сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-83-76

В.Н.Стрельцов

КИНЕМАТИКА ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В "НАБЛЮДАЕМЫХ" ПЕРЕМЕННЫХ

1983

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время достаточно широкому обсуждению подверглись проблемы, связанные с конвенциональным характером определений понятий одновременности и расстояния *. В частности, были рассмотрены так называемые обобщения ϵ -преобразования Лоренца, явно учитывающие отмеченный факт путем введения параметра одновременности ϵ /пространственного параметра ϵ_1 /. Эти преобразования при $\epsilon = 1/2$ ($\epsilon_1 = 1/2$) переходят в обычные преобразования Лоренца, тогда как при $\epsilon \neq 1/2$ допускают "временную анизотропию"**, приводящую к анизотропии скоростей распространения физических сигналов.

Напомним, что существование элементов условного соглашения при определении понятий одновременности и расстояния связано с тем, что непосредственно измеряемыми величинами в /радиолокационном/ опыте, на основе которого фактически вводятся указанные понятия, являются моменты времени посылки (t_1) и приема (t_2) отраженного светового сигнала. Мы избавимся от отмеченных условных соглашений, если перейдем от координат t и z *** к временам отправления и возвращения светового сигнала [4,8]. Математически это просто означает замену переменных.

Платой за такой переход является непривычность вводимого "временного описания". Преимущество же нового описания должно заключаться в непосредственной измеримости и других соответствующих кинематических и динамических величин. При этом упрощается математический язык теории относительности.

Однако в общем случае четырехмерного пространства такая простая картина уже не имеет места. А переход к непосредственно измеряемым величинам, наоборот, усложняет математический аппарат. Вместе с тем формулировка теории относительности в новых переменных**** имеет такое же/эквивалентное/ право на существование, а в ряде случаев может оказаться и более удобной. Специальные преобразования Лоренца и квантовая механика частиц со спином 1/2 дают примеры тому.

---

* См., например [1-8], где можно найти ссылки на предшествующие работы по этой теме.

** А при $\epsilon_1 \neq 1/2$ - пространственную анизотропию.

*** В рамках /1+1/-пространства.

**** С учетом аналогичной замены для другой пары координат.

2. ПЕРЕХОД К НЕПОСРЕДСТВЕННО ИЗМЕРЯЕМЫМ ВЕЛИЧИНАМ. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

В упомянутом выше радиолокационном опыте моменту времени t отражения светового сигнала и расстоянию z до точки отражения приписываются координаты

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}, \quad z = \frac{t_2 - t_1}{2}. \qquad /1/$$

Чтобы совершить переход к непосредственно измеряемым величинам t_1 и t_2, которые ниже мы будем обозначать x^1 и x^2, сделаем замену переменных *

$$x^1 \equiv t_1 = t - z, \qquad x^2 \equiv t_2 = t + z. \qquad /2/$$

При этом для квадрата интервала найдем

$$dr^2 = dt^2 - dz^2 = dx^1 dx^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \qquad /3/$$

т.е. $g_{11} = g_{22} = 0$, а $g_{12} = g_{21} = 1/2$.

В соответствии с /2/ для компонент ковариантной скорости получим

$$u^1 = \frac{dt}{dr} - \frac{dz}{dr}, \quad u^2 = \frac{dt}{dr} + \frac{dz}{dr} \qquad /4/$$

или

$$u^1 = \frac{dx^1}{dr} = \sqrt{\frac{dx^1}{dx^2}}, \quad u^2 = \frac{dx^2}{dr} = \sqrt{\frac{dx^2}{dx^1}} = (u^1)^{-1}. \qquad /4'/$$

С учетом /4/ и /4'/ вместо энергии E и импульса p для тела массы m будем иметь

$$p^1 = E - p = mu^1, \quad p^2 = E + p = mu^2, \qquad /5/$$

откуда

$$p^1 p^2 = m^2. \qquad /5'/$$

Здесь важно отметить, что u^1 и u^2, так же, как x^1 и x^2, являются непосредственно наблюдаемыми величинами. Действительно, на основании опыта по измерению доплеровской частоты ω найдем

* В свое время эти переменные рассматривались Котельниковым /5/ и Дираком /6/.

$$u^1 = \omega/\omega^0 \qquad \text{или} \qquad u^2 = \omega/\omega^0. \qquad /6/$$

Зная m, мы сможем определить также p^1 и p^2.

С учетом /2/ и /5/ для инвариантного действия S будем иметь

$$S = Et - pz = \frac{1}{2}(p^1 x^2 + p^2 x^1). \qquad /7/$$

Введем теперь в рамках нашего подхода величину (v), соответствующую обычной скорости движения β. Вводимая величина будет описывать изменение одной координаты по отношению к другой и выражаться через β

$$v = \frac{dx^2}{dx^1} = \frac{1+\beta}{1-\beta}. \qquad /8/$$

Очевидно, что величина v может меняться от 1 ($\beta = 0$) до ∞ ($\beta = 1$), т.е. скорость света, как и при предельном переходе к классике, является здесь бесконечной величиной. При изменении знака β, т.е. при изменении направления движения на противоположное, вместо /8/ будем иметь

$$v' = \frac{1-\beta}{1+\beta} = v^{-1}. \qquad /8'/$$

Таким образом, в обратном направлении скорость будет меняться от 1 до 0. По своему физическому смыслу величина v определяется отношением суммы времен прохождения некоторого пространственного отрезка туда и обратно светом t^c ($= t_2 - t_1$) и материальным телом t^m к разности этих времен:

$$v = \frac{t^m + t^c}{t^m - t^c}. \qquad /9/$$

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ КООРДИНАТ. ТЕОРЕМА "СЛОЖЕНИЯ" СКОРОСТЕЙ

На основании /2/ и /8/ специальные формулы преобразования Лоренца для координат запишутся в виде:

$$x^{1\prime} = v^{1/2} x^1, \quad x^{2\prime} = v^{-1/2} x^2. \qquad /10/$$

Аналогичную форму будут иметь и соответствующие преобразования для p^1 и p^2.

Комбинируя /9/ с другими частными (V) преобразованиями Лоренца

$$x^{1\prime\prime} = V^{1/2} x^{1\prime} (= w^{1/2} x^1), \qquad /11/$$

$$x^{2\prime\prime} = V^{-1/2} x^{2\prime} (= w^{-1/2} x^2),$$

придем к теореме "сложения" скоростей

$$w = vV. \qquad /12/$$

Здесь w - скорость результирующего преобразования, заменяющего два исходных.

4. ВРЕМЕННОЕ ОПИСАНИЕ СОБЫТИЙ В /1+2/-ПРОСТРАНСТВЕ

В более общем случае /1 + 2/-пространства координаты отражения радиолокационного сигнала будут, например, определяться выражениями

$$t = \frac{t_{21} + t_1}{2}, \quad r = \frac{t_{21} - t_1}{2}, \quad r + x + z = t_{22} - t_1. \qquad /13/$$

Здесь первый индекс по-прежнему определяет посылку или прием сигнала, а второй - порядковый номер сигнала. Отраженный сигнал расщепляется на два. Второй идет по направлению осей x и z к исходной точке. Вычисленные на основе /13/ выражения для x и z весьма громоздки, поэтому уже в данном случае переход к непосредственно наблюдаемым величинам значительно усложняет математический аппарат.

В случае измерения /вместо r/ координаты z будем иметь

$$z = \frac{t_2 - t_{12}}{2}, \quad r + x + z = t_2 - t_{11}, \quad t = \frac{t_2^2 + t_{12}^2 - 2t_{11}^2}{2(t_2 + t_{12} - 2t_{11})}. \qquad /14/$$

Уже на примере выражения для t видно, что и здесь переход к временным координатам вряд ли целесообразен.

Таким образом, только в частном случае ($t_{22} = t_{21}$ и $t_{12} = t_{11}$, т.е. когда точка отражения лежит на оси z) рассматриваемая замена переменных связана с переходом к наблюдаемым величинам. Что касается специальных преобразований Лоренца, то и в данном случае они будут по-прежнему иметь простой вид /10/.

С другой стороны, поскольку любая пространственная координата может быть выражена через время, обычное использование одной временной и трех пространственных координат нельзя заранее считать предпочтительным перед другим /эквивалентным ему/ описанием. Как кажется, единственным критерием здесь может быть только простота и удобство того или иного подхода.

5. ПЕРЕХОД К /2+2/-ПРОСТРАНСТВУ

Переписав формулы /2/ в виде

$$x^1 = -z + ix_4, \quad x^2 = z + ix_4, \qquad /2'/$$

где $x_4 = -it$, по аналогии с /15/ введем

$$x^3 = -x + iy, \quad x^4 = x + iy. \qquad /15/$$

При этом для квадрата интервала найдем

$$dr^2 = dx^1 dx^2 + dx^3 dx^4 = g_{ik}\, dx^i dx^k, \qquad /16/$$

т.е. метрический тензор g_{ik} будет иметь вид

$$2g_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad /17/$$

В дальнейшем мы будем условно говорить, что квадратичная форма /17/ определяет /2 + 2/-пространство.

Геометрически, например, в плоскости x^3x^4 декартовых координат x^3 и x^4 квадрат расстояния будет определяться площадью прямоугольника со сторонами x^3 и x^4. При этом множество точек, соответствующих постоянному расстоянию "a", будет задаваться равнобочной гиперболой $x^4 = a^2/x^3$.

Скалярное произведение двух векторов X и Y будет определяться выражением

$$XY = \frac{1}{2}(X^1Y^2 + X^2Y^1 + X^3Y^4 + X^4Y^3). \qquad /18/$$

Полагая, в соответствии с формулой /8/, для $v_2 = v$

$$v_3 = \frac{dx^3}{dx^1}, \quad v_4 = \frac{dx^4}{dx^1}, \qquad /19/$$

перепишем выражение для интервала в виде

$$dr = dx^1 \sqrt{v_2 + v_3 v_4}\,. \qquad /16'/$$

Приведем еще выражения компонент v_x, v_y и v_z обычной скорости через v_2, v_3 и v_4. Они будут иметь вид:

$$v_z = \frac{v_2 - 1}{v_2 + 1}, \quad v_x = \frac{v_4 - v_3}{v_2 + 1}, \quad v_y = \frac{v_4 + v_3}{i(v_2 + 1)}. \qquad /20/$$

На основании /10/ специальные релятивистские формулы преобразования для компонент антисимметричного тензора второго ранга F^{ik} будут иметь простой вид:

$$\begin{aligned} &F^{12\,\prime} = F^{12}, \quad F^{13\,\prime} = v_2^{1/2} F^{13}, \quad F^{14\,\prime} = v_2^{1/2} F^{14}, \\ &F^{34\,\prime} = F^{34}, \quad F^{23\,\prime} = v_2^{-1/2} F^{23}, \quad F^{24\,\prime} = v_2^{-1/2} F^{24}. \end{aligned} \qquad /21/$$

В случае электромагнитного поля F^{ik} выражается через напряженности $\vec{E}$ и $\vec{H}$ электрического и магнитного полей с помощью равенств

$$F^{12} = E_z, \quad F^{13} = -E_x + H_y + i(E_y + H_x),$$

$$F^{14} = E_x - H_y + i(E_y + H_x), \quad F^{34} = iH_z \text{ и т.д.}$$

При этом вид уравнений Максвелла в новых переменных не изменится.

6. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА В /2+2/-ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматриваемые переменные можно считать "естественными" для уравнения Дирака. Так, в этих переменных каждое из четырех уравнений будет иметь вместо пяти только три члена. Если представить уравнение Дирака с помощью матриц γ^i в прежней форме

$$\left(i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - m\right)\psi = 0, \qquad /22/$$

то теперь имеем

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \end{pmatrix}, \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad /23/$$

а ψ выразится через прежнюю волновую функцию $\underline{\Psi}$ с помощью равенств

$$\psi_{\frac{1}{2}} = \underline{\psi}_1 \mp \underline{\psi}_3, \quad \psi_{\frac{3}{4}} = \underline{\psi}_2 \mp \underline{\psi}_4. \qquad /24/$$

Отметим, что новые матрицы γ^i имеют отличными от нуля только два элемента. Как и прежде, они удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\gamma^i \gamma^k + \gamma^k \gamma^i = 2g^{ik} I. \qquad /25/$$

Для билинейной скалярной формы имеем

$$s = \psi^*(\gamma^1 + \gamma^2)\psi = \bar{\psi}\psi, \qquad /26/$$

где $\bar{\psi}$ - функция, релятивистски сопряженная ψ.

На основании /2/ и /15/ введем 4-вектор плотности вероятности для частиц со спином 1/2. При этом получим

$$j^1 = j^t - j^z = \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 = \bar{\psi}\gamma^1\psi, \qquad /26'/$$

$$j^2 = j^t + j^z = \psi_1^* \psi_1 + \psi_4^* \psi_4 = \bar{\psi}\gamma^2\psi \text{ и т.д.},$$

т.е. по-прежнему

$$j^k = \bar{\psi}\gamma^k\psi, \qquad /27/$$

хотя каждое выражение /26'/ имеет только два члена вместо четырех.

Что касается специальных релятивистских преобразований для компонент биспинорной волновой функции ψ, то они будут иметь следующий простой вид:

$$\psi'_{1,4} = v_2^{-1/4} \psi_{1,4}, \quad \psi'_{2,3} = v^{1/4} \psi_{2,3}, \qquad /28/$$

откуда, привлекая /26'/, легко получим формулы преобразования для компонент 4-вектора

$$j^{1\,\prime} = v_2^{1/2} j^1, \quad j^{2\,\prime}_{4} = v_2^{-1/2} j^2, \quad j^{3,4\,\prime} = j^{3,4}. \qquad /29/$$

Отметим также, что теперь спиноры связаны с 4-векторами при помощи следующих простых формул:

$$\begin{aligned} &p_{1\dot{1}} = p^{2\dot{2}} = p_1, \quad p_{2\dot{2}} = p^{1\dot{1}} = p_2, \\ &p_{2\dot{1}} = -p^{1\dot{2}} = p_3, \quad -p_{1\dot{2}} = p^{2\dot{1}} = p_4. \end{aligned} \qquad /30/$$

С учетом того, что в спинорном представлении

$$\eta = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \qquad \xi = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \qquad /31/$$

где двухкомпонентные величины

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^{\dot 1} \\ \eta^{\dot 2} \end{pmatrix} \qquad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \qquad /32/$$

- пунктирный контравариантный и непунктирный ковариантный спиноры, запишем уравнение Дирака в виде

$$\hat p^{\dot\alpha\beta}\xi_\beta = m\eta^{\dot\alpha}, \quad \hat p_{\alpha\dot\beta}\eta^{\dot\beta} = m\xi_\alpha . \qquad /33/$$

Здесь операторные спиноры $\hat p^{\dot\alpha\beta}$ и $\hat p_{\alpha\dot\beta}$ на основании /30/ соответствуют операторному 4-вектору $\hat p_i = i\partial_i$.

С другой стороны, с помощью $\hat p_i$ уравнения /33/ могут быть представлены в форме

$$\hat p_i\sigma^i\xi = m\eta, \quad \hat p_i\sigma_i\eta = m\xi . \qquad /34/$$

Здесь на основании /2/ и /15/, например, "контравариантный матричный 4-вектор" σ^i связан с матрицами Паули равенствами

$$\sigma^{\frac{1}{2}} = I \mp \sigma_z, \quad \sigma^{\frac{3}{4}} = \mp\sigma_x + i\sigma_y, \qquad /35/$$

где I - единичная матрица, и имеет вид

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad /36/$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как отмечалось ранее, в рамках /1+1/-пространства не только временная, но и пространственная координата вводится обычно с привлечением условных соглашений. Переход к непосредственно измеряемым на опыте величинам /временам отправления и приема радиолокационного сигнала/ позволяет избавиться от указанных конвенций. В результате упрощаются /специальные/ преобразования Лоренца, теорема "сложения" скоростей и др.

В общем случае, однако, переход к непосредственно наблюдаемым временам усложняет математический аппарат теории. Вместе с тем рассмотренная формулировка специальной теории относительности в неевклидовом пространстве эквивалентна обычной. При описании же спинорных величин, например, уравнения Дирака, она кажется более удобной.

Автор выражает благодарность Э.Г.Бубелеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-12699, Дубна, 1979; Р2-80-266, Дубна, 1980.
2. Зарипов Р.Г. В сб.: Гравитация и теория относительности. Изд-во КГУ, Казань, 1982, вып. 19, с. 43.
3. Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-82-330, Дубна, 1982.
4. Nikolenko V.G. JINR, E4-80-845, Dubna, 1981; E4-81-357, Dubna, 1981.
5. Котельников А.Б. Принцип относительности и геометрия Лобачевского. В сб.: In memoriam N.I. Lobačevski, T.2, Казань, 1927, с. 37.
6. Dirac P.A.M. Rev.Mod.Phys., 1949, 21, p. 392.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 февраля 1983 года.

Стрельцов В.Н. P2-83-76

Кинематика теории относительности в "наблюдаемых" переменных

Обсуждается формулировка специальной теории относительности в неевклидовом пространстве, определяемом метрической формой вида $dr^2 = dx^1dx^2 + dx^3dx^4$. Отмечается, что в частном случае /1+1/-измерений новые переменные $x^1 = t - z$ и $x^2 = t + z$ суть непосредственно наблюдаемые в /служащем для определения понятий одновременности и расстояния/ радиолокационном опыте величины. Переход к ним значительно упрощает /специальные/ преобразования Лоренца, теорему "сложения" скоростей и т.д.

В общем случае такая простая картина не имеет места. Однако в рамках рассматриваемого подхода также упрощается запись уравнения Дирака и выражения для плотности тока вероятности, связь спиноров с 4-векторами и др.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Strel'tsov V.N. P2-83-76

Relativistic Kinematics in "Observable" Variables

A formulation of special relativity in non-Euclidian space defined by the metric form of $dr^2 = dx^1dx^2 + dx^3dx^4$ is discussed. It is noted that in particular case of (1+1)dimensions new variables $x^1 = t - z$ and $x^2 = t + z$ are directly observable in (used for definition of concepts of simulataneity and distance) radar method of value. Transition to these significantly simplifies special Lorentz transformations, theorem of velocity"summation"etc .In a general case such a simple picture does not take place.However,within the framework of this approach the notation of Dirac equation and of the expression for probability current density, the connection of spinors with 4-vectors and others are also simplified.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой.