9/I-84

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

170/84

Р2-83-720

С.Г.Горишний, С.А.Ларин[1], Ф.В.Ткачев[2]

ε-РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ ИНДЕКСОВ: АППРОКСИМАЦИЯ $O(\varepsilon^5)$

Направлено в журнал "Physics Letters A"

[1] Московский государственный университет.
[2] Институт ядерных исследований АН СССР, Москва

1983

1. Изучение глубоких аналогий между квантовой статистикой и квантовой теорией поля обусловило значительный прогресс в обеих теориях. Так, применение метода ренормализационной группы, имеющего теоретико-полевое происхождение [1], в рамках метода ϵ-разложения [2] позволило вычислить критические индексы фазовых переходов второго рода исходя из ренормгрупповых функций модели $g\phi^4$ в четырехмерии. В результате критические индексы представляются в виде асимптотических рядов по степеням $\epsilon = (4-D)/2$, где D - размерность статистической системы. Вследствие расходящегося характера этих рядов для получения физической информации необходимо использовать специальные методы суммирования [4].

Вычисление ϵ-разложений для критических индексов до членов $O(\epsilon^4)$ и их суммирование с помощью метода работы [5] было проведено в [6]. Расчет члена $O(\epsilon^5)$ /без суммирования/ для одного из критических индексов, η, проведен в [7]. Недавние пятипетлевые вычисления ренормгрупповых функций в модели $g\phi^4_{(4)}$ [8] позволяют нам определить $O(\epsilon^5)$ -поправки ко всем критическим индексам, что и составляет цель данной работы. Мы также применяем метод суммирования [5] к нашим результатам.

2. Предполагается, что вблизи критической точки фазового перехода второго рода статистические системы проявляют универсальное скейлинговое поведение [3]. Вблизи критической точки $T = T_c$ корреляционная функция $\Gamma(\vec{x})$ имеет асимптотику

$$\Gamma(\vec{x}) \underset{|\vec{x}|\to\infty}{\sim} \frac{1}{|\vec{x}|^{D-2+\eta}}, \qquad /1/$$

а корреляционная длина ведет себя как

$$\xi \underset{T\to T_c}{\sim} (T-T_c)^{-\nu}(1 + \mathrm{Const}\,(T-T_c)^{\omega\cdot\nu} + \ldots), \qquad /2/$$

где η, ν, ω есть, по определению, критические индексы фазового перехода. Другие критические индексы могут быть выражены через η и ν /см., например, [9] /.

Аналогичное скейлинговое поведение наблюдается вблизи инфракрасно-стабильной точки $g = g_0(\epsilon)$ в квантовополевой модели, описываемой лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - \frac{m^2}{2}\phi^a\phi^a - \frac{16\pi^2}{4!}g\,(\phi^a\phi^a)^2,$$

где ϕ^a - n - компонентное скалярное поле. $g_0(\epsilon)$ находится из условия

$$\beta_\epsilon(g_0) = 0, \qquad \frac{d\beta_\epsilon(g)}{dg}\Big|_{g=g_0} \equiv \beta'_\epsilon(g_0) > 0, \qquad /3/$$

где ренормгрупповая функция $\beta_\epsilon(g)$ определена как $\beta_\epsilon(g) = \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} g$. /Здесь μ - ренормировочный параметр [1]/.

Детальное изучение аналогии между статистическими системами вблизи критической точки и моделью $g\phi^4$ в инфракрасной области проведено в работах [9,10]. Для η, ν и ω получаются следующие выражения:

$$\eta(2\epsilon) = 2\gamma_2(g_0) \equiv \sum_{k=2}^{\infty} \eta^{(k)}(-2\epsilon)^k;$$

$$1/\nu(2\epsilon) = 2(1 - \gamma_{m^2}(g_0)) \equiv 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \nu^{(k)}(-2\epsilon)^k; \qquad /4/$$

$$\omega(2\epsilon) = 2\beta'_\epsilon(g_0) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{(k)}(-2\cdot\epsilon)^k,$$

где $\gamma_2(g)$ и $\gamma_{m^2}(g)$ - аномальные размерности поля и массы соответственно:

$$\gamma_2(g) = \mu^2 \frac{d \ln Z_2}{d\mu^2}, \qquad \gamma_{m^2}(g) = \mu^2 \frac{d \ln m^2}{d\mu^2}.$$

Здесь Z_2 - константа перенормировки поля [1]. /Отметим, что η, ν и ω в /4/ не зависят от схемы перенормировки, используемой при вычислении γ_2, γ_{m^2} и β_ϵ/.

3. Пятипетлевые поправки для $\beta_\epsilon(g)$ и $\gamma_{m^2}(g)$ были вычислены в работе [8]. Это позволяет нам рассчитать вклады порядка $O(\epsilon^5)$ в ν и ω и, таким образом, завершить $O(\epsilon^5)$ -вычисления критических индексов, начатые в [7].

Разрешая /3/ относительно g_0, получаем:

$$g_0(\epsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} g^{(k)}(-2\epsilon)^k. \qquad /5/$$

Наши результаты для $g^{(5)}$, $\nu^{(5)}$ и $\omega^{(5)}$ имеют вид*:

$$\begin{aligned} g^{(5)} = \frac{1}{(n+8)^9} [&(168652910\pm330) + (116147400\pm250)\cdot n \\ &+ (32853497\pm70)\cdot n^2 + (4948816\pm11)\cdot n^3 \\ &+ (419968{,}4\pm0{,}7)\cdot n^4 + (22507{,}35\pm0{,}02)\cdot n^5 \\ &+ 652{,}5888\cdot n^6 - 1{,}87613\cdot n^7]; \end{aligned} \qquad /6/$$

*Численные ошибки не приведены для коэффициентов, известных в аналитическом виде; остальные коэффициенты получены только численно.

$$\begin{aligned} \nu^{(5)} = \frac{(-1)}{(n+8)^9} [&(122605760\pm220) + (141839930\pm270)\cdot n \\ &+ (61545610\pm130)\cdot n^2 + (13519660\pm30)\cdot n^3 \\ &+ (1638980\pm4)\cdot n^4 + (107059{,}6\pm0{,}3)\cdot n^5 \\ &+ (4130{,}69\pm0{,}01)\cdot n^6 + 101{,}43002\cdot n^7 - 0{,}712291\cdot n^8]; \end{aligned} \qquad /7/$$

$$\begin{aligned} \omega^{(5)} = \frac{(-1)}{(n+8)^9} [&(3605308000\pm3500) + (3062215300\pm3000)\cdot n \\ &+ (1088524900\pm1100)\cdot n^2 + (211238740\pm200)\cdot n^3 \\ &+ (24155490\pm20)\cdot n^4 + (1628924\pm1)\cdot n^5 \\ &+ (60409{,}42\pm0{,}03)\, n^6 + 942{,}8252\, n^7 - 2{,}501503 n^8]. \end{aligned} \qquad /8/$$

4. Асимптотические оценки для коэффициентов рядов теории возмущений по степеням g [11] приводят к следующим оценкам [12] коэффициентов ϵ-разложений $f(2\epsilon) = \sum_k f^{(k)}(-2\epsilon)^k$, где f обозначает g_0, η, $1/\nu$ или ω:

$$f^{(k)} \underset{k\to\infty}{\sim} k!\, a^k k^b \cdot c,$$

$$a = \frac{3}{n+8}, \qquad b = \begin{cases} 4 + n/2 & \text{для } g_0, \\ 3 + n/2 & \text{для } \eta, \\ 4 + n/2 & \text{для } 1/\nu, \\ 5 + n/2 & \text{для } \omega. \end{cases} \qquad /9/$$

Соотношения /9/ демонстрируют расходящийся характер ϵ-разложений, в то время как численные значения /6/-/8/ показывают, что прямое суммирование при $\epsilon = 1/2$ $(D = 3)$ бессмысленно. Следовательно, необходимо использовать технику суммирования асимптотических рядов.

Мы применяем метод суммирования работы [5], который уже был использован для суммирования $O(\epsilon^4)$ -приближений критических индексов в [6]. Этот метод базируется на модифицированном борелевском преобразовании:

$$f(2\epsilon) = \int_0^\infty \frac{dx}{2\epsilon a} e^{-\frac{x}{2\epsilon a}} \left(\frac{x}{2\epsilon a}\right)^{b+\frac{3}{2}} B(x), \qquad \text{где} \qquad /10/$$

$$B(x) = \sum_k (-x)^k B^{(k)}, \qquad B^{(k)} = \frac{f^{(k)}}{\Gamma(b+k+5/2)\, a^k}.$$

$B(x)$ сходится только при $|x| < 1$. Аналитическое продолжение $B(x)$ на $x > 1$ осуществляется посредством конформного отображения $x \to \omega$: $\omega(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}$. При этом область интегрирования $[0,\infty]$

переходит в $[0,1]$, где ряд по ω, получаемый переразложением $B(x(\omega))$, сходится.

Коэффициент при ω^N зависит только от $f^{(k)}$ для $k \le N$. Таким образом, пренебрегая членами $O(\omega^m)$, $m > N$, мы получаем приближение $f_N(2\epsilon)$, в котором учтены $O(\epsilon^N)$ -поправки к f.

Переразложение $B(x)$ по ω допускает неоднозначность /5/:

$$B(x) = \left(\frac{x}{\omega}\right)^{\lambda} B_{\lambda}(\omega) = \left(\frac{x}{\omega}\right)^{\lambda} \sum_{k}^{N} B^{(k)} \omega^k,$$

где λ - произвольный параметр, и его значение очень важно для результатов суммирования. Как было показано в /5/, λ должно фиксироваться из условия быстрейшей сходимости f_N, т.е. λ должно минимизировать величины $\Delta_N = \left|1 - \frac{f_N(1)}{f_{N-1}(1)}\right|$.

5. Наши вычисления в целом подтверждают выводы работы /6/ о том, что определенное таким образом λ слабо зависит от порядка аппроксимации и, следовательно, метод суммирования стабилен по отношению к добавлению высших членов ϵ-разложения. Для λ нами получены следующие значения:

$$\lambda = \begin{cases} 2{,}2 \div 2{,}4 \text{ для } \eta, \\ 1{,}2 \div 1{,}4 \text{ для } 1/\nu, \\ 0{,}2 \div 0{,}6 \text{ для } \omega. \end{cases} \qquad /11/$$

Просуммировав ϵ-разложение критических индексов при $N = 5$ и $\epsilon = 1/2$, мы получили результаты, представленные в таблице. Общая картина вполне удовлетворительна /хотя следует отметить, что точность результатов, полученных в /6/, кажется несколько завышенной/. Однако случай η представляется особым. Действительно, выбор $n = 1$ и $\epsilon = 1$ /т.е. $D = 2$/ соответствует двумерной модели Изинга /14/, где известно точное решение, а именно: $\eta_{exact} = 0{,}25$. Вычисления, выполненные в работе /6/, дали: $\eta_4(D = 2) = 0{,}18$. Мы получили $\eta_5(D = 2) = 0{,}20$, но нет еще четких указаний на то, что последовательность аппроксимантов для $\eta(D = 2)$ сходится к какому-то определенному значению, хотя видна хорошая тенденция.

Таким образом, нужно сделать вывод, что метод суммирования работы /5/, будучи в общем удовлетворительным, не всегда обеспечивает реальные оценки численных ошибок получаемых результатов. В частности, для сравнения точного значения критического индекса η двумерной модели Изинга с предсказаниями ϵ-разложения необходимо вычислить по крайней мере еще два члена в ϵ-разложении, что на сегодняшний день представляется нереальным.

В заключение мы выражаем глубокую признательность профессорам В.А.Матвееву и А.Н.Тавхелидзе за постоянную поддержку. Мы также благодарны Д.И.Казакову и О.В.Тарасову за полезные обсуждения.

Таблица

Сравнение результатов суммирования наших вычислений при $\epsilon = 1/2$ /столбец 1/ с результатами /6/ /столбец 2/, с вычислениями в модели $g\phi^4$ в трехмерии /столбец 3/ и с экспериментом /столбец 4/. Значения, приведенные в третьем и четвертом столбцах, взяты из работы /13/. Отметим, что в работе /15/ получено экспериментальное значение $\eta = 0{,}045 + 0{,}010$ для $n = 1$.

	1	2	3	4
		$n = 1$		
η	0,035±0,002	0,0333±0,0001	0,0315±0,0025	0,016±0,014
ν	0,628±0,001	0,628±0,002	0,6300±0,0008	0,625±0,005
ω	0,80±0,02	0,781±0,015	0,782±0,010	
		$n = 2$		
η	0,037±0,002	0,0352±0,0001	0,0335±0,0025	
ν	0,665±0,001	0,666±0,004	0,6693±0,0010	0,675±0,01
ω	0,79±0,02	0,777±0,015	0,778±0,008	
		$n = 3$		
η	0,037±0,003	0,0354±0,0001	0,0340±0,0025	
ν	0,698±0,001	0,700±0,007	0,7054±0,0011	
ω	0,79±0,02	0,779±0,007	0,779±0,006	

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1976.
2. Wilson K., Fischer M.E. Phys.Rev.Lett., 1978, 28, p.240.
3. Wilson K., Kogut J. Phys.Rep., 1974, 12C, p.75.
4. Kazakov D.I., Shirkov D.V. Fortschr.d.Phys., 1980, 28, p.465; Zinn-Justin J. Phys.Rep., 1981, 70, p.3.

5. Казаков Д.И., Тарасов О.В., Ширков Д.В. ТМФ, 1979, 38, с.15.
6. Владимиров А.А., Казаков Д.И., Тарасов О.В. ЖЭТФ, 1979, 77, с.1035.
7. Chetyrkin K.G., Kataev A.L., Tkachov F.V. Phys.Lett., 1981, 99B, p.147 and Er.101B.
8. Горишний С.Г. и др. ОИЯИ, Р2-83-546, Дубна, 1983.
9. Brezin E., Le Guillou J.C., Zinn-Justin J. Phys.Rev., 1973, D8, p.434,2428.
10. Wilson K. Phys.Rev.Lett., 1972, 28, p.548.
11. Липатов Л.Н. ЖЭТФ, 1977, 72, с.411.
12. Brezin E., Le Guillou J.C., Zinn-Justin J. Phys.Rev., 1977, D15, p.1544.
13. Le Guillou J.C., Zinn-Justin J. Phys.Rev.Lett., 1977, 39, p.95.
14. Hubbard J. Phys.Lett., 1972, 39A, p.365.
15. Анисимов М.А. и др. ЖЭТФ, 1979, 76, с.1662.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 октября 1983 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Горишний С.Г., Ларин С.А., Ткачев Ф.В. P2-83-720

ϵ-разложение для критических индексов: аппроксимация $O(\epsilon^5)$

Мы вычислили $O(\epsilon^5)$-приближение для критических индексов фазовых переходов второго рода, используя пятипетлевые приближения ренормгрупповых функций модели $g\phi^4$ в четырехмерии. К полученным рядам применена специальная техника суммирования.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Gorishny S.G., Larin S.A., Tkachov F.V. P2-83-720

ϵ-Expansion for Critical Exponents: the $O(\epsilon^5)$ Approximation

The $O(\epsilon^5)$ approximation to critical exponents of phase transitions of the second kind is calculated using the five-loop approximation to renormalization group functions of the $g\phi^4$ model in four dimensions. A special resummation technique is applied to the series obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод авторов