объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-83-781

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

ТЕОРИЯ БОРНА-ИНФЕЛЬДА КАК ЧАСТЬ ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ ЭЙНШТЕЙНА

Направлено в журнал
"Известия вузов. Математика"

1983

Главным объектом в теории Борна-Инфельда [1], как и в единой теории поля Эйнштейна [2], является пара тензорных полей, $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\beta\alpha}$, задаваемых в пространственно-временном мире M. Обозначаем

$$\frac{1}{2}(g_{\alpha\beta}+g_{\beta\alpha})=h_{\alpha\beta}, \quad \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta}-g_{\beta\alpha})=\phi_{\alpha\beta}. \qquad /1/$$

Симметричное поле $h_{\alpha\beta}$ несет информацию о гравитации, антисимметричное поле $\phi_{\alpha\beta}$ – об электромагнетизме. В данной статье теория Борна-Инфельда представляется как часть теории Эйнштейна.

Мир M мы понимаем как n-мерное многообразие класса C^{ν} [3] с достаточно высокой степенью гладкости. В реальном случае число n равно четырем, однако интересны и другие его значения. С употребляемыми здесь геометрическими объектами можно познакомиться по книгам [4,5]. Все объекты относим к координатному базису $d^{\alpha}=dx^{\alpha}$ и дуальному базису ∂_{α}. Координаты $x^1,\dots,x^n$ составляют карту многообразия M. Символ ∂_{α} означает частную производную по координате x^{α}.

Предполагается, что метрическая форма

$$ds^2=h_{\alpha\beta}\,d^{\alpha}\otimes d^{\beta} \qquad /2/$$

имеет нормальный гиперболический вид. В силу этого пространство скоростей частицы, приложенное к любой из мировых точек $x\in M$, является $(n-1)$-мерным пространством Лобачевского, если масса покоя частицы больше нуля, и $(n-2)$-мерным конформным пространством, если масса покоя частицы равна нулю [6].

Из сказанного следует, что определитель матрицы $(h_{\alpha\beta})$ отрицателен. Поскольку он не обращается в нуль, вводим тензор $h^{\alpha\beta}$ так, что $h_{\alpha\sigma}h^{\sigma\beta}=\delta^{\beta}_{\alpha}$, где $(\delta^{\beta}_{\alpha})$ – единичная матрица. С помощью $h^{\alpha\beta}$ и $h_{\alpha\beta}$ будем понимать и опускать индексы, например,

$$\phi_{\alpha\sigma}h^{\sigma\beta}=\phi^{\beta}_{\alpha}=h_{\alpha\sigma}\phi^{\sigma\beta}, \quad T_{\alpha\beta\gamma}=T^{\sigma}_{\alpha\beta}h_{\sigma\gamma}. \qquad /3/$$

Так как

$$g_{\alpha\beta}=h_{\alpha\sigma}(\delta^{\sigma}_{\beta}-\phi^{\sigma}_{\beta}), \quad g_{\beta\alpha}=h_{\alpha\sigma}(\delta^{\sigma}_{\beta}+\phi^{\sigma}_{\beta}), \qquad /4/$$

то определитель $g=\det(g_{\alpha\beta})=\det(g_{\beta\alpha})$ равен $g=hJ$, где J – определитель, равный

$$J=\det(\delta^{\sigma}_{\beta}-\phi^{\sigma}_{\beta})=\det(\delta^{\sigma}_{\beta}+\phi^{\sigma}_{\beta}). \qquad /5/$$

Последний является скаляром. Если нет электромагнитного поля, то $\phi_{\alpha\beta}=0$ и $J = 1$. Мы будем рассматривать не очень сильное электромагнитное поле, так чтобы выполнялось неравенство $J>0$. При этом условии $g<0$ и существует такая пара тензорных полей $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ и $\tilde{g}^{\beta\alpha}$, что

$$g_{\sigma\alpha}\tilde{g}^{\sigma\beta}=\delta^{\beta}_{\alpha}=g_{\alpha\sigma}\tilde{g}^{\beta\sigma}. \qquad /6/$$

Как в /1/, обозначаем

$$\tilde{h}^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\tilde{g}^{\alpha\beta}+\tilde{g}^{\beta\alpha}),\quad \tilde{\phi}^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\tilde{g}^{\alpha\beta}-\tilde{g}^{\beta\alpha}). \qquad /7/$$

Имеем $h=\tilde{h}g^2$, где $\tilde{h}$ - определитель матрицы $(\tilde{h}^{\alpha\beta})$. Это следует из того, что

$$h_{\alpha\sigma}\tilde{g}^{\sigma\beta}=g_{\alpha\sigma}\tilde{h}^{\sigma\beta}. \qquad /8/$$

Ковариантное дифференцирование со связностью

$$\left\{{\mu \atop \alpha\beta}\right\}=\frac{1}{2}h^{\mu\sigma}(\partial_\beta h_{\sigma\alpha}+\partial_\alpha h_{\sigma\beta}-\partial_\sigma h_{\alpha\beta}) \qquad /9/$$

обозначаем $\mathfrak{D}_\alpha$. Применяя к /6/ операцию $\mathfrak{D}_\beta\sqrt{J}$, можно получить два тождества:

$$h_{\sigma\alpha}\mathfrak{D}_\beta(\sqrt{J}\,\tilde{\phi}^{\sigma\beta})+\phi_{\sigma\alpha}\mathfrak{D}_\beta(\sqrt{J}\,\tilde{h}^{\sigma\beta})=\sqrt{J}\,\tilde{h}^{\sigma\beta}\phi_{\alpha\sigma\beta}, \qquad /10/$$

$$h_{\sigma\alpha}\mathfrak{D}_\beta(\sqrt{J}\,\tilde{h}^{\sigma\beta})+\phi_{\sigma\alpha}\mathfrak{D}_\beta(\sqrt{J}\,\tilde{\phi}^{\sigma\beta})=\frac{3}{2}\sqrt{J}\,\tilde{\phi}^{\sigma\beta}\phi_{(\alpha\sigma\beta)}, \qquad /11/$$

где $\phi_{\alpha\beta\gamma}=\mathfrak{D}_\gamma\phi_{\alpha\beta}$. Скобки вокруг трех индексов любого тензора $T_{\alpha\beta\gamma}$ означают

$$T_{(\alpha\beta\gamma)}=\frac{1}{3}(T_{\alpha\beta\gamma}+T_{\gamma\alpha\beta}+T_{\beta\gamma\alpha}). \qquad /12/$$

В частности,

$$\phi_{(\alpha\beta\gamma)}=\frac{1}{3}(\partial_\alpha\phi_{\beta\gamma}+\partial_\beta\phi_{\gamma\alpha}+\partial_\gamma\phi_{\alpha\beta}). \qquad /13/$$

Наряду со связностью Кристоффеля /9/ пара полей $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\beta\alpha}$ задает пару связностей $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ и $\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$. Связность $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ определяется через поле $g_{\alpha\beta}$ как решение уравнения

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta}-g_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma}-g_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta}=0, \qquad /14/$$

предложенного Эйнштейном[/1/] в поисках единой теории гравитации и электромагнетизма. Таким же образом определяется связность $\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$ через поле $g_{\beta\alpha}$.

Обозначаем

$$\mathring{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}+\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}),\quad P^{\mu}_{\alpha\beta}=\mathring{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}-\left\{{\mu \atop \alpha\beta}\right\},\quad S^{\mu}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}) \qquad /15/$$

среднюю связность, прибавочный тензор и тензор кручения. Уравнение /14/ эквивалентно паре уравнений

$$S_{\alpha\beta\gamma}=\phi^{\sigma}_{\beta}P_{\gamma\alpha\sigma}-\phi^{\sigma}_{\alpha}P_{\beta\gamma\sigma}+\phi_{\alpha\beta\gamma}-\frac{3}{2}\phi_{(\alpha\beta\gamma)}, \qquad /16/$$

$$P_{\alpha\beta\gamma}=\phi^{\sigma}_{\beta}S_{\gamma\alpha\sigma}-\phi^{\sigma}_{\alpha}S_{\beta\gamma\sigma}. \qquad /17/$$

Из уравнения /14/ следует, что

$$\mathring{\Gamma}_\alpha=\mathring{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\mu}=\partial_\alpha\ln\sqrt{-g},\quad P_\alpha=P^{\mu}_{\alpha\mu}=\partial_\alpha\ln\sqrt{J},\quad P_{(\alpha\beta\gamma)}=0, \qquad /18/$$

$$2S_{(\alpha\beta\gamma)}+\phi_{(\alpha\beta\gamma)}=0, \qquad /19/$$

$$\tilde{h}^{\mu\alpha}S_\alpha=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\gamma(\tilde{\phi}^{\mu\gamma}\sqrt{-g}), \qquad /20/$$

$$S_\alpha=g_{\alpha\mu}h^{\mu\nu}g_{\beta\nu}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\gamma(\tilde{\phi}^{\beta\gamma}\sqrt{-g}), \qquad /21/$$

где $S_\alpha=S^{\mu}_{\alpha\mu}$ - ковектор кручения.

В теории электромагнитного поля Максвелла, если нет электрических токов, считается, что

$$\phi_{(\alpha\beta\gamma)}=0,\quad \partial_\mu(\phi^{\alpha\mu}\sqrt{-h})=0. \qquad /22/$$

Второе из этих уравнений в теории Борна-Инфельда заменяется уравнением

$$\partial_\mu(\tilde{\phi}^{\alpha\mu}\sqrt{-g})=0. \qquad /23/$$

Согласно /20/ и /21/ уравнение /23/ эквивалентно уравнению

$$S_\alpha=0, \qquad /24/$$

принимаемому в единой теории поля Эйнштейна. Первое из уравнений Максвелла /22/ Борн и Инфельд не меняют. Согласно /19/ оно эквивалентно уравнению

$$S_{(\alpha\beta\gamma)}=0, \qquad /25/$$

которое надо ввести в теорию Эйнштейна, чтобы теория Борна-Инфельда включилась в нее как часть.

Теперь заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\tilde\phi^{\alpha\mu}\sqrt{-g}) = \frac{1}{\sqrt{J}} D_\mu(\tilde\phi^{\alpha\mu}\sqrt{J}). \qquad /26/$$

Поэтому в теории Борна-Инфельда, где

$$\phi_{(\alpha\beta\gamma)} = 0, \quad \partial_\mu(\tilde\phi^{\alpha\mu}\sqrt{-g}) = 0, \qquad /27/$$

из тождеств /10/ и /11/ вытекают два следствия:

$$D_\mu(\tilde h^{\alpha\mu}\sqrt{J}) = 0, \quad \tilde h^{\beta\gamma}\phi_{\alpha\beta\gamma} = 0, \qquad /28/$$

так что уравнения /27/ можно привести к эквивалентному виду:

$$\phi_{(\alpha\beta\gamma)} = 0, \quad \bar h^{\beta\gamma}\phi_{\alpha\beta\gamma} = 0. \qquad /29/$$

В теории Борна-Инфельда тензор энергии-импульса электромагнитного поля равен

$$T^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \sqrt{J}\,\tilde h^{\alpha\beta}. \qquad /30/$$

В силу первого из следствий /28/ дивергенция этого тензора равна нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Born M., Infeld L. Proc.Roy.Soc., 1934, A144, p.425-451.
2. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. "Наука", М., 1966, т.2, статьи 79,127,130,134,138,141,143-146.
3. Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономий. ИЛ, М., 1960.
4. Норден А.П. Пространства аффинной связности. "Наука", М., 1976.
5. Широков П.А. Тензорное исчисление. Изд-во Казанского университета, Казань, 1961.
6. Черников Н.А. Геометрия Лобачевского как физическая наука. В кн.: Всесоюзная научная конференция по неевклидовой геометрии Лобачевского. Пленарные доклады. ВИНИТИ, М., 1977, с.146-153.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 ноября 1983 года.

Черников Н.А., Шавохина Н.С. P2-83-781

Теория Борна-Инфельда как часть единой теории поля Эйнштейна

Показано, что теория Борна-Инфельда может быть включена как часть в единую теорию поля Эйнштейна, если вместе с ковектором положить равным нулю тривектор кручения.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Chernikov N.A., Shavokhina N.S. P2-83-781

Born-Infeld Theory as a Part of the Einstein Unified Field Theory

It is shown that the Born-Infeld theory can be included as a part into the Einstein unified field theory if together with the covector the torsion trivector is set to be zero.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод Т.Ю.Думбрайс