответственно, вместо /5.17/-/5.18/ будем иметь

$$\phi_1(p) = \frac{-iM}{(2\pi)^{5/2}}\int\delta(r)\,d^5x\,e^{-ip_nx_n}[\hat{\phi}(x,r)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial r}}e^{i\kappa r}],$$

$$\phi_2(p) = \frac{iM}{(2\pi)^{5/2}}\int\delta(r)\,d^5x\,e^{-ip_nx_n}[\hat{\phi}(x,r)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial r}}e^{-i\kappa r}]. \qquad /П.3/$$

Очевидно также, что не зависящее от r действие /5.9/ теперь можно записать в виде

$$S_0(M) = \int dr\,\delta(r)\int\hat{L}_0(x, r; M)\,d^4x = M\int\delta(r)\,d^5x\,\hat{L}_0(x,r; M)\,, \qquad /П.4/$$

где $\hat{L}_0(x, r; M)$ - 5-мерная локальная лагранжева плотность из /5.9/, в которой поле $\phi(x, r)$ заменено расширенным полем $\hat{\phi}(x,r)$:

$$\hat{L}_0(x, r; M) = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial\hat{\phi}(x,r)}{\partial x_n}\right|^2 + \frac{m^2}{2}|\hat{\phi}(x, r)|^2 + \frac{M^2}{2}\left|i\frac{\partial\hat{\phi}(x,r)}{\partial r} - \cos\mu\,\hat{\phi}(x,r)\right|^2. \qquad /П.5/$$

Поскольку в полном интеграле действия /4.28/ лагранжиан взаимодействия $L_{int}(x; M)$ выбирается как локальная функция

$L_{int}[\phi(x),\chi(x)]$ начальных данных $\phi(x)$ и $\chi(x)$, то этот интеграл также представим в виде /П.5/:

$$S(M) = M\int\delta(r)\,d^5x\,\hat{L}(x, r; M) = M\int\delta(r)\,d^5x\,[\hat{L}_0(x, r; M) + \hat{L}_{int}(x,r;M)] \qquad /П.6/$$

где

$$\hat{L}_{int}(x, r; M) = \hat{L}_{int}[\hat{\phi}(x,r), i\frac{\partial\hat{\phi}(x,r)}{\partial r}]\,. \qquad /П.7/$$

Использование расширенных полей типа $\hat{\phi}(x, r)$ в качестве функциональных переменных в интеграле действия оказывается весьма полезным при рассмотрении локальных калибровочных преобразований в нашем формализме. Действительно, поле $\phi(x, r)$, подчиняясь "уравнению связи" /5.12/, не допускает преобразований вида:

$$\phi(x, r) \to S(x, r)\,\phi(x, r)\,. \qquad /П.8/$$

Разрешая это уравнение с помощью формулы /П.2/, мы получаем в свое распоряжение новую переменную - расширенное поле $\hat{\phi}(x,r)$, которое уже может быть подвергнуто преобразованию типа /П.8/. В результате для поля $\phi(x, r)$ возникает следующий, вообще говоря, нелокальный закон преобразования, согласующийся с уравнением /5.12/:

$$\phi(x, r) \to M^2\int\delta(r')\,d^5x'[D(x-x', r-r')\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial r}}(S(x', r')\,\hat{\phi}(x', r'))]\,. \qquad /П.9/$$

На гиперплоскости $r = 0$ /П.9/ эквивалентно локальному преобразованию начальных данных $\phi(x, 0)$ и $\partial\phi(x,0)/\partial r$:

$$\begin{pmatrix}\phi(x, 0)\\ \dfrac{\partial\phi(x,0)}{\partial r}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}S(x, 0) & 0\\ \dfrac{\partial S(x,0)}{\partial r} & S(x, 0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi(x, 0)\\ \dfrac{\partial\phi(x, 0)}{\partial r}\end{pmatrix}. \qquad /П.10/$$

Таким образом, в аппарате неевклидовой КТП существует естественная возможность для рассмотрения групп калибровочных преобразований, локализованных в 5-мерном конфигурационном пространстве. Как будет показано в следующей работе, именно с такими, более широкими калибровочными группами приходится иметь дело в неевклидовых обобщениях максвелловской теории электромагнитного поля и теории поля Янга-Миллса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадышевский В.Г. ОИЯИ, Р2-5717, Дубна, 1971; Кадышевский В.Г. В кн.: "Проблемы теоретической физики", посвященной памяти акад. И.Е.Тамма. "Наука", М., 1972, с.52;

ОИЯИ, Д2-7161, Дубна, 1973; Донков А.Д. и др. Болгарский физический журнал, 1974, т.1, с.58, 150, 233, 1975, т.2, с.3; Труды МИАН СССР им. В.А.Стеклова. "Наука", М., 1975, т.CXXXVI, с.85; Кадышевский В.Г. В кн.: Труды V Международного симпозиума по физике высоких энергий и элементарных частиц. Варшава, 1975. ОИЯИ, Д1,2-9342, Дубна, 1975; Кадышевский В.Г., Матеев М.Д., Мир-Касимов Р.М. В кн.: Труды Международного семинара "Глубоконеупругие инклюзивные процессы". Сухуми, 1975, М., 1977; Донков А.Д. и др. В кн.: Нелокальные, нелинейные и неперенормируемые теории. ОИЯИ, Д2-9788, Дубна, 1976; Donkov A.D. et al. In: Proc. of Int.Conf. on High Energy Phys. Tbilisi, 1976. JINR, D1-2-10400, Dubna, 1977, P-A5-1; Волобуев И.П. и др. ТМФ, 1979, т.40, с.363; Донков А.Д., Кадышевский В.Г., Матеев М.Д. ТМФ, 1982, т.50, с.360.

2. Kadyshevsky V.G. Nucl.Phys., 1978, B141, p.477; Кадышевский В.Г. ЭЧАЯ, 1980, т.2, вып.1, с.5; Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. Phys.Lett., 1981, B106, No.1,2, p.139.
3. Блохинцев Д.И. Пространство и время в микромире. "Наука", М., 1982; Ефимов Г.В. Нелокальные взаимодействия квантовых полей. "Наука", М., 1977; Марков М.А. Гипероны и К-мезоны. Физматгиз, М., 1958.
4. Grisaru M.T., Siegel W. Nucl.Phys., 1982, B201, p.292; Mandelstam S. Nucl.Phys., 1983, B123, p.149; Howe P.S., Stelle K.S., West P.C. Phys.Lett., 1983, B124, p.55; Howe P.S., Stelle K.S., Townsend P.K. Preprint Imperial College ICTP/82-83/20, 1983.
5. Васильев А.Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Изд-во Ленингр.ун-та, Л., 1976.
6. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства. "Наука", М., 1969; Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Обобщенные функции. Выпуск 5. Физматгиз, М., 1962.
7. Parisi G., Wu-Yong-Shi. Scientia Sinica, 1981, vol.24, p.484; Zwanziger D. Nucl.Phys., 1981, B192, p.259; Klauder J.R., Ezawa H. Bell.Labs. preprint, 1982; Gozzi E. Phys.Lett., 1983, B130, p.183.
8. Newton T.D., Wigner E.P. Rev.Mod.Phys., 1949, vol.21, p.400.
9. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Обобщенные функции. Выпуск 3. Физматгиз, М., 1958.
10. De Alfaro V., Fubini S., Furlan G. Il Nuovo Cim., 1983, vol.74A, No.4, p.365.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 декабря 1983 года.

Кадышевский В.Г., Матеев М.Д. P2-83-844

Квантовая теория поля и новый универсальный масштаб в области высоких энергий

Скалярная модель

Настоящая статья - первая из нового цикла наших работ, посвященных проблеме построения, обоснования и физической интерпретации квантовой теории поля /КТП/, в которой в качестве импульсного 4-пространства используется пространство постоянной кривизны с достаточно большим радиусом M. Параметр M называется фундаментальной массой, обратная величина $\ell = 1/M$ - фундаментальной длиной. Фундаментальная масса выступает как новый универсальный масштаб теории в области высоких энергий. Стандартной КТП отвечает "плоский предел" $M \to \infty$. На примере скалярной модели показано, что КТП с фундаментальной массой в математическом отношении эквивалентна определенному варианту локальной КТП с удвоенным числом полевых переменных и ограничением $m \le M$ на массу частиц. Ключевая роль в развиваемом подходе принадлежит пятимерному конфигурационному представлению. Оказывается, что область локальности новой схемы естественно расширяется до пространства пяти измерений. Это обстоятельство будет иметь определяющее значение при формулировке калибровочной КТП с фундаментальной массой.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. P2-83-844

Quantum Field Theory and a New Universal High Energy Scale

The Scalar Model

The present article is the first of a new series dedicated to the problem of constructing, substantiation and physical interpretation of quantum field theory (QFT), in which the fourdimensional momentum space is a constant curvature space with a sufficiently large radius M. The parameter M is called fundamental mass and its inverse $\ell = 1/M$ fundamental length. The fundamental mass fixes a new universal scale of the theory in the high energy region. The standard QFT is recovered in the "flat limit" $M \to \infty$. It is exemplified by a scalar model that QFT with fundamental mass is equivalent from the mathematical point of view to a certain version of local QFT with a doubled number of field variables and a bound $m \le M$ on the mass of particles. A key part in the developed approach is played by the five-dimensional configuration representation. It happens that the region of locality of the new scheme naturally extends to a space of five dimensions. This fact is of crucial importance in the formulation of gauge QFT with fundamental mass.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод авторов