27/V-84

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-83-821

В.С.Герджиков, А.Б.Яновски

КАЛИБРОВОЧНО-КОВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ПОРОЖДАЮЩЕГО ОПЕРАТОРА

Система Захарова-Шабата

Направлено в журнал "Physics Letters A"

1983

1. Понятие калибровочной эквивалентности линейных задач $L \to \tilde{L} = g^{-1} L g$, введенное в [1,2], оказалось особенно полезным для установления эквивалентности различных нелинейных эволюционных уравнений /НЭУ/, решаемых методом обратной задачи рассеяния /МОЗР/ [3].

Основную роль в описании свойств таких НЭУ играет интегро-дифференциальный оператор Λ, который строится по L /см. п.3 ниже и работы [4–9]/. Для системы Захарова-Шабата каноническая калибровка [3]:

$$L(q,\lambda)\psi = \left(i\frac{d}{dx} - q - \lambda\sigma_3\right)\psi = 0, \qquad q = q_+\sigma_+ + q_-\sigma_-$$

$$\lim_{|x|\to\infty} q(x) = 0, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{/1/}$$

спектральная теория оператора Λ и ее применение к изучению НЭУ хорошо известны [5,6].

В то же время теория оператора $\tilde{\Lambda}$, связанного с системой /1/ в так называемой полюсной калибровке:

$$i\frac{d}{dx}\tilde{\psi} = \lambda S\tilde{\psi}, \qquad S = \psi_0^{-1}\sigma_3\psi_0,$$

$$\tilde{\psi} = \psi_0^{-1}\psi(x,\lambda), \qquad \psi_0 = \psi(x,\lambda)/_{\lambda=0}, \qquad \lim_{x\to\infty}\psi_0 = 1, \tag{/2/}$$

не изучалась. Одна из главных трудностей состоит в выражении $\tilde{\Lambda}$ только через $S(x)$. Без такого выражения все результаты, содержащие $\tilde{\Lambda}$, были бы на уровне теорем существования.

В настоящей работе мы строим теорию оператора Λ в явно калибровочно-ковариантном виде и предлагаем метод для вычисления $\tilde{\Lambda}$ через коэффициентные функции $\tilde{L}$. Все результаты для класса НЭУ, связанных с системой L /1/, автоматически переносятся на НЭУ, связанные с системой $\tilde{L}$ /2/.

Простейшими примерами таких уравнений являются нелинейное уравнение Шредингера НУШ:

$$i\sigma_3 q_t + q_{xx} + 2q\langle q,q\rangle = 0, \qquad \langle q,q\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr} q^2 \tag{/3/}$$

и калибровочно эквивалентное ему уравнение ферромагнетика Гайзенберга ФГ [1]:

$$S_t = \frac{1}{2i}[S, S_{xx}]. \tag{/4/}$$

В частности, из компактных формул для законов сохранения [6] мы получаем, что сохраняющиеся плотности для ФГ полиномиальны по S и его производным по x.

2. Введем обозначения и напомним нужные факты из теории рассеяния для линейных задач /1/ и /2/ с $q \in \mathcal{S}_{\sigma_3}$ /см., напр., [4,1] /. Здесь $\mathcal{S}_{\sigma_3}$ - пространство функций типа функций Шварца со значениями в алгебре $sl(2, \mathbf{C})$, удовлетворяющими $\langle q, \sigma_3 \rangle = 1/2\, \mathrm{tr}\,\sigma_3 q = 0$. Все величины, связанные с $\tilde{L}$ /2/, будем обозначать тильдой ~.

Решения Йоста /1/ и матрица перехода определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \psi(x,\lambda) &= \|\psi^-, \psi^+\| \to e^{-i\lambda\sigma_3 x}, \quad x \to \infty, \\ \phi(x,\lambda) &= \|\phi^+, \phi^-\| \to \sigma_3 e^{-i\lambda\sigma_3 x}, \quad x \to -\infty, \end{aligned} \qquad /5/$$

$$T(\lambda) = \psi^{-1}\phi = \begin{pmatrix} a^+(\lambda) & b^-(\lambda) \\ b^+(\lambda) & -a^-(\lambda) \end{pmatrix}, \ \det T = -1. \qquad /6/$$

Величины $\tilde{\psi}$, $\tilde{\phi}$, $\tilde{T}$ связаны с ψ, ϕ, T соотношениями:

$$\tilde{\psi} = \psi_0^{-1}\psi, \quad \tilde{\phi} = \psi_0^{-1}\phi\, T(0)^{-1}\sigma_3, \quad \tilde{T}(\lambda) = T(\lambda)\, T^{-1}(0)\sigma_3. \qquad /7/$$

Естественные для ФГ граничные условия $\lim\limits_{|x|\to\infty} S(x) = \sigma_3$ эквивалентны $b^{\pm}(0) = 0$, т.е. $T(0) = \mathrm{diag}(a^+(0), -a^-(0))$. В качестве минимального набора данных рассеяния для обеих задач /1/ и /2/ можем выбрать набор $R = \{\rho^{\pm} = b^{\pm}/a^{\pm}, \lambda \in \boldsymbol{R}\}$, удовлетворяющий ограничению $\rho^{\pm}(0) = 0$. Здесь и ниже для краткости предполагаем, что операторы L и $\tilde{L}$ не имеют дискретного спектра. Однако результаты настоящей работы нетрудно обобщить и на случай конечного числа собственных значений конечной кратности.

Рассмотрим системы матричных функций $\{\Psi^{\pm f}(x,\lambda)\}$, $\{\Phi^{\pm f}(x,\lambda)\}$, известных как "квадраты" решений /1/ [4]. Здесь через $\Psi^{\pm f}$, $\Phi^{\pm f}$ мы обозначили недиагональные части $\Psi^{\pm} = \psi\sigma_{\pm}\psi^{-1}$, $\Phi^{\pm} = \phi\sigma_{\mp}\phi^{-1}$ $\lambda \in \boldsymbol{R}$. Системы $\{\Psi^{\pm f}\}$, $\{\Phi^{\pm f}\}$ являются полными в пространстве $\mathcal{S}_{\sigma_3}$. Кроме того, справедливы разложения

$$q(x) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, (\rho^+(\lambda)\Psi^{+f} - \rho^-(\lambda)\Psi^{-f}), \qquad /8/$$

$$\sigma_3 \delta q(x) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, (\delta\rho^+\Psi^{+f} + \delta\rho^-\Psi^{-f}) \qquad /9/$$

вместе с аналогичными разложениями по системе $\{\Phi^{\pm f}\}$.

Перечислим важнейшие следствия из /8/ и /9/ для НЭУ, связанных с L /1/ /см. [4-9]/.

МОЗР имеет смысл обобщенного преобразования Фурье. Действительно, данные рассеяния R появляются в /8/ как коэффициенты разложения q(x) по обобщенным экспонентам $\Psi^{\pm f}$. Тогда операторы $\Lambda_{\pm}$, удовлетворяющие соотношениям:

$$(\Lambda_+ - \lambda)\Psi^{\pm f}(x,\lambda) = 0, \quad (\Lambda_- - \lambda)\Phi^{\pm f}(x,\lambda) = 0, \qquad /10/$$

являются аналогами оператора дифференцирования и играют важную роль в теории НЭУ.

Класс НЭУ содержит уравнения вида:

$$\frac{1}{2} F(\Lambda_+)[\sigma_3, q_t] + G(\Lambda_+)q = 0, \qquad /11/$$

где $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ - рациональные функции λ. В частности, НУШ /3/ получается при $F(\lambda) = \lambda^{-2}$, $G = 4i$.

Компактные выражения для сохраняющихся величин имеют вид

$$\ln a^+ = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \lambda^{-m}, \quad c_m = -\frac{1}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{+\infty}^{x} \langle [\sigma_3, q], \Lambda_+^m q \rangle dy. \qquad /12/$$

Здесь скобки $\langle\, ,\, \rangle$ обозначают форму Киллинга алгебры $sl(2, \mathbf{C})$ $\langle X, Y \rangle = 1/2\, \mathrm{tr} XY$; $X, Y \in sl(2, \mathbf{C})$.

Иерархия симплектических структур состоит из множества 2-форм вида:

$$\omega_F(\delta_1 q, \delta_2 q) = i \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle \delta_1 q, F(\Lambda)[\sigma_3, \delta_2 q] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, d\hat{p}(\lambda) \wedge d\hat{q}(\lambda)\, (\delta_1 q, \delta_2 q), \qquad /13/$$

где $\Lambda = 1/2(\Lambda_+ + \Lambda_-)$, а величины $\hat{p}(\lambda) = 1/\pi \ln(1 + \rho^+\rho^-)$, $\hat{q} = i/2 \ln b^+/b^-$ являются переменными действие-угол.

3. Для того, чтобы вычислить $\Lambda_{\pm}$, вводим разбиение $\Psi^{\pm} = \Psi^{\pm f} + \Psi^{\pm d}$, которое для $sl(2, \mathbf{C})$ можно записать в виде:

$$\Psi^{\pm} = \frac{1}{2}\sigma_3\{\sigma_3, \Psi^{\pm}\} + \frac{1}{2}\sigma_3[\sigma_3, \Psi^{\pm}]. \qquad /14/$$

Из /1/ легко получить, что $\Psi^{\pm}$, $\Phi^{\pm}$ удовлетворяют уравнению:

$$i\frac{d}{dx}\Psi^{\pm} - [q + \lambda\sigma_3, \Psi^{\pm}] = 0. \qquad /15/$$

Подставляя /14/ в /15/, получаем $\Lambda_{\pm}$ в виде:

$$\Lambda_{\pm} = \frac{i}{4}\left[\sigma_3, \frac{d}{dx} + [q(x), \int_{\pm\infty}^{x} [q(y), \,]dy]\right]. \qquad /16/$$

Очевидное, но важное замечание состоит в том, что $\frac{d}{dx}\sigma_3 = 0$ и, следовательно, $(\Phi^{f,d})_x = (\Phi_x)^{f,d}$.

Перейдем к системе /2/. Так как /см. /7/:

$$\tilde{\Phi}^{\pm} = \psi_0^{-1}\Phi^{\pm}\psi_0 \left(\frac{a^+(0)}{a^-(0)}\right)^{\pm 1}, \quad \tilde{\Psi}^{\pm} = \psi_0^{-1}\Psi^{\pm}\psi_0, \qquad /17/$$

полнота систем $\{\Psi^{\pm f}\}$, $\{\Phi^{\pm f}\}$ в пространстве $\mathcal{S}_{\sigma_3}$ приводит к полноте $\{\tilde{\Psi}^{\pm f}\}$ $\{\tilde{\Phi}^{\pm f}\}$ в пространстве $\mathcal{S}_S$ функций типа функций Шварца, ортогональные S, $\langle \tilde{q}, S\rangle = 0$.

Для вычисления $\tilde{\Lambda}_\pm$ применим ту же идею, но теперь разложение /14/ имеет вид:

$$\tilde{\Psi}^{\pm} = \tilde{\Psi}^{\pm d} + \tilde{\Psi}^{\pm f} = \frac{1}{2} S\{S, \tilde{\Psi}^{\pm}\} + \frac{1}{2} S\,[S, \tilde{\Psi}^{\pm}] \qquad /18/$$

и, очевидно, $(\tilde{\Psi}^{\pm d,f})_x \neq (\tilde{\Psi}^{\pm}_x)^{d,f}$. Поэтому удобно ввести ковариантную производную $\nabla_x = d/dx \cdot + [\psi_0^{-1}\psi_{0x}, \cdot]$ и подвижный базис в алгебре $sl(2, \mathbf{C})$, $\tilde{\sigma}_\pm = \psi_0^{-1}\sigma_\pm \psi_0$, $\tilde{\sigma}_3 = S = \psi_0^{-1}\sigma_3\psi_0$. Так как $\tilde{\Psi}^{\pm}$, $\tilde{\Phi}^{\pm}$ удовлетворяют уравнению

$$i\frac{d}{dx}\tilde{\Psi}^{\pm} - \lambda[S, \tilde{\Psi}^{\pm}] = 0, \qquad /19/$$

то, используя разбиение /18/, получаем:

$$i\nabla_x \tilde{\Psi}^{\pm d} = [\tilde{q}, \tilde{\Psi}^{\pm f}], \quad \tilde{q} = \psi_0^{-1} q \psi_0,$$
$$i\nabla_x \tilde{\Psi}^{\pm f} = [\tilde{q}, \tilde{\Psi}^{\pm d}] + \lambda[S, \tilde{\Psi}^{\pm f}]. \qquad /20/$$

Но из определения ∇_x и $\tilde{\sigma}_a$, если $Q = \sum_a Q_a \tilde{\sigma}_a$, то $\nabla_x^{-1} Q = \sum_a \tilde{\sigma}_a \int^x Q_a\, dy$, где a принимает значения +,- или 3. Принимая во внимание соотношение

$$i\psi_0^{-1}\psi_{0x} = \frac{i}{4}[S, S_x] = \tilde{q}, \qquad /21/$$

получаем, что операторы $\tilde{\Lambda}_\pm$ имеют вид:

$$\tilde{\Lambda}_\pm = -\frac{1}{4i}[S, \frac{d}{dx}\cdot] - \frac{1}{4i}[S, S_x]\int_{\pm\infty}^{x} \langle S_y, \cdot\rangle\, dy. \qquad /22/$$

4. Для получения калибровочно-ковариантной формулировки результатов /8-9/, /11-13/ нам нужны также выражения для $\psi_0^{-1}\delta q\psi_0$ только через δS. Оно даётся следующей леммой.

Лемма.

$$\psi_0^{-1}\delta q\,\psi_0 = \frac{1}{4}[S, \tilde{\Lambda}_+[S, \delta S]],$$
$$\psi_0^{-1}\delta q\,\psi_0 = \frac{1}{4}[S, \tilde{\Lambda}_-[S, \delta S]] + i\langle\sigma_3, T^{-1}(0)\,\delta T(0)\rangle S_x.$$

Доказательство является непосредственным следствием /22/.

Теорема. Справедливы разложения:

$$\frac{1}{4}[S, S_x] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\,(\tilde{\rho}^+\tilde{\Psi}^{+f} - \tilde{\rho}^-\tilde{\Psi}^{-f}),$$
$$\tilde{\Lambda}_+[S, \delta S] = -\frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\,(\delta\tilde{\rho}^+\tilde{\Psi}^{+f} + \delta\tilde{\rho}^-\tilde{\Psi}^{-f}).$$

Доказательство следует из разложений /8/, /9/ и из леммы.

Теперь результаты /11-13/ автоматически переносятся из канонической /1/ в полюсную калибровку /2/.

Из теоремы следует, что набор данных рассеяния $\tilde{R}$ однозначно определяет $M = 1/4[S, S_x]$, которое, в свою очередь, однозначно определяет $S(x)$ как решение линейной задачи $S_x = [S, M]$, удовлетворяющее условию $\lim_{|x|\to\infty} S(x) = \sigma_3$. Это делает очевидной интерпретацию МОЗР как обобщенное преобразование Фурье.

Класс НЭУ, связанных с $\tilde{L}$ /2/, содержит уравнения вида:

$$2F(\tilde{\Lambda}_+)\tilde{\Lambda}_+[S, S_t] + iG(\tilde{\Lambda}_+)[S, S_x] = 0. \qquad /23/$$

В частности, при $F(\lambda) = \lambda^{-2}$, $G=4i$ получаем уравнение ФГ /4/.

Компактные выражения для законов сохранения НЭУ /23/ имеют вид:

$$c_m = -\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_x^{\infty} \langle S_y, \tilde{\Lambda}_+^m [S, S_y]\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \rho_m(x). \qquad /24/$$

Первые три из плотностей ρ_m, с точностью до полных производных, равны:

$$\rho_1 \cong \langle S_x, S_x\rangle, \qquad \rho_2 \cong \langle S, [S_x, S_{xx}]\rangle,$$
$$\rho_3 \cong 5\langle S_x, S_x\rangle^2 - 4\langle S_{xx}, S_{xx}\rangle. \qquad /25/$$

На первый взгляд, ρ_3 отличается от соответствующего выражения в /1/. Однако, если $\langle S_x, S_x\rangle \neq 0$, то S, S_x, $[S, S_x]$ линейно независимы. Разлагая S_{xx} по этому базису, получаем хорошо известное выражение для ρ_3. Можно проверить, что плотности ρ_m, $m > 3$ тоже полиномиальны по S и его производных по x.

Иерархия симплектических форм /13/ принимает вид:

$$\tilde{\omega}_F(\delta_1 S, \delta_2 S) = \omega_F\left(\frac{\delta q}{\delta S}(\delta_1 S), \frac{\delta q}{\delta S}(\delta_2 S)\right). \qquad /26/$$

Используя лемму, для левой части /26/ можно получить:

$$\tilde{\omega}_F(\delta_1 S, \delta_2 S) = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,\{\langle\delta_2 S, \tilde{\Lambda}_+^2 F(\tilde{\Lambda}_+)[S, \delta_1 S]\rangle - (\delta_1 \leftrightarrow \delta_2)\} + 2a\wedge\beta(\delta_1 S, \delta_2 S), \qquad /27/$$

где $\tilde{\Lambda} = 1/2(\tilde{\Lambda}_+ + \tilde{\Lambda}_-)$, а 1-формы a и β задаются:

$$a(\delta S) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx < \delta S, \tilde{\Lambda}_- F(\tilde{\Lambda}_-) \frac{i}{4} [S, S_x] >, \quad \beta(\delta S) = i < \sigma_3, T^{-1}(0) \delta T(0) >. \qquad /28/$$

Если $F(\lambda) = \lambda^{-2}$ - первый член в правой части /27/ пропорционален канонической для ФГ симплектической форме:

$$\tilde{\omega}_{F=\lambda^{-2}}(\delta_1 S, \delta_2 S) = 2\left(\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} < \delta_2 S, [S, \delta_1 S] > dx + a \wedge \beta(\delta_1 S, \delta_2 S)\right). \qquad /29/$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\tilde{\omega}_{F=\lambda^{-2}} = 2\omega^{\Phi\Gamma} + \frac{1}{2} dH_{-1} \wedge dH_{-2}, \qquad /30/$$

$$H_{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \frac{\hat{p}(\lambda)}{\lambda}, \quad H_{-2} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \frac{\hat{p}(\lambda)}{\lambda^2}. \qquad /31/$$

В [8] этот результат получен путем сравнения $\tilde{\omega}_{F=\lambda^{-2}}$ и $\omega^{\Phi\Gamma}$ в терминах данных рассеяния.

ВЫВОДЫ

В настоящей работе мы рассмотрели простейший нетривиальный пример калибровочно-эквивалентных НЭУ. Этим методом можно рассмотреть также и другие важные примеры [2,10,11]. Мы остановимся на этом в последующих работах.

Авторы признательны В.Г.Маханькову за интерес и поддержку в работе, П.П.Кулишу - за плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А. ТМФ, 1979, 38, с.26.
2. Михайлов А.В., Захаров В.Е. ЖЭТФ, 1978, 74, с.1953.
3. Захаров В.Е. и др. Теория солитонов: метод обратной задачи. "Наука", М., 1980.
4. Ablowitz M. et al. Stud. in Appl.Math., 1974, 53, p.249.
5. Kaup D., Newell A. Adv.Math., 1979, 31, p.67.
6. Герджиков В.С., Христов Е.Х. Мат.заметки, 1980, 28, с.501; Болг.физ.ж., 1980, 7, с.26,119.
7. Flaschka H., Newell A. In: Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1975, vol.38, p.355.
8. Кулиш П.П., Рейман А.Г. Записки научн.семин.ЛОМИ, 1978, 77, с.134.
9. Calogero F., Degasperis A. Nuovo Cim., 1976, 32B, p.201.
10. Fordy A., Kulish P.P. Comm.Math.Phys., 1983, 89, p.427.
11. Makhan'kov V.G., Pashaev O.K. Phys.Lett., 1983, 95A, p.95.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 декабря 1983 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Герджиков В.С., Яновски А.Б. Р2-83-821

Калибровочно-ковариантная формулировка порождающего оператора. Система Захарова-Шабата

Предложена калибровочно-ковариантная формулировка порождающего оператора Λ, связанного с системой Захарова-Шабата L. Явно вычислен оператор $\tilde{\Lambda}$, соответствующий $\tilde{L} = g^{-1} Lg$ в полюсной калибровке. Таким образом, единый подход к высшим нелинейным уравнениям Шредингера, основанный на Λ, автоматически переносится на основе $\tilde{\Lambda}$ на высшие уравнения типа ферромагнетика Гайзенберга.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Gerdjikov V.S., Yanovski A.B. P2-83-821

Gauge-Covariant Formulation of the Generating Operator. Zakharov-Shabat System

Gauge covariant formulation of the generating operator, Λ, related to the Zakharov-Shabat system L is proposed. The operator $\tilde{\Lambda}$, corresponding to $\tilde{L} = g^{-1} Lg$ in the pole gauge is explicitly calculated. Thus the unified approach to the higher nonlinear Schrödinger equations, based on Λ is automatically reformulated with $\tilde{\Lambda}$ for the higher Heisenberg ferromagnet equations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983