



СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

865/84

13/11-84

P2-83-780

В.М.Мальцев

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО  
ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ПОДХОДОВ  
ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ КРАТНОСТИ  
ПРИ СЛОЖЕНИИ МОМЕНТОВ

1983

Многие задачи ядерной физики и квантовой статистики связаны с нахождением кратности  $P_{j, n_1, \dots, n_r}^{s_1, \dots, s_r}$ , с которой результирующий момент  $j$  встречается при векторном сложении  $n$  моментов, объединенных в  $r$  различных групп, содержащих  $n_\ell / \ell = 1, \dots, r$  тождественных моментов  $\mathfrak{P}_\ell$ .

Известны два подхода к поиску кратности: теоретико-групповой<sup>/1/</sup> и алгебраический<sup>/2/</sup> /комбинаторный/. В последнем случае используют рекуррентное соотношение, следующее из закона сложения угловых моментов.

Цель работы состоит в том, чтобы найти кратность, используя метод интегрирования на группе симметрии, и показать эквивалентность конечных результатов, полученных различными методами.

В теоретико-групповом подходе рассматриваемая величина равна квадрату проекции вектора  $A = \prod_{\ell=1}^r \mathfrak{P}[s_\ell]^{n_\ell}$  на подпространство, преобразующееся по неприводимому представлению  $[j]$  группы  $SU(2)$  /локальный изоморфизм групп  $SU(2)$  и  $\mathfrak{SO}(3)$  позволяет все вычисления связать также с группой вращений в трехмерном евклидовом пространстве/, то есть

$$P_{j, n_1, \dots, n_r}^{s_1, \dots, s_r} = |\langle [j] | A \rangle|^2 = \langle A | \hat{P}^{[j]} | A \rangle, \quad /1/$$

где проецирующий оператор

$$\hat{P}^{[j]} = \int \chi^{*[j]}(g) \hat{\mathcal{D}}(g) dg \quad /2/$$

проектирует векторы подпространства, в котором действуют операторы  $\hat{\mathcal{D}}(g)$ , на подпространство, преобразующееся по неприводимому представлению  $[j]$ . Здесь  $g$  - элемент группы  $SU(2)$ ,  $\chi^{[j]}(g)$  - характер неприводимого представления  $[j]$ ,  $dg$  - инвариантная мера /нормированный элемент объема/. Подставляя /2/ в соотношение /1/, имеем

$$P_{j, n_1, \dots, n_r}^{s_1, \dots, s_r} = \int dg \chi^{*[j]}(g) \prod_{\ell=1}^r [\chi^{[s_\ell]}(g)]^{n_\ell}. \quad /3/$$

Для группы  $SU(2)$ <sup>/3/</sup>

$$\chi^{[j]} = \frac{\sin[(2j+1)\phi/2]}{\sin(\phi/2)}, \quad /4/$$

$$dg = \frac{1}{\pi} \sin^2(\phi/2) d\phi. \quad /5/$$

Подставляя /4/ и /5/ в /3/, получаем

$$P_{j, n_1, \dots, n_r}^{s_1, \dots, s_r} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin[(2j+1)\phi/2] \prod_{\ell=1}^r \sin[(2s_\ell+1)\phi/2]}{\sin^{n-1}(\phi/2)} d\phi. \quad /6/$$

Изменяя переменную интегрирования и замечая, что подынтегральная функция на новом интервале  $(0, \pi)$  неотрицательна, преобразуем /6/ к виду

$$P_{j, n_1, \dots, n_r}^{s_1, \dots, s_r} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2j+1)a] \cdot \prod_{\ell=1}^r \sin^{n_\ell}[(2s_\ell+1)a]}{\sin^{n-1}a} da. \quad /7/$$

При этом необходимо помнить о дополнительных условиях:

$$\sum_{\ell=1}^r n_\ell = n; \quad j = j_m, j_{m-1}, \dots, 0 \text{ (или } \frac{1}{2}); \quad j_m = \sum_{\ell=1}^r n_\ell s_\ell. \quad /8/$$

Так как подынтегральное выражение /7/ является четной функцией от  $a$ , можно изменить пределы интегрирования:

$$P_{j, n_1, \dots, n_r}^{s_1, \dots, s_r} = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin[(2j+1)a] \prod_{\ell=1}^r \sin^{n_\ell}[(2s_\ell+1)a]}{\sin^{n-1}a} da. \quad /9/$$

Принимая во внимание, что интеграл в этих пределах от нечетной функции равен нулю, приведем /9/ к виду

$$P_{j, n_1, \dots, n_r}^{s_1, \dots, s_r} = \frac{2}{\pi i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\prod_{\ell=1}^r \sin^{n_\ell}[(2s_\ell+1)a]}{\sin^{n-1}a} \times \exp[(2j+1)a] da. \quad /10/$$

Преобразуем интеграл /10/ в контурный, положив  $e^{ia} = z$ , тогда

$$P_{j, n_1, \dots, n_r}^{s_1, \dots, s_r} = \frac{1}{\pi i} \oint \prod_{\ell=1}^r [1 - z^{2(2s_\ell+1)n_\ell}]^{-1} (1 - z^2)^{-(n-1)} \times z^{-(2s_\ell+1)n_\ell + n - 1 + 2j} dz, \quad /11/$$

где контур выбран таким образом, что интегрирование производится вдоль мнимой оси с обходом полюса при  $z = 0$  слева и по правой полуокружности  $|z| = 1$ .

Разлагая подынтегральное выражение /11/ в ряд Лорана в окрестности  $z = 0$ , имеем /для  $n \geq 2$ /

$$P_{j, n_1, \dots, n_r}^{s_1, \dots, s_r} = \frac{1}{\pi i} \oint \prod_{\ell=1}^r \sum_{k_\ell, p} (-1)^{k_\ell} C_{n_\ell}^{k_\ell} C_{n+p-2}^{n-2} \times z^{-(n_\ell - 2k_\ell)(2s_\ell+1) + 2p + n + 2j - 1} dz \quad /12/$$

с дополнительным условием

$$k = \sum_{\ell=1}^r k_\ell, \quad /13/$$

где  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . При почленном интегрировании вклад не будет

нулевым только в том случае, когда

$$-\sum_{\ell=1}^r (n_\ell - 2k_\ell)(2s_\ell+1) + 2p + n + 2j = 0, \quad \text{где } k_\ell \text{ и } p \geq 0. \quad /14/$$

Следовательно, используя /14/ и дополнительные условия /8/ и /13/, приходим к окончательному результату:

$$P_{j, n_1, \dots, n_r}^{s_1, \dots, s_r} = \sum_{0 \leq k \leq [\sum_{\ell=1}^r \frac{n_\ell s_\ell - j}{2s_\ell + 1}]} (-1)^k \times C_{\sum_{\ell=1}^r n_\ell s_\ell - \sum_{\ell=1}^r (2s_\ell+1)k_\ell + n - j - 2}^{\sum_{\ell=1}^r n_\ell} \times \prod_{\ell=1}^r C_{n_\ell}^{k_\ell},$$

где  $[\sum_{\ell=1}^r \frac{n_\ell s_\ell - j}{2s_\ell + 1}]$  - целая часть числа  $\sum_{\ell=1}^r \frac{n_\ell s_\ell - j}{2s_\ell + 1}$ . Аналогичный результат независимо получен недавно Михайловым /2/ комбинаторным методом. Это позволяет сделать вывод об эквивалентности обоих подходов.

Подход, использующий групповые свойства углового момента, обладает рядом преимуществ по сравнению с комбинаторным, а именно, он применим и при  $j < \min s_\ell$  и удобен для практических вычислений.

Подход, использующий групповые свойства углового момента, обладает рядом преимуществ по сравнению с комбинаторным, а именно, он применим и при  $j < \min s_\ell$  и удобен для практических вычислений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев В.М. ОИЯИ, Р2-81-185, Дубна, 1981.
2. Mikhailov V.V. J.Phys.A: Math.Gen., 1981, 14, p. 1107.
3. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. "Наука", М., 1965, с. 178.

Рукопись поступила в издательский отдел  
18 ноября 1983 года.



## НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
D11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
D4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
D4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
D2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
D10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
D1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
D17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
D1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
P18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
D2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
D9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
D3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
D2,4-83-179	Труды XV Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Дубна, 1982.	4 р. 80 к.
	Труды УШ Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Протвино, 1982 /2 тома/	11 р. 40 к.
D11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
D7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
D2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:  
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79  
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Мальцев В.М.

P2-83-780

Доказательство эквивалентности двух подходов для нахождения кратности при сложении моментов

Предложен теоретико-групповой подход для нахождения кратности при сложении моментов. Доказана эквивалентность двух различных подходов, один из которых /новый/ использует групповые свойства углового момента, другой /старый/ - рекуррентные соотношения. Работа выполнена методом интегрирования на группе симметрии. Новый подход обладает рядом преимуществ по сравнению с комбинаторным, а именно: он применим при  $j < \min S_e$ , удобен для практических вычислений и легко обобщается.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Maltsev V.M.

P2-83-780

Proof for Equivalence of Two Approaches to Finding the Multiplicity under Momentum Addition

A group theoretical method is proposed for finding the multiplicity under momentum addition. The equivalence of two different approaches is proved, one of which (new) uses group properties of angular momentum, and the other (commonly used) is based on recurrent relations. The work is made by the method of integration on the group symmetry. The new approach has some advantages as compared with the combinatorial one, that is, it is applicable for  $j < \min S_e$ , is suitable for practical calculations and may easily be extended.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой