9/I-84

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-83-713

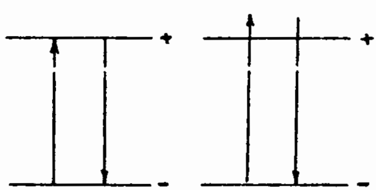
Н.Н.Боголюбов (мл.), Фам Ле Киен,
А.С.Шумовский

ДИНАМИКА МНОГОФОТОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ДВУХУРОВНЕВЫХ СИСТЕМАХ

Направлено в журнал
"Теоретическая и математическая физика"

1983

Обычно при исследовании динамической задачи о взаимодействии электромагнитного излучения с макроскопическими двухуровневыми системами ограничиваются рассмотрением процессов однофотонного испускания и поглощения /рис.1/. Кинетика таких процессов исследовалась на основе полуфеноменологических уравнений типа марковского Master equation в целом ряде работ /см.,например,[1-4] и приведенные в них ссылки/. Немарковские эффекты изучались на основе подхода Цванцига[5] в работах[6,7]. Лишь сравнительно недавно удалось получить точное кинетическое уравнение в подсистеме двухуровневых излучателей[8,9], вывод которого опирается на метод исключения бозонных переменных, развитый в связи с задачей о поляроне[10,11].



а б

Рис.1. Однофотонное испускание и поглощение в двухуровневой системе в случае резонанса /а/ и при учете отстройки /б/.

Вместе с тем в целом ряде физически важных случаев имеют место процессы многофотонной накачки и генерации в двухуровневых системах[12]. В частности, необходимость учета таких процессов возникает при рассмотрении систем, в которых имеются дипольно запрещенные переходы. Так, в атомах Na дипольно запрещенным является переход 3S–4S, используемый для нелинейной визуализации инфракрасного излучения[13,14]. Другими примерами многофотонных процессов могут служить генерация второй и высших гармоник, генерация на суммарной и разностной частотах и т.д.[12].

В настоящей работе мы рассмотрим вывод кинетического уравнения для макроскопической двухуровневой системы на основе первых принципов и некоторые следствия, получаемые на основе этого уравнения.

Исследуемая система состоит из N двухуровневых излучателей с частотами Ω_j ($j = 1,2,\ldots,N$) в рабочем объеме $V_c = \prod_a L_a$.Электро-

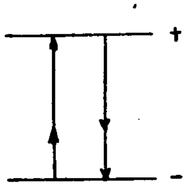


Рис.2. Двухфотонный резонансный процесс в двухуровневой системе.

магнитное поле квантуется в объеме $V \gg V_c$. В соответствии с обычным подходом [15] двухуровневому излучателю сопоставим операторы

$$r_j^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_{jx} \pm i\sigma_{jy}),$$

где j - "номер" излучателя и $\sigma_{j\alpha}$ - операторы Паули. В рассматриваемом двухуровневом представлении операторов энергии свободных излучателей есть

$$H_M = \sum_{j=1}^{N} h\Omega_j r_{jz}, \qquad r_{jz} \equiv \frac{1}{2}\sigma_{jz}.$$

Энергия свободного поля описывается выражением

$$H_F = \sum_k h\omega_{\vec k} a^+_{\vec k} a_{\vec k}.$$

Как было показано в работах [16-19], взаимодействие двухуровневых излучателей с m фотонами в процессе испускания и поглощения может быть описано оператором вида

$$H_{int} = hN^{-m/2} \sum_{j=1}^{N} g^{(m)} \{ r_j^- \prod_{f=1}^{m} a_f^+ + r_j^+ \prod_{f=1}^{m} a_f \},$$

где $g^{(m)}$ - дипольный матричный элемент m-фотонного перехода в двухуровневой системе.

Ниже мы ограничимся рассмотрением двухфотонного перехода /рис.2/. Из соображений общности представим взаимодействие в виде

$$H_{M-F} = hN^{-1} e^{\epsilon t} \sum_{j,\vec k} \{ g_{\vec k} e^{i\vec k \vec x_j} a_{\vec k} b\, r_j(\mu) + g^*_{\vec k} e^{-i\vec k \vec x_j} a^+_{\vec k} b^+ r_j^+(\mu) \},$$

где $r_j(\mu) \equiv r_j^+ + \mu r_j^-$, $\mu \in R$, и $\vec x_j$ - радиус-вектор j-го излучателя. Теперь общий гамильтониан системы можно записать в виде

$$H_t = \tilde H_M + \tilde H_F + H_{M-F}. \qquad /1/$$

Здесь выделена мода, описываемая операторами b^+, b:

$$\tilde H_M = H_M + h\omega b^+ b; \qquad \tilde H_F = \sum_{\vec k}{}' h\omega_{\vec k} a^+_{\vec k} a_{\vec k},$$

где Σ' означает суммирование по всем модам, кроме выделенной.

Заметим, что мода b^+, b может быть не только электромагнитной природы. Так, если операторы b^+, b описывают фононы, то оператор H_{M-F} соответствует процессам рассеяния Мандельштама-Бриллюэна [20]. В этом случае параметры g имеют сложную структуру [21]. Можно также рассмотреть случай, когда b^+, b соответствуют моде гравитационного излучения - бозонного поля со спином 2.

Перейдем к построению кинетического уравнения для системы с гамильтонианом /1/. Обозначим через $\mathfrak{D}_t$ статистический оператор полной системы с гамильтонианом /1/, удовлетворяющий уравнению Лиувилля

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{D}_t = [H_t, \mathfrak{D}_t]$$

с начальными условиями, соответствующими включению взаимодействия между полем /F-система/ и излучателями /M-система/ в начальный момент времени t_0:

$$\mathfrak{D}_{t_0} = \rho(M)\ \mathfrak{D}(F), \quad \mathfrak{D}(F) = \exp(-\beta H_F)/\underset{(F)}{Sp}\exp(-\beta H_F), \qquad \underset{(M)}{Sp}\,\rho(M) = 1, \quad /2/$$

где β - обратная температура. Как и в предыдущей работе [9], обозначим через f_M оператор, действующий на переменные $\tilde M$-системы, то есть на переменные, характеризующие излучатели и выделенную моду бозонного поля. Таким оператором может быть $r_{j\alpha}$, какая-либо комбинация из $r_{j\alpha}$ или операторы b^+, b. Уравнение движения для оператора f_M в представлении Гейзенберга [9] имеет вид

$$ih\frac{\partial}{\partial t} f_M(t) = [f_M(t), H_t]. \qquad /3/$$

Среднее значение динамической величины $f_M(t)$ определяется следующим образом [11]:

$$\langle f_M(t)\rangle = \underset{(M,F)}{Sp} f_M \mathfrak{D}_t = \underset{(M,F)}{Sp} f_M(t)\mathfrak{D}_{t_0}. \qquad /4/$$

Запишем уравнение движения для операторов $a_{\vec k}(t)$ в представлении Гейзенберга:

$$ih\frac{\partial}{\partial t} a_{\vec k}(t) = h\omega_{\vec k} a_{\vec k}(t) + hN^{-1} e^{\epsilon t} \sum_j g^*_{\vec k} e^{-i\vec k \vec x_j} b^+(t)\, r_j^+(\mu, t).$$

Его формальное решение может быть представлено в виде

$$a_{\vec k}(t) = a_{\vec k}(t_0)\, e^{-i\omega_{\vec k}(t-t_0)} -$$

$$- iN^{-1} g^*_{\vec k} \sum_j e^{-i\vec k \vec x_j} \int_{t_0}^{t} e^{\epsilon\tau} e^{-i\omega_{\vec k}(t-\tau)} b^+(\tau)\, r_j^+(\mu,\tau)\, d\tau .$$

Подставляя полученное решение в уравнение /3/, исключая бозонные переменные $a^+_{\vec k}$, $a_{\vec k}$ [11] и переходя к усреднению /4/, получаем уравнение вида

$$\frac{d}{dt}\langle f_M(t)\rangle + \frac{i}{h}\langle [f_M(t), \tilde H_M(t)]\rangle =$$

$$= \sum_{\vec\nu,\vec\nu'} \int_{-\infty}^{t} d\tau \{ D(\vec\nu,\vec\nu'; t,\tau) \langle [R^+_{\vec\nu}(t)\, b(t), f_M(t)] R^-_{\vec\nu'}(\tau)\, b^+(\tau)\rangle +$$

$$+ N(\vec\nu,\vec\nu'; t,\tau) \langle [[R^+_{\vec\nu}(t)\, b(t), f_M(t)], R^-_{\vec\nu'}(\tau)\, b^+(\tau)]\rangle \} +$$

$$+ \mu^2 \sum_{\vec\nu,\vec\nu'} \int_{-\infty}^{t} d\tau \{ D(-\vec\nu,-\vec\nu'; t,\tau) \langle [R^-_{\vec\nu}(t)\, b(t), f(t)] R^+_{\vec\nu'}(\tau)\, b^+(\tau)\rangle + \qquad /5/$$

$$+ N(-\vec\nu,-\vec\nu'; t,\tau) \langle [[R^-_{\nu}(t)\, b(t), f_M(t)], R^+_{\vec\nu'}(\tau)\, b^+(\tau)]\rangle \} +$$

$$+ \mu \sum_{\vec\nu,\vec\nu'} \int_{-\infty}^{t} d\tau \{ D(\vec\nu,-\vec\nu'; t,\tau) \langle [R^+_{\vec\nu}(t)\, b(t), f_M(t)] R^+_{\vec\nu'}(\tau)\, b^+(\tau)\rangle +$$

$$+ N(\vec\nu,-\vec\nu'; t,\tau) \langle [[R^+_{\vec\nu}(t)\, b(t), f_M(t)], R^+_{\vec\nu'}(\tau)\, b^+(\tau)]\rangle \} +$$

$$+ \mu \sum_{\vec\nu,\vec\nu'} \int_{-\infty}^{t} d\tau \{ D(-\vec\nu,\vec\nu', t,\tau) \langle [R^-_{\vec\nu}(t)\, b(t), f_M(t)] R^-_{\vec\nu'}(\tau)\, b^+(\tau)\rangle +$$

$$+ N(-\vec\nu,+\vec\nu'; t,\tau) \langle [[R^-_{\vec\nu}(t)\, b(t), f_M(t)], R^-_{\vec\nu'}(\tau)\, b^+(\tau)]\rangle \} + \text{сопр.}$$

Здесь совершен переход к пределу $t_0 \to -\infty$ [9] и введены коллективные операторы [9] $R^{\pm}_{\vec\nu} \equiv \sum_j r_j^{\pm} e^{\pm i\vec\nu \vec x_j}$. Вектор $\vec\nu$ соответствует модам в рабочем объеме V_c, число которых равно N: $\nu_a = \frac{2\pi n_a}{L_a}$, $a = x,y,z$, $n = 1,2,\ldots$

Функции $D(\cdot)$, $N(\cdot)$ определены соотношениями

$$D(\vec\nu,\vec\nu'; t,\tau) \equiv N^{-2} \sum_{\vec k} |g_{\vec k}|^2 \phi(\vec k - \vec\nu)\phi^*(\vec k - \vec\nu')\, e^{-i\omega_{\vec k}(t-\tau)}\, e^{\epsilon(t+\tau)} ,$$

$$N(\vec\nu,\vec\nu'; t,\tau) \equiv N^{-2} \sum_{\vec k} N_{\vec k} |g_{\vec k}|^2 \phi(\vec k - \vec\nu)\beta^*(\vec k - \vec\nu')\, e^{-i\omega_{\vec k}(t-\tau)}\, e^{\epsilon(t+\tau)} ,$$

где $\phi(\vec\kappa) \equiv N^{-1} \sum_j e^{i\vec\kappa \vec k_j}$, $N_{\vec k} \equiv \exp(-\frac{1}{2}\beta h\omega_{\vec k})/2\,\mathrm{sh}(\frac{1}{2}\beta h\omega_{\vec k})$.

Уравнение /5/ является точным кинетическим уравнением для $\tilde M$-системы. Заметим, что в правой части /5/ стоят средние более высокого порядка, чем в левой; они зависят от двух времен: τ и t. Однако, считая взаимодействие между средой и полем слабым и учитывая неоднородное лоренцево уширение [15], можно положить

$$R^{\pm}_{\vec\nu}(\tau) \cong R^{\pm}_{\vec\nu}(t)\exp(\mp i\Omega(t-\tau))\exp(-\frac{t-\tau}{T}),$$

$$b(\tau) \cong b(t)\exp(i\omega_{\vec k}(t-\tau)),$$

где Ω - центральная частота в спектре излучения и T - время жизни осциллятора, характеризующее ширину неоднородного лоренцева уширения. Теперь интегрирование по переменной τ в правой части /5/ может быть выполнено явным образом. Пренебрегая быстро осциллирующими коллективными членами типа R^+R^+, R^-R^- [2], а также вкладами от $D(\cdot)$ и $N(\cdot)$ при $\vec\nu \neq \vec\nu'$*, получаем из /5/

$$\frac{d}{dt}\langle f_M(t)\rangle + \frac{i}{h}\langle [f_M(t), \tilde H_M(t)]\rangle =$$

$$= \frac{1}{2N} \sum_{\vec\nu} \{ \Gamma^-_{\vec\nu} \langle [R^+_{\nu}(t)\, b(t), f_M(t)] R^-_{\vec\nu}(t)\, b^+(t)\rangle +$$

$$+ N^-_{\vec\nu} \langle [[R^+_{\vec\nu}(t)\, b(t), f_M(t)], R^-_{\vec\nu}(t)\, b^+(t)]\rangle + \qquad /6/$$

$$+ \mu^2 \Gamma^+_{\vec\nu} \langle [R^-_{\vec\nu}(t)\, b(t), f_M(t)] R^+_{\vec\nu}(t)\, b^+(t)\rangle +$$

$$+ \mu^2 N^+_{\vec\nu} \langle [[R^-_{\vec\nu}(t)\, b(t), f_M(t)], R^+_{\vec\nu}(t)\, b^+(t)]\rangle \} + \text{сопр.}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Gamma^{\mp}_{\vec\nu} \equiv \gamma^{\mp}_{\vec\nu} - i\Omega^{\mp}_{\vec\nu},$$

$$\gamma^{\mp}_{\vec\nu} \equiv 2(2\pi)^{-3} v \int d\vec k \frac{2T|g_{\vec k}|^2 |\phi(\vec k - \vec\nu)|^2}{1 + 4T^2(\omega_{\vec k} + \omega \mp \Omega)^2},$$

$$\Omega^{\mp}_{\vec\nu} \equiv 2(2\pi)^{-3} v \int d\vec k\, 4T^2 |g_{\vec k}|^2 |\phi(\vec k - \vec\nu)|^2 \frac{\omega_{\vec k} + \omega \mp \Omega}{1 + 4T^2(\omega_{\vec k} + \omega \mp \Omega)^2},$$

$$N^{\mp}_{\vec\nu} \equiv n^{\mp}_{\vec\nu} - i\kappa^{\mp}_{\vec\nu},$$

---

* Это можно сделать, так как по определению функция $\phi(\kappa)$ имеет острый максимум при $\kappa = 0$.

$$n^{\mp}_{\vec\nu} \equiv 2(2\pi)^{-3} v \int d\vec k\, 2T|g_{\vec k}|^2 \frac{|\phi(\vec k-\vec\nu)|^2 N_{\vec k}}{1+4T^2(\omega_{\vec k}+\omega\mp\Omega)^2},$$

$$\kappa^{\mp}_{\vec\nu} \equiv 2(2\pi)^{-3} v \int d\vec k\, 4T^2|g_{\vec k}|^2 N_{\vec k}|\phi(\vec k-\vec\nu)|^2 \frac{\omega_{\vec k}+\omega\mp\Omega}{1+4T^2(\omega_{\vec k}+\omega\mp\Omega)^2},$$

и, кроме того, совершен предельный переход $\epsilon \to +0$. Через v обозначен удельный объем: $v \equiv V/N$.

Полученное таким образом уравнение /6/ можно рассматривать как марковское уравнение для макроскопической двухуровневой системы с двухфотонными переходами.

Рассмотрим теперь некоторое следствие из уравнения /6/. Для простоты ограничимся случаем $\mu = 0$, соответствующим приближению вращающейся волны /15/. Положим сначала $f_M = R_z$. Тогда *

$$\frac{d}{dt}\langle R_z(t)\rangle = -\frac{1}{N}\sum_{\vec\nu}\{\gamma^-_{\vec\nu}\langle R^+_{\vec\nu}R^-_{\vec\nu}bb^+\rangle + n^-_{\vec\nu}\langle 2R_z b^+b + R^+_{\vec\nu}R^-_{\vec\nu}\rangle\}. \qquad /7/$$

Полагая далее $f_M = b^+b$, находим

$$\frac{d}{dt}\langle b^+(t)\,b(t)\rangle = -\frac{d}{dt}\langle R_z(t)\rangle. \qquad /8/$$

Если определить интенсивность излучения стандартным соотношением /15/

$$I(t) = -h\Omega\frac{d}{dt}\langle R_z(t)\rangle,$$

то в силу /8/

$$I(t) = h\Omega\frac{d}{dt}\langle b^+(t)\,b(t)\rangle.$$

Процесс излучения будет происходить лишь при $I(t)>0$; при $I(t)<0$ в системе реализуется процесс поглощения.

Введем оператор

$$S_{\vec\nu} = \sum_{\substack{j,j' \\ (j\neq j')}} r^+_j r^-_{j'} \exp[i\vec\nu(\vec x_j - \vec x_{j'})].$$

Как нетрудно видеть, $R^{\pm}_{\vec\nu}R^{\mp}_{\vec\nu} = S_{\vec\nu} + \frac{1}{2}N \pm R_z$. Теперь из /7/, /8/ имеем

---

* Ниже использованы очевидные перестановочные соотношения: $[R^{\pm}_{\vec\nu}, R_{\vec\nu}] = \mp R^{\pm}_z$, $[R^+_{\vec\nu}, R^-_{\vec\nu}] = 2R_z$.

$$\frac{d}{dt}\langle R_z(t)\rangle = -\frac{d}{dt}\langle b^+(t)\,b(t)\rangle = -\frac{1}{N}\sum_{\vec\nu}\langle(S_{\vec\nu}+\frac{1}{2}N)\{\gamma^-_{\vec\nu}bb^+ + n^-_{\vec\nu}\}\rangle - \qquad /9/$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{\vec\nu}(\gamma^-_{\vec\nu}+2n^-_{\vec\nu})\langle R_z bb^+\rangle + \frac{1}{N}\sum_{\vec\nu} n^-_{\vec\nu}\langle R_z\rangle.$$

Из /8/ ясно, что $\langle R_z(t)\rangle + \langle b^+(t)\,b(t)\rangle = \mathrm{const} \equiv M$. Отсюда $\langle bb^+\rangle = \langle b^+b\rangle + 1 = M + 1 - \langle R_z\rangle$. Предположим теперь, что корреляция между полем и средой мала. Тогда

$$\langle S_{\vec\nu}bb^+\rangle \cong \langle S_{\vec\nu}\rangle\langle bb^+\rangle = \langle S_{\vec\nu}\rangle(M+1-\langle R_z\rangle),$$

$$\langle R_z bb^+\rangle \cong \langle R_z\rangle\langle bb^+\rangle = \langle R_z\rangle(M+1-\langle R_z\rangle).$$

Подчеркнем, что значение константы M может быть определено из начальных условий.

Будем считать, что в начальном состоянии все излучатели возбуждены и что время жизни осциллятора $T \gg \tau_N$ - длительности процесса. Тогда

$$\langle S_{\vec\nu}\rangle = \{\Gamma(\vec\nu-\vec\nu_0) - \frac{1}{N}\}(\frac{N^2}{4} - \langle R_z\rangle^2),$$

где $\Gamma(\vec\nu-\vec\nu_0) = |N^{-1}\sum_j \exp[i(\vec\nu-\vec\nu_0)\vec x_j]|^2$.

Вектор $\vec\nu_0$ характеризует начальное /возбужденное/ коллективное состояние системы излучателей. Теперь уравнение /9/ принимает вид

$$\frac{d}{dt}\langle R_z\rangle = -N^{-1}\sum_{\vec\nu}\{\Gamma(\vec\nu-\vec\nu_0) - \frac{1}{N}\}(\frac{N^2}{4} - \langle R_z\rangle^2)\{\gamma^-_{\vec\nu}(M+1-\langle R_z\rangle) + n^-_{\vec\nu}\} - \qquad /10/$$

$$-\frac{1}{2}\gamma(M+1-\langle R_z\rangle) - \frac{n}{2} - N^{-1}(\gamma+2n)\langle R_z\rangle(M+1-\langle R_z\rangle) + \frac{n}{N}\langle R_z\rangle.$$

Здесь $\gamma \equiv \sum_{\vec\nu}\gamma^-_{\vec\nu}$, $n \equiv \sum_{\vec\nu} n^-_{\vec\nu}$.

Уравнение /10/, вообще говоря, интегрируется в квадратурах; для этого, однако, необходимо знать корни многочлена 3-й степени по $\langle R_z\rangle$, стоящего в правой части /10/. Поэтому рассмотрим специальный случай, когда в начальном состоянии электромагнитное поле отсутствует за исключением, быть может, моды ω и $\beta^{-1} = 0$. Тогда вместо /10/ имеем

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{a}{N}(X-M-1)(X+\frac{N}{2})(X-\frac{N}{2}-\frac{\gamma}{a}), \qquad /11/$$

где $X \equiv \langle R_z(t)\rangle$, $a \equiv \sum_{\vec\nu}\gamma^-_{\vec\nu}\{\Gamma(\vec\nu-\vec\nu_0) - N^{-1}\} \le \gamma$.

Как нетрудно видеть,

$$\frac{1}{(X-M-1)(X+\frac{N}{2})(X-\frac{N}{2}-\frac{\gamma}{a})} = \frac{A}{X-M-1} + \frac{B}{X+\frac{N}{2}} + \frac{C}{X-\frac{N}{2}-\frac{\gamma}{a}},$$

где

$$A \equiv (M+1+\frac{N}{2})^{-1}\ (M+1-\frac{N}{2}-\frac{\gamma}{a})^{-1};$$

$$B \equiv (N+\frac{\gamma}{a})^{-1}\ (M+1+\frac{N}{2})^{-1};$$

$$C \equiv (N+\frac{\gamma}{a})^{-1}\ (\frac{N}{2}+\frac{\gamma}{a}-M-1)^{-1}.$$

Теперь решение уравнения /11/ может быть представлено в виде

$$e^{-\frac{a}{N}(t-\bar{t}_0)} = |\langle R_z\rangle - M - 1|^{A}\ |\langle R_z\rangle + \frac{N}{2}|^{B}\ |\langle R_z\rangle - \frac{N}{2} - \frac{\gamma}{a}|^{C}. \qquad /12/$$

Как нетрудно видеть, $A+B+C=0$. Предположим, что $M+1 \cong \frac{N}{2}+\frac{\gamma}{a}$. Тогда $A+C=-B=-(N+\frac{\gamma}{a})^{-2}$ и из /12/ имеем

$$\left|\frac{\langle R_z\rangle + N/2}{\langle R_z\rangle - N/2 - \gamma/a}\right|^{2} = \exp[-\frac{a}{N}(t-\bar{t}_0)],$$

откуда $\langle R_z(t)\rangle = -\frac{N}{2} + (N+\frac{\gamma}{a})\{1+e^{+(t-\bar{t}_0)/\tau_N}\}^{-1}$. Здесь $\tau_N = \frac{N}{a}(N+\frac{\gamma}{a})^{-2}$.

Для этого специального случая интенсивность излучения есть

$$I(t) = \frac{\hbar\Omega a}{4N}(N+\frac{\gamma}{a})^{3}\ \mathrm{sech}^{2}\,\frac{t-\bar{t}_0}{2\tau_N}. \qquad /13/$$

Входящий сюда параметр $\bar{t}_0$ находится из начального значения $\langle R_z\rangle_0$ и определяет максимум интенсивности излучения /рис.3/. Например, для случая $\langle R_z\rangle_0 = \frac{N}{2}$ имеем $\bar{t}_0 = \tau_N \ln\frac{Na}{\gamma}$.

Как нетрудно видеть, полученное выражение /13/ для интенсивности содержит член, пропорциональный $N^2 a$, что соответствует сверхизлучательному вкладу.

Рассмотрим теперь более общий случай $\beta^{-1} \geq 0$. Введем обозначение $\eta \equiv \sum_{\vec{\nu}} \bar{n}_{\vec{\nu}}\{\Gamma(\vec{\nu}-\vec{\nu}_0) - N^{-1}\}$.

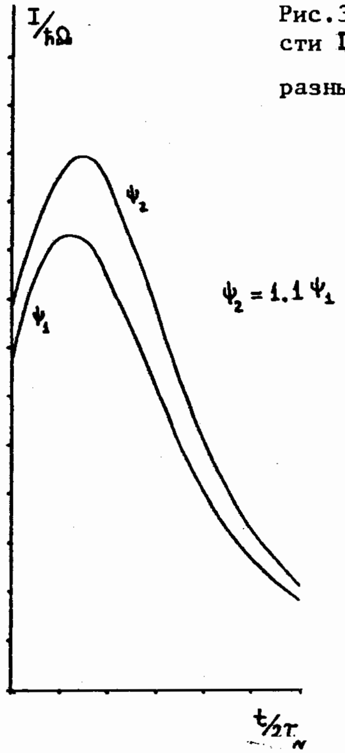


Рис.3. Зависимость безразмерной интенсивности $I/\hbar\Omega$ от безразмерного времени $t/2\tau_N$ для разных значений безразмерного параметра $\psi = \frac{Na}{\gamma}$.

Тогда уравнение /10/ можно представить в виде

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{a}{N}X + (\frac{a(M+1)}{N} + \frac{\eta}{N} + \frac{\gamma+2n}{N})X^2 + (\frac{aN}{4} + \frac{\gamma}{2} + \frac{n}{N} - \frac{(\gamma+2n)(M+1)}{N})X - (\frac{n}{2} + \gamma\frac{M+1}{2} + aN\frac{M+1}{2} + \frac{\eta N}{4}). \qquad /14/$$

Пусть X_1, X_2, X_3 - корни многочлена 3-й степени, стоящего в правой части /14/. Тогда решение представимо в виде

$$|X-X_1|^{A_1}|X-X_2|^{A_2}|X-X_3|^{A_3} = e^{-\frac{a}{N}(t-t_0)}, \qquad /15/$$

где $A_1 = (X_1-X_2)^{-1}(X_1-X_3)^{-1}$; $A_2 = (X_2-X_1)^{-1}(X_2-X_3)^{-1}$; $A_3 = (X_3-X_1)^{-1}(X_3-X_2)^{-1}$.

Такое решение описывает либо испускание, либо поглощение в зависимости от начального состояния системы. Пусть, например, $M+1 = \frac{N}{2}$.

Тогда уравнение /14/ принимает вид

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{a}{N}(X-\frac{N}{2})(X-X_2)(X-X_3), \qquad /16/$$

где $X_2 = \frac{\eta+\gamma+2n}{2a} + \sqrt{(\frac{\eta+\gamma+2n}{2a})^2 + \frac{N^2}{4} + \frac{\eta N}{2a} + \frac{\gamma N}{2a} + \frac{n}{a}}$,

$$X_3 = \frac{\eta + \gamma + 2n}{2a} - \sqrt{\left(\frac{\eta+\gamma+2n}{2a}\right)^2 + \frac{N^2}{4} + \frac{\eta N}{2a} + \frac{\gamma N}{2a} + \frac{n}{a}}\,.$$

Заметим, что $X_2 > \frac{N}{2} > 0 > X_3 > -\frac{N}{2}$. С другой стороны, $-\frac{N}{2} < X < M = \frac{N}{2} - 1$. Поэтому, если в начальный момент времени $X_0 > X_3$, то $\frac{dX}{dt} < 0$ и уравнение /16/ описывает процесс испускания, причем $X \to X_3$ и интенсивность $I(t) > 0$. Если же в начальный момент времени $X_0 < X_3$, то $\frac{dX}{dt} > 0$ и уравнение /16/ определяет поглощение в системе. При этом $I(t) < 0$ и так же $X \to X_3$ при $t \to \infty$.

Выше мы рассмотрели случай $\mu = 0$, соответствующий приближению вращающейся волны. Пусть теперь $\mu = 1$. Тогда из кинетического уравнения /6/ для случая $f_M = R_z$ получаем

$$\frac{d}{dt}\langle R_z\rangle = -N^{-1}\sum_{\vec\nu}\langle (S_{\vec\nu} + \frac{N}{2})\{bb(\gamma^+_{\vec\nu} - \gamma^-_{\vec\nu}) + n^+_{\vec\nu} - n^-_{\vec\nu}\}\rangle -$$

$$- N^{-1}\sum_{\vec\nu}\langle R_z bb^+\rangle(\gamma^+_{\vec\nu} + \gamma^-_{\vec\nu} + 2n^+_{\vec\nu} + 2n^-_{\vec\nu}) + N^{-1}\sum_{\vec\nu}\langle R_z\rangle(n^+_{\vec\nu} + n^-_{\vec\nu})\,. \qquad /17/$$

Уравнение /17/ отличается от /9/ учетом так называемых антирезонансных членов.

Предположим, что поле, описываемое операторами b^+, b, является в активной области V_c достаточно сильным, то есть что $\langle b^+b\rangle = \mathrm{const}$. Тогда $\langle S_{\vec\nu} bb^+\rangle = \langle S_{\vec\nu}\rangle\langle bb^+\rangle$; $\langle R_z bb^+\rangle = \langle R_z\rangle\langle bb^+\rangle$. Уравнение /17/ принимает теперь вид

$$\frac{d}{dt}\langle R_z\rangle = -\sum_{\vec\nu}\mathfrak{U}_{\vec\nu}(\langle S_{\vec\nu}\rangle + \frac{N}{2}) - \mathfrak{B}\langle R_z\rangle, \qquad /18/$$

где $\mathfrak{U}_{\vec\nu} \equiv N^{-1}\{\langle bb^+\rangle(\gamma^-_{\vec\nu} - \gamma^+_{\vec\nu}) + n^-_{\vec\nu} - n^+_{\vec\nu}\}$,

$$\mathfrak{B} \equiv N^{-1}\sum_{\vec\nu}\{\langle bb^+\rangle(\gamma^-_{\vec\nu} + \gamma^+_{\vec\nu} + 2n^-_{\vec\nu} + 2n^-_{\vec\nu}) - (n^-_{\vec\nu} + n^+_{\vec\nu})\}\,.$$

Как и следовало ожидать, уравнение /18/ с точностью до коэффициентов совпадает с уравнением для интенсивности в случае однофотонного процесса, полученным нами ранее [22].

Выберем в качестве начального состояния так называемое блоховское состояние [15]. Тогда $\langle S_{\vec\nu}\rangle \cong \{\Gamma(\nu - \nu_0) - N^{-1}\}(\frac{N^2}{4} - \langle R_z\rangle^2)$.

Теперь уравнение /18/ преобразуется в следующее:

$$\frac{dX}{dt} = -\bar{\mathfrak{U}}(\frac{N^2}{4} - X^2) - \mathfrak{B}X - \frac{N}{2}\mathcal{C} \quad (X \equiv \langle R_z\rangle), \qquad /19/$$

где $\bar{\mathfrak{U}} = \sum_{\vec\nu}\{\Gamma(\vec\nu - \vec\nu_0) - N^{-1}\}\mathfrak{U}_{\vec\nu}$; $\mathcal{C} = \sum_{\vec\nu}\mathfrak{U}_{\vec\nu}$.

Решение уравнения /19/ есть $\left|\frac{X - X_1}{X - X_2}\right| = \mathrm{const}\,\exp(\xi t)$,

$\xi \equiv (N^2\bar{\mathfrak{U}}^2 + 2N\bar{\mathfrak{U}}\mathcal{C} + \mathfrak{B}^2)^{1/2}$, $\quad X_{1,2} \equiv \frac{\mathfrak{B} \pm \xi}{2\bar{\mathfrak{U}}}$.

Так как $\mathfrak{U} < \mathcal{C} < \mathfrak{B}$, то $X_1 > \frac{N}{2} > 0 > X_2 > -\frac{N}{2}$. Область $X > X_2$ отвечает процессам излучения. Соответствующее решение уравнения /19/ принимает вид

$$X = X_2 + \frac{X_1 - X_2}{1 + \exp[\xi(t - \bar t_0)]}\,.$$

При этом интенсивность

$$I(t) = \frac{\hbar\Omega}{4}(X_1 - X_2)\xi\,\mathrm{sech}^2\{\frac{\xi}{2}(t - \bar t_0)\}\,,$$

что соответствует сверхизлучательному процессу. Действительно, так как $(X_1 - X_2)\xi = N^2\bar{\mathfrak{U}} + 2N\mathcal{C} + \mathfrak{B}/\bar{\mathfrak{U}}$, $\quad I(t) \sim N^2 a$.

Решение уравнения /19/ для области $X < X_2$ есть

$$X = X_2 + \frac{X_1 - X_2}{1 - \exp[\xi(t + \bar t_0)]}\,,$$

и формально определенная интенсивность процесса имеет вид

$$I(t) = -\frac{\hbar\Omega}{4}(X_1 - X_2)\,\xi\,\mathrm{cosech}^2\{\frac{\xi}{2}(t + \bar t_0)\}\,,$$

что соответствует поглощению в системе.

Таким образом, полученное в настоящей работе обобщенное кинетическое уравнение для двухфотонных процессов в макроскопической двухуровневой системе позволяет описать процессы испускания и поглощения фотонов и определить условия возникновения сверхизлучательного режима генерации в зависимости от параметров системы /гамильтониана/ и начального состояния. Мы здесь рассмотрели лишь некоторые простые следствия, которые могут быть получены на основе кинетического уравнения /5/. Более детальное изучение его возможных решений является задачей дальнейших исследований.

Пользуясь случаем, авторы выражают глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову за постоянное внимание и поддержку. Мы также благодарны П.Н.Боголюбову, А.Н.Мелешко, В.Н.Плечко, Н.А.Черникову, Н.С.Шавохиной, В.И.Юкалову, И.Р.Юхновскому за многочисленные полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bonifatio R., Lugiato L.A. Phys.Rev., 1975, A11, p.1507; 1975, A12, p.587.
2. Banfi G., Bonifatio R. Phys.Rev., 1975, A12, p.2068.
3. Андреев А.В. ЖЭТФ, 1977, 72, с.1397.
4. Андреев А.В., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А. УФН, 1980, 131, с.653.
5. Zwanzig R. Physica, 1964, 30, p.1109.
6. Haake F. Z.Phys., 1969, 227, p.179.
7. Mandel P. Phys.Lett., 1974, 47A, p.307.
8. Боголюбов Н.Н. /мл./, Фам Ле Киен, Шумовский А.С. В сб.: II Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики. ОИЯИ, Д17-81-758, Дубна, 1981.
9. Боголюбов Н.Н. /мл./, Фам Ле Киен, Шумовский А.С. ТМФ, 1982, 52, с.423; ОИЯИ, Р17-81-465, Дубна, 1981.
10. Боголюбов Н.Н. ОИЯИ, Е17-11822, Дубна, 1978.
11. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. /мл./. ЭЧАЯ, 1980, 11, с.245.
12. Резонансные взаимодействия света с веществом. "Наука", М., 1977.
13. Соломатин В.С., Мелешко А.Н., Красников В.В. Квантовая электроника, 1979, 6, с.1326,1528.
14. Ахметели А.М., Мелешко А.Н., Шумовский А.С. ДАН СССР, 1981, 256, с.1094.
15. Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. "Мир", М., 1978.
16. Shen Y.R. Phys.Rev., 1967, 155, p.921.
17. Oka T., Shimizu T. Phys.Rev., 1970, A2, p.587.
18. Walls D.F. J.Phys.A, 1971, 4, p.813.
19. McNeil K.J., Walls D.F. J.Phys.A, 1975, 8, p.104,111.
20. Thompson B.V. J.Phys.A, 1975, 8, p.126.
21. Thompson B.V. J.Phys.C, 1970, 3, p.L147.
22. Боголюбов Н.Н./мл./, Фам Ле Киен, Шумовский А.С. ОИЯИ, Р17-83-648, Дубна, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 октября 1983 года.

Боголюбов Н.Н. /мл./, Фам Ле Киен, Шумовский А.С. Р2-83-713

Динамика многофотонных процессов в двухуровневых системах

Получено обобщенное кинетическое уравнение, описывающее двухфотонные процессы в макроскопической двухуровневой системе. Исследована возможность испускания и поглощения фотонов. Указаны условия перехода к сверхизлучательной генерации.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Bogolubov N.N. (Jr.), Fam Le Kien, Shumovsky A.S. P2-83-713

Dynamics of Multiphoton Processes in Two-Level Systems

The generalized kinetic equation for two-photon processes in the macroscopic two-level system is obtained. The possibility of emission and adsorbtion is examined. The conditions of superradiant generation are shown.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод авторов