сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

1889/83

18/4-83

P2-83-79

Г.Очирбат

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДЛЯ ОДНОГО СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

1983

При решении уравнений нелинейных колебаний асимптотическим методом Крылова-Боголюбова (КБ) появляется некоторый произвол, сводящийся к тому, что в каждом высшем приближении первые две гармоники возникают с новыми неизвестными коэффициентами или коэффициентными функциями. В монографии /I/ обе гармоники приравниваются к нулю с целью получения однозначного результата в тех случаях, где обратные не потребовались. В § 6 гл. I указанной работы при построении стационарного решения неконсервативной системы авторы использовали в высших приближениях ненулевые коэффициенты при $\cos\psi$, а коэффициенты при $\sin\psi$ положили равными нулю. В курсе механики Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица /2/, где рассматривался пример консервативной системы, эти же величины также предполагались равными нулю. Однако выбор этих величин должен быть продиктован условиями поставленной задачи. Казалось бы, для устранения произвола достаточно привлечь к рассмотрению два независимых условия, как это делается при решении дифференциального уравнения второго порядка, каковым является уравнение движения. По первоначальному замыслу автора таким условием может служить, например, требование, чтобы решение соответствовало колебанию с предопределенной точкой поворота. Такое ограничение, однако, оказалось достаточным только для однозначного построения стационарных режимов по методу КБ. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим несколько случаев и режимов при данном ограничении.

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

I. Консервативный случай

$$m\ddot{q} + kq = \varepsilon f(q) . \tag{I}$$

одномерное финитное движение представляет собой всегда колебание. Его период T определяется формулой

$$T = \int_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U'(q))}} , \tag{2}$$

где q_{min}, q_{max} - корни трансцендентного уравнения:

$$U' = \frac{kq^2}{2} + \varepsilon U(q) = E, \quad U(q) = -\int f(q)\,dq . \tag{3}$$

Такие важные характеристики колебания, как круговая частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$, максимальное (или минимальное) удаление от положения равновесия, можно получить, решив уравнения (2) и (3). Так как эти уравнения содержат малый параметр, мы получаем для ω, q_{max} (или q_{min}) разложение по ε при фиксированном значении энергии E.

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \dots , \tag{4}$$

$$q_{max} = a + \varepsilon a_1 + \dots , \tag{5}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} , \quad a_1 = -\frac{U(a)}{m\omega_0^2 a} , \tag{6}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} , \quad \omega_1 = \frac{1}{\omega_0 m a \pi} \int_{-1}^{1} \frac{U'(at)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} . \tag{7}$$

Величины q_{max} и a есть максимальное удаление при одном и том же значении E, но при не равном и равном нулю значении параметра ε. Поэтому, если мы представим найденное тем или иным способом решение при данном E в виде ряда Фурье, то в него войдут функции

$$\cos n\omega t, \quad \sin n\omega t, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

с основной частотой ω, определенной по (4), которая должна согласовываться с условием (5).

Теперь приступим к решению уравнения (I) по схеме КБ с учетом (5). Мы остановимся на отличиях этого решения от стандартного /I/. В соответствии с /I/ положим, что

$$q = q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots ,$$
$$q_0 = a\cos\psi , \quad \psi = \omega t . \tag{8}$$

Подставим (8) в (I) и приравняем величины при одинаковых степенях ε в правой и левой частях уравнения. Тогда

$$\frac{d^2 q_1}{d\psi^2} + q_1 - \frac{2\omega_1}{\omega_0} q_0 = \frac{1}{m\omega_0^2} f(q_0) . \tag{9}$$

Разложим функцию $f(q_0)$ в ряд Фурье,

$$f(q_0) = \sum f_n^{(1)}(a) \cos n\psi . \tag{I0}$$

Решение ищется в виде

$$q_1 = \sum \tau_n^{(1)} \cos n\psi . \tag{II}$$

Получаем:

$$\tau_n^{(1)} = \frac{f_n^{(1)}(a)}{m\omega_0^2 (1-n^2)} , \quad n \neq 1 , \tag{I2}$$

$$-2\omega_0\omega_1 a = \frac{1}{m} f_1^{(1)}(a) . \tag{I3}$$

Уравнение (I3) переопределяет значение ω_1. Оно здесь получено без учета условия (6). Однако ω_1 из (2) вычислено при фиксированном E, т.е. с учетом (5). Тем не менее оба значения совпадают (см. приложение). Это очень важно, так как, начиная со второго приближения, условие (5) уже начинает учитываться при вычислении $\omega_2, \omega_3, \dots$. Таким образом, при учете (5) нет видимых причин расхождения значений ω в обоих методах вычисления.

В (II) значение $\tau_1^{(1)}$ пока еще остается неопределенным. Его здесь не следует приравнивать нулю, так как амплитуду a в (8) мы интерпретируем не как полную, а как амплитуду гармонического колебания при данном E и $\varepsilon=0$. Если величина a наделена этим свойством, то при учете нелинейности естественно появятся поправки к ней, которые не находятся в противоречии с (5). Мы имеем возможность определить $\tau_1^{(1)}$ и вообще $\tau_2^{(2)}, \dots$, требуя, чтобы решение (8) при $\psi=0$ стало равным q_{max} согласно (5).

В первом приближении

$$q_1(\psi=0) = a_1 . \qquad (14)$$

Подставляя сюда (II), окончательно находим $\tau_1^{(1)}$:

$$\tau_1^{(1)} = a_1 - \tau_0^{(1)} - \sum_{n=2}^{\infty} \tau_n^{(1)} . \qquad (15)$$

Аналогичным образом вычисляются $\tau_2^{(2)}, \dots$. При подборе q^0 в виде $a\cos\psi$ коэффициенты при $\sin\psi$, появившиеся в высших приближениях, равняются нулю в силу условия $\dot q(\psi=0)=0$. Таким образом, в случае консервативной системы произвол асимптотического метода полностью устраняется и решение, описывающее колебание с точкой поворота (5), находится однозначно.

2. Случай силы, зависящей от скорости,

$$\ddot q + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon}{m} f(q, \dot q) . \qquad (16)$$

Хотя энергия в этом случае не является интегралом движения, имея в виду разложение

$$f(q,\dot q) = f_0(q) + \sum_n f_n(q)\,\dot q^{\,n},$$

определим функцию $V(q)$ по формуле

$$V(q) = -\int f(q,0)\,dq . \qquad (17)$$

Тогда корни уравнения

$$E = \frac{m\omega_0^2 q^2}{2} + \varepsilon V(q)$$

совместно с $\dot q = 0$ являются точками поворота, в которых значение энергии задано и равно E , так как

$$\frac{\varepsilon}{m} f(q_{max}, 0) - \omega_0^2 q_{max} < 0 ,$$

$$\frac{\varepsilon}{m} f(q_{min}, 0) - \omega_0^2 q_{min} > 0 .$$

Здесь q_{max} выражается формулами (5) и (6), где вместо $U(q)$ фигурирует $V(q)$.

При нестационарном режиме точка поворота соответствует состоянию процесса в определенный момент времени. Переобозначим (5).

$$q^0_{max} = a^0 + \varepsilon a_1^0 + \dots \qquad (18)$$

a^0 – амплитуда гармонического колебания или q^0_{max} при данном E и $\varepsilon=0$.

В схеме КБ полагают, что

$$\frac{d\psi}{da} = \omega_0 + B_1(a)\,\varepsilon + \dots , \qquad (19)$$

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \dots , \qquad (20)$$

и после того, как функции $A_i(a)$, $B_i(a)$ определены, амплитуда a находится квадратурой. Для квадратуры мы можем пользоваться начальным условием

$$a^0 = \sqrt{E/m\omega_0^2} .$$

Уравнение любого j-го приближения имеет вид

$$\frac{d^2 q_j}{d\psi^2} + q_j = F_j(a,\psi) + \frac{2A_j}{\omega_0 m}\sin\psi + \frac{2aB_j}{\omega_0 m}\cos\psi . \qquad (21)$$

При условии, что все предыдущие $1, 2, \ldots, (j-1)$-е приближения найдены, функция $F_j(a,\psi)$ становится определенной. Разлагая ее в ряд Фурье, находим q_j в виде

$$q_j = \sum_n \tau_n^{(j)}(a)\cos n\psi + S_n^{(j)}(a)\sin n\psi , \qquad (22)$$

причем $\tau_1^{(j)}(a)$, $S_1^{(j)}(a)$ уравнением (21) не определяются. Функции $A_j(a)$, $B_j(a)$ находятся из требования периодичности. Для выбора $\tau_1^j(a)$, $S_1^j(a)$ мы требуем, чтобы решение при $\psi = 0$ превратилось в точку поворота:

$$q(\psi = 0) = q^0_{max} , \quad (\dot q)(\psi = 0) = 0 . \qquad (23)$$

В j-ом приближении имеем:

$$q_j(\psi = 0) = a_j^0 , \quad (\dot q)_j(\psi = 0) = 0 .$$

Скобка с индексом j указывает на то, что из выражения $\dot q$ следует брать коэффициентную функцию при ε^j. Пишем их в развернутом виде:

$$q_j(\psi = 0) = \sum_{n=2}^{\infty} \tau_n^j(a_0) + \tau_1^j(a_0) + \tau_0^j(a_0) . \qquad (24)$$

$$A_j(a_0) + \left(\frac{\partial q_1}{\partial \psi} B_{j-1} + \cdots + \frac{\partial q_{j-1}}{\partial \psi} B_1 + \frac{\partial q_1}{\partial a} A_{j-1} + \cdots + \frac{\partial q_{j-1}}{\partial a} A_1\right)\Bigg|_{\psi = 0} + \qquad (25)$$

$$+ \omega_0 \sum_{m=2}^{\infty} m S_m^j(a_0) + \omega_0 S_1^j(a_0) = 0 .$$

Если в обоих уравнениях все величины, кроме $\tau_1^j(a_0)$, $S_1^j(a_0)$, уже определены, отсюда мы можем найти только $\tau_1^j(a_0)$, $S_1^j(a_0)$. Значения этих функций при других значениях a остаются произвольными. Условие (23) не снимает произвола в этом случае. Однако задача решается однозначно, если на эти функции имеется ограничение: они должны быть постоянными. Такое ограничение принимается, если ищется стационарное решение. Однако при построении стационарного решения уравнения (16) приходится видоизменять условие (23). Поэтому рассмотрим его дополнительно.

3. Стационарное решение

В этом случае τ_1^j, S_1^j, $j = 2, 3, \ldots$ являются постоянными. Из каждого приближения должны определяться три величины: две из них – τ_1^i, S_1^i, $i = 2, 3, \ldots$ и третья – значение ω_j. Однако в каждом приближении кроме двух условий (23) мы используем еще два уравнения, которые получаются из требования периодичности решения. Поэтому задачу в данном случае невозможно решать при фиксированном a^0 в (18). Другими словами, не существует стационарного решения при любом ε и фиксированном a^0.

Полагаем, что оно может существовать при данном ε только для определенных значений a^0, т.е.

$$a^0 = C_0 + \varepsilon C_1 + \cdots \qquad (26)$$

Здесь $C_0, C_1, C_2, \ldots$ – неизвестные пока постоянные. Подставляя (26) в (5), получаем

$$q_{max} = C_0 + \left(C_1 - \frac{1}{m\omega_0^2} \cdot \frac{V(C_0)}{C_0}\right)\varepsilon + \left[C_2 - \frac{1}{m\omega_0^2}\left(\frac{V'(C_0)}{C_0} - \frac{V(C_0)}{C_0^2}\right)C_1 +\right.$$

$$+\frac{1}{2m\omega_0^2} V(c_0)\left(V'(c_0)-\frac{V(c_0)}{2c_0}\right)\Big]\varepsilon^2+\cdots \tag{27}$$

Решение ищем в виде (8) при $q_0 = C_0\cos\psi$. Уравнение первого приближения

$$\frac{d^2 q_1}{d\psi^2} + q_1 = F_1 + \frac{2\omega_1 C_0}{\omega_0 m}\cos\psi, \tag{28}$$

где F_1 - определенная периодическая функция. Условие периодичности:

$$F_{12}(c_0) = 0; \quad F_{11}(c_0) + \frac{2\omega_1 C_0}{\omega_0 \cdot m} = 0. \tag{29}$$

Эти уравнения, такие же, как и в случае, где амплитуда при первой гармонике фиксируется и интерпретируется как полная.

Мы используем (27):

$$q_1(\psi=0) = \tau_1^1 + \tau_0^1 + \sum_{n=2}^{\infty}\tau_n^1 = C_1 - \frac{1}{m\omega_0^2}\cdot\frac{F(C_0)}{C_0}, \tag{30}$$

$$(\dot q)_1(\psi=0) = \omega_0\left(S_1^1 + \sum_{n=2}^{\infty} n S_n^1\right) = 0. \tag{31}$$

Величины τ_n^1, S_n^1 при $n = 0, 2, 3, \ldots$ определяются уравнением (28), S_1^1 находим из (31). Уравнение (30) содержит τ_1^1, C_1, которые подлежат определению. Величина τ_1^1 находится из следующего приближения:

$$\frac{d^2 q_2}{d\psi^2} + q_2 = \tau_1^1 \tilde F_2 + \frac{2\omega_2 C_0}{m\omega_0}\cos\psi + g_2 \,. \tag{32}$$

$\tilde F_2$, g_2 - определенные периодические по переменным ψ функции. Если разложить эти функции в ряд Фурье, то мы получим:

$$\tau_1^1 \tilde F_{21}(c_0) + \frac{2\omega_2 C_0}{\omega_0} + g_{21}(c_0) = 0, \tag{33}$$

$$\tau_1^1 \tilde F_{22}(c_0) + g_{22}(c_0) = 0. \tag{34}$$

Находя τ_1^1 из (34), мы дальше вычисляем ω_2 из (33) и C_1 (30). Таким образом, можно продолжить процесс решения уравнения, поскольку при любом n-ом приближении в правую часть уравнения τ_1^{n-1}, ω_n входят линейно, как и в (32).

Переопределение q_{max} в виде (27) позволяет однозначно решать задачу построения стационарного режима с дополнительным условием. Смысл этой процедуры состоит в увязке решения с точкой поворота, параметр которой a не является свободным и зависит от ε.

Автор выражает благодарность проф. В.Г.Соловьеву и Л.А.Малову за совет и замечание.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Формулу (2) преобразуем к виду

$$T = \frac{2}{\sqrt{2/m}}\,\frac{\partial}{\partial E}\int_{q_{min}}^{q_{max}} 2\left(E - \frac{kq^2}{2} - \varepsilon U\right)^{1/2} dq = \frac{2}{\sqrt{2/m}}\,\frac{dD}{dE}.$$

Рассмотрим интеграл D отдельно. С помощью подстановки

$$q = \frac{q_{max} - q_{min}}{2}\,t + \frac{q_{max} + q_{min}}{2}$$

его перепишем в виде

$$D = (q_{max} - q_{min}) \int_{-1}^{1} \Big\{ E - \frac{k}{2} \Big(\frac{q_{max} - q_{min}}{2} t + \frac{q_{max} + q_{min}}{2} \Big)^2 - \varepsilon U \Big(\frac{q_{max} - q_{min}}{2} t + \frac{q_{max} + q_{min}}{2} \Big) \Big\}^{1/2} dt \,.$$

Разлагаем этот интеграл по ε с точностью до второго порядка:

$$D = \sqrt{\frac{2}{k}}\, \pi E - \Big(E^{1/2} \cdot \pi \frac{U(a) + U(-a)}{m \omega_0^2 a} + \frac{a}{\sqrt{E}} \int_{-1}^{1} \frac{U(at)}{\sqrt{1 - t^2}} dt \Big) \varepsilon \,.$$

Отсюда:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} - \frac{2}{\sqrt{2/m}} \cdot \frac{a}{\sqrt{E}} \, \frac{da}{dE} \int_{-1}^{1} \frac{U'(at)\, t}{\sqrt{1 - t^2}} dt \cdot \varepsilon \,,$$

или же:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_0 + \omega_1 \varepsilon + \cdots \,,$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\omega_0 m a \pi} \int_{-1}^{1} \frac{U'(at)\, t}{\sqrt{1 - t^2}} dt \,. \qquad (35)$$

С другой стороны, согласно (I3)

$$\omega_1 = - \frac{1}{2 \omega_0 a m} f_1^{(1)}(a) \,, \qquad (36)$$

где

$$f_1^1(a) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(a \cos\psi) \cos\psi \, d\psi \,.$$

Если учесть определение (3) и провести замену переменной

$$t = \cos\psi \,,$$

то интеграл приобретает вид

$$f_1^1(a) = - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{U'(at)\, t}{\sqrt{1 - t^2}} dt \,.$$

Теперь видно, что (35) и (36) одинаковы.

Литература

I. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., I963.

2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика,"Наука", М., I973.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 февраля I983 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Очирбат Г. Р2-83-79
Асимптотическое решение уравнений нелинейных колебаний для одного специального вида дополнительных условий

Поставлена задача получить по методу Крылова-Боголюбова асимптотическое решение, имеющее предопределенную точку поворота. Она решается однозначно в случаях консервативных сил, а также при построении стационарных колебательных режимов неконсервативной системы. В последнем случае предложена и применена скользящая увязка, позволяющая динамично согласовать решение с дополнительным условием, параметр которого перестает быть свободным.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Ochirbat G. P2-83-79
Asymptotic Solution of Nonlinear Oscillating Equations for a Special Type of Additional Conditions

The problem of asymptotic solution with a predetermined turning point is formulated within the KB method. It is uniquely solved for the conservative forces and while constructing stationary oscillation regimes for a nonconservative system. In the last case a sliding linking is assumed and used, which allows one to dynamically coordinate the solution with a supplementary condition the parameter of which stops to be free.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой.