9/I-84

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

2 16/84

Р2-83-708

Г.В.Ефимов, А.Д.Рябцев*

# ОБ УСЛОВИИ СВЯЗНОСТИ В ДВУХПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ В НЕЛОКАЛЬНОЙ МОДЕЛИ КВАРКОВ

*Ростовский государственный университет

1983

## I. Введение

Учет двухпетлевого приближения в нелокальной модели кварков (НМК)[I] представляет значительный интерес.

Во-первых, процессы, нарушающие правило Цвейга [2], в рамках НМК уже в первом неисчезающем приближении описываются двухпетлевыми диаграммами. Например, распад $\varphi$ -мезона на три пиона возможен за счет обмена виртуальным $K$ -мезоном, как показано на рис. I.

Во-вторых, для процессов, не нарушающих правила Цвейга, представляет интерес выяснить, насколько физически адекватным является учет высших приближений, ухудшает или улучшает он согласие с экспериментом.

Настоящая работа посвящена начальному этапу исследования двухпетлевого приближения в НМК, именно, формулировке условия связности на двухпетлевом уровне и применению его в простой модельной ситуации, когда пропагатор кварка-виртона есть гауссовская экспонента. Случай гауссовских пропагаторов, простой в техническом отношении, позволяет, тем не менее, сделать качественные заключения о поведении амплитуд при переходе от одно- к двухпетлевому приближению. Мы получили, что для двухчастичных распадов мезонов, классифицируемых по группе $SU(N)$, в реалистическом случае $N = 3$ двухпетлевое приближение с двухпетлевым условием связности отличается от однопетлевого приближения с однопетлевым условием связности не более чем на 25 % для всех процессов за исключением одного. Для распада с участием только синглетных мезонов отличие больше: 85%. Мы рассматриваем этот результат как подтверждение разумности предположений, сделанных при формулировке условия связности на двухпетлевом уровне и как указание на применимость двухпетлевого приближения для описания реальных адронов ( с возможным переопределением параметров модели).

## 2. Условие связности

Рассмотрение двухпетлевых диаграмм в амплитудах распадов требует учета двухпетлевого приближения и в условии связности.

В работе [3] на основе анализа уравнений Дайсона получено условие связности в виде $Z_3 = 0$ . Для практических вычислений следует еще конкретизировать выбор приближения для $Z_3$ . Иными словами, учет условия связности в том или ином приближении - это суммирование некоторого бесконечного подкласса диаграмм ряда теории возмущений. Выбор приближения для $Z_3$ и есть конкретизация этого подкласса.

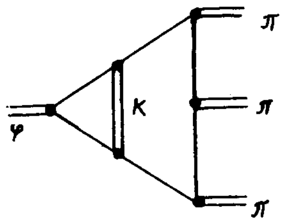


Рис.I

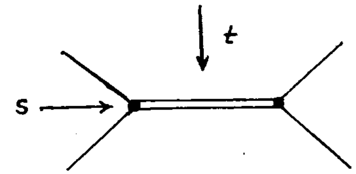


Рис.2

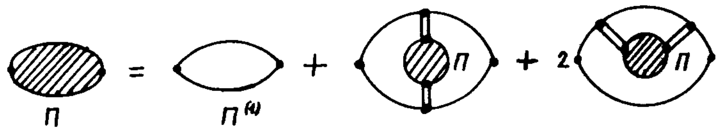


Рис.3

Рассмотрим лагранжиан Юкавы

$$\mathcal{L}_Y = G_0 (\bar{\psi}\psi)\varphi\,, \tag{I}$$

где $G_0$ – голая константа связи. Голая масса бозона – $m_0$, физическая – $m$. Рассмотрим амплитуду рассеяния фермиона и антифермиона вблизи порога рождения бозона. В указанной кинематической области основной вклад дает аннигиляционная диаграмма рис. 2. Мы пренебрегаем одеванием вершины и рассматриваем только радиационные поправки к пропагатору бозона. Пусть $M(s,t)$ – амплитуда рассеяния. Определим ренормированную константу связи $G_R$ соотношением

$$M(s,t) \xrightarrow[\substack{s \to m^2 \\ t \to 0}]{} \frac{G_R^2}{m^2 - s}\,. \tag{2}$$

При пренебрежении одеванием вершины

$$M(s,t) = G_0^2 \mathcal{D}(s)\,, \tag{3}$$

где $\mathcal{D}(s)$ – точный пропагатор бозона.
Константа перенормировки волновой функции бозона определяется как

$$Z_3 = \lim_{s \to m^2} (m^2 - s)\mathcal{D}(s)\,. \tag{4}$$

Из (2), (3) и (4) следует

$$G_R^2 = Z_3 G_0^2\,. \tag{5}$$

В отличие от определения $G_R$ в /3/ мы можем не рассматривать перенормировку вершинной части, так как в НМК нам не понадобится контрчлен для вычитания расходимости из подграфа в выражении для $\mathcal{D}(s)$.



Из (4) и уравнения Дайсона для функции Грина следует выражение для $Z_3$ :

$$Z_3^{-1} = 1 - G_0^2\, \Pi'(m^2), \tag{6}$$

где $\Pi(s)$ – поляризационный оператор. В двухпетлевом приближении $\Pi(s)$ удовлетворяет уравнению, графически показанному на рис. 3. Это уравнение можно символически записать как

$$\Pi(s) = \Pi^{(1)}(s) + G_0^2 \sum_i \iint \frac{d^4k\, d^4q}{[(2\pi)^4 i]^2} (-)c_i\, Sp(SSSS) \frac{1}{m_0^2 - q^2 + G_0^2 \Pi(q^2) - i\varepsilon}, \tag{7}$$

где суммирование ведется по всем двухпетлевым диаграммам и промежуточным состояниям. Константы $c_i$ и $Sp(SSSS)$ , различные для разных диаграмм, нас пока не интересуют. В терминах ренормированных величин (7) можно переписать в виде

$$\Pi(s) = \Pi^{(1)}(s) + G_R^2 \sum_i \iint \frac{d^4k\, d^4q}{[(2\pi)^4 i]^2} (-)c_i\, Sp(SSSS) \frac{1}{m^2 - q^2 + G_R^2 \Pi_c(q^2) - i\varepsilon}\,, \tag{7a}$$

где

$$\Pi_c(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(m^2) - (q^2 - m^2)\,\Pi'(m^2)\,. \tag{8}$$

Приближенное решение (7а) получим, подставив в правую часть поляризационный оператор в однопетлевом приближении $\Pi^{(1)}(q^2)$ :

$$\Pi^{(2)}(s) = \Pi^{(1)}(s) + G_R^2 \sum_i \iint \frac{d^4k\, d^4q}{[(2\pi)^4 i]^2} (-)c_i\, Sp(SSSS) \frac{1}{m^2 - q^2 + G_R^2 \Pi_c^{(1)}(q^2) - i\varepsilon}\,. \tag{9}$$

Комбинируя (5), (6) и (9), получаем окончательный результат – выражение для $Z_3$ на двухпетлевом уровне через ренормированные величины:

$$Z_3 = 1 + \frac{d}{ds} G_R^2 \left\{ \Pi^{(1)}(s) + \sum_i G_R^2 \iint \frac{d^4k\, d^4q}{[(2\pi)^4 i]^2} (-)c_i \frac{Sp(SSSS)}{m^2 - q^2 + G_R^2 \Pi_c^{(1)}(q^2)} \right\} \Bigg|_{s=m^2}. \tag{I0}$$

Условие связности

$$Z_3 = 0\,. \tag{II}$$

Рассматриваемое приближение эквивалентно суммированию одно- и двухпетлевых вставок в функцию Грина бозона. При этом на внутренних бозонных линиях предполагаются просуммированными все однопетлевые вставки. Отметим, что если условию связности на однопетлевом уровне легко дать интерпретацию в терминах уравнения Бете-Солпитера /4/, то в случае условия (I0)-(II) этого сделать не удается.

## 3. Применение к нелокальной модели кварков

Исследуем, как работает сформулированное в п.2 условие связности в НМК в модельном случае, когда пропагатор кварка-виртона – гауссовская экспонента.

Рассмотрим два $N^2$ – плета бозонов, классифицируемых по группе $SU(N)$. Лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$L_{int} = \sum_k \left( g_{AK} \bar{q}_i \lambda^a_{ij} \Gamma_k q_j \varphi^a_{AK} + g_{SK} \bar{q}_i \lambda^s_{ij} \Gamma_k q_j \varphi_{SK} \right), \tag{I2}$$

где $k = 1, 2$ – номер мультиплета, $\varphi^a_{Ak}$ – $(N^2-1)$ – плеты, $\varphi_{SK}$ – синглеты. Нормировка генераторов $Sp\, \lambda^a \lambda^b = \delta^{ab}$. Вырождение по массам внутри каждого из $N^2$ – плетов считаем полным и $m_2 > 2m_1$, так что возможны двухчастичные распады.

Пропагатор кварка-виртона выбираем в виде

$$S_{ik}(p) = \frac{1}{i} \delta_{ik} L \exp\left(\frac{p^2 L^2}{4}\right). \tag{I3}$$

В дальнейшем считаем, что обезразмеренные массы $\mu_i = \frac{m_i L}{2} \ll 1$. Кроме того, игнорируем лоренцевы структуры, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$. Тогда

$$g_{A1} = g_{A2} = g_A ,$$
$$g_{S1} = g_{S2} = g_S . \tag{I4}$$

Выведем также параметр разложения $\lambda = g^2/16\pi^2$ и константу связи, нормированную на однопетлевое приближение, $\alpha = \lambda/\lambda^{(1)}$, где $\lambda^{(1)}$, одна и та же для всех частиц, вычисляется из условия связности в однопетлевом приближении и равна

$$\lambda^{(1)} = \frac{1}{2n_c} , \tag{I5}$$

где $n_c$ – число цветов кварков.
Суммирование по цветам и промежуточным состояниям дает числовые коэффициенты в (I0). Для гауссовских пропагаторов $g^2 \Pi_c^{(1)}(q^2)$ имеет вид

$$g^2 \Pi_c^{(1)}(q^2) = -\left(\frac{2}{L}\right)^2 \cdot 2n_c \cdot \lambda \cdot \left[ 2\cdot\left(e^{\frac{q^2}{2}} - 1\right) - q^2 \right] . \tag{I6}$$

Из-за простого вида пропагаторов часть интегрирований в (I0) можно выполнить, и в результате для констант перенормировки имеем

$$Z_A = 1 - \alpha_A - \alpha_A \frac{32}{n_c N} \left[ \alpha_A \left(-I_1(\alpha_A) + \frac{3}{2}(N^2-1) I_2(\alpha_A)\right) + \right.$$
$$\left. + \alpha_S \left(I_1(\alpha_S) + \frac{3}{2} I_2(\alpha_S)\right)\right] ,$$



$$Z_S = 1 - \alpha_S - \alpha_S \frac{32}{n_c N} \left[ \alpha_A (N^2-1) \left(I_1(\alpha_A) + \frac{3}{2} I_2(\alpha_A)\right) + \right.$$
$$\left. + \alpha_S \left(I_1(\alpha_S) + \frac{3}{2} I_2(\alpha_S)\right)\right] . \tag{I7}$$

Здесь

$$I_1(\alpha) = \frac{1}{8} \int_0^\infty dq\, q^3 e^{-q^2} \mathcal{D}(q^2, \alpha),$$
$$I_2(\alpha) = \frac{1}{8} \int_0^\infty dq\, q^3 e^{-\frac{3}{4}q^2} \mathcal{D}(q^2, \alpha), \tag{I8}$$

где

$$\mathcal{D}(q^2, \alpha) = \left[ (1-\alpha) q^2 + 2\alpha \left(1 - e^{-q^2/2}\right) \right]^{-1} \tag{I9}$$

обезразмеренный одетый в первом приближении пропагатор бозона в евклидовой метрике.

Условие связности имеет вид

$$Z_A = 0 ,$$
$$Z_S = 0 . \tag{20}$$

При $N = 3$, $n_c = 3$ приближенное решение (20) запишется в виде:

$$\alpha_A = 0,38 ,$$
$$\alpha_S = 0,29 . \tag{21}$$

Как видим, учет двухпетлевых диаграмм уменьшает константу связи более чем вдвое. Таким образом, в НМК вклад диаграмм старших порядков в амплитуду физического процесса необходимо оценивать вместе с учетом в соответствующем порядке условия связности. Поэтому малость константы связи, вычисленной в некотором заданном, например, однопетлевом приближении, не является, вообще говоря, обязательным условием применимости этого приближения. Иными словами, в НМК нет теории возмущений в обычном смысле, как разложения по степеням малого параметра, а есть схема сильной связи, основанная на согласованном рассмотрении амплитуд распада и бесконечных подклассов диаграмм в условии связности.

Рассмотрим также приближенные решения (20) в предельных случаях.

I) Количество частиц неограниченно растет, $N \to \infty$, $n_c = 3$. Удерживаем только ведущие члены

$$Z_A = 1 - \alpha_A^2 \cdot N,$$
$$Z_S = 1 - \alpha_A \cdot \alpha_S \cdot \frac{23}{12} \cdot N . \tag{20$^{I}$}$$

Решение имеет вид

$$\alpha_A = \frac{1}{\sqrt{N}},$$
$$\alpha_S = \frac{12}{23} \frac{1}{\sqrt{N}} . \tag{22}$$

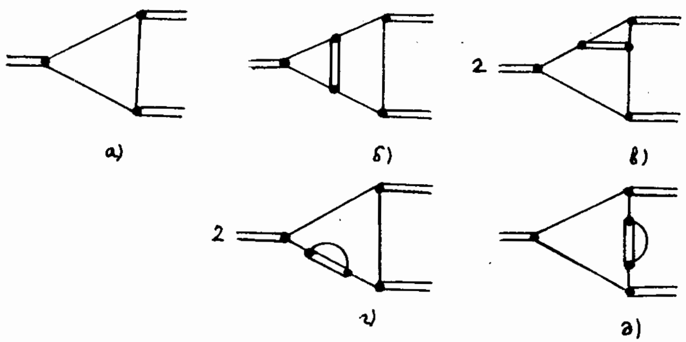


Рис.4

Таким образом, константа связи неограниченно убывает при увеличении размера группы.

2) Размер группы не меняется, число цветов $n_c \to \infty$. В этом случае в (20) исчезают члены, соответствующие двухпетлевым диаграммам, и в точности воспроизводится однопетлевой результат:

$$\alpha_S = \alpha_A = 1 . \tag{23}$$

Обратимся к рассмотрению амплитуд распадов, которые описываются суммой диаграмм рис. 4. Пусть $S$ означает синглет, $A$-$(N^2-1)$-плет. Возможны 4 варианта распада:

$$A \to 2A, \quad S \to 2A, \quad A \to SA, \quad S \to 2S .$$

В приближении $\mu = 0$ третья и вторая амплитуды совпадают, поэтому третью в дальнейшем не рассматриваем.

Амплитуды имеют вид

$$\begin{aligned} T^{abc}_{A\to 2A} &= -\frac{2^7}{\sqrt{6}}\frac{1}{L}\,sp(\lambda^a\lambda^b\lambda^c)\sqrt{\alpha_A}\,\alpha_A\Big[\frac{\pi}{9}+\frac{12}{Nn_c}\big(-\alpha_A\mathcal{J}_1(\alpha_A)+\alpha_S\mathcal{J}_1(\alpha_S)+\\ &\qquad +(N^2-1)\alpha_A\mathcal{J}_2(\alpha_A)+\alpha_S\mathcal{J}_2(\alpha_S)\big)\Big],\\ T^{ab}_{S\to 2A} &= -\frac{2^7}{\sqrt{6}}\frac{1}{L}\frac{\delta^{ab}}{\sqrt{N}}\sqrt{\alpha_S}\,\alpha_A\Big[\frac{\pi}{9}+\frac{12}{Nn_c}\Big(\Big(\frac{N^2}{3}-1\Big)\alpha_A\mathcal{J}_1(\alpha_A)+\alpha_S\mathcal{J}_1(\alpha_S)+\\ &\qquad +(N^2-1)\,\alpha_A\mathcal{J}_2(\alpha_A)+\alpha_S\mathcal{J}_2(\alpha_S)\Big)\Big],\\ T_{S\to 2S} &= -\frac{2^7}{\sqrt{6}}\frac{1}{L}\frac{1}{N^{3/2}}\sqrt{\alpha_S}\,\alpha_S\Big[\frac{\pi}{9}+\frac{12}{n_c}\Big((N^2-1)\,\alpha_A\big(\mathcal{J}_1(\alpha_A)+\mathcal{J}_2(\alpha_A)\big),\\ &\qquad +\alpha_S\mathcal{J}_1(\alpha_S)+\alpha_S\mathcal{J}_2(\alpha_S)\Big)\Big], \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\mathcal{J}_1(\alpha) = \frac{2\pi}{25}\int_0^\infty dq\, q^3\, \mathcal{D}(q^2,\alpha)\, e^{-\frac{6}{5}q^2},$$

$$\mathcal{J}_2(\alpha) = \frac{2\pi}{25}\int_0^\infty dq\, q^3\, \mathcal{D}(q^2,\alpha)\, e^{-\frac{4}{5}q^2} .$$



Таблица

| | $N=3,\ n_c=3$ | $N\to\infty,\ n_c=3$ | $N=3,\ n_c\to\infty$ |
|---|---|---|---|
| $A\to 2A$ | 0,45 | $\frac{9}{5}\frac{1}{N^{1/4}}$ | 1 |
| $S\to 2A$ | 0,76 | $\frac{11}{5}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{23}}\frac{1}{N^{1/4}}$ | 1 |
| $S\to 2S$ | 1,86 | $\frac{72\sqrt{3}}{23\sqrt{23}}N^{3/2}$ | 1 |

Первый член в прямых скобках, одинаковый во всех трех случаях, соответствует вкладу диаграммы рис. 4а. Амплитуды в однопетлевом приближении получим, оставив только этот член и положив $\alpha_A = \alpha_S = 1$. Амплитуды в двухпетлевом приближении найдем, используя вычисленные выше значения $\alpha_A$ и $\alpha_S$.

В таблице I приведены отношения амплитуд двухпетлевого и амплитудам однопетлевого приближения для различных $n_c$ и $N$, причем в предельных случаях оставлены только ведущие члены. В практически важном случае $n_c = 3$, $N = 3$ отличие двухпетлевого приближения от однопетлевого для большинства процессов ( для тех, в которых участвуют несинглетные частицы) не превышает 25 %. Это указывает на разумность сделанных предположений и позволяет надеяться на возможность успешного применения двухпетлевого приближения для описания реальных адронов.

## Литература


I. Ефимов Г.В., Иванов М.А. ЭЧАЯ, 1981, т.12, с.1220.
2. Okubo S. Phys.Rev., 1977, D16, p.2336.
3. Lurie D., Macfarlane A.J. Phys.Rev., 1964, 136, p. B816.
4. Güttinger W. Nuovo Cimento, 1965, 36, p.968.


Рукопись поступила в издательский отдел
13 октября 1983 года

Ефимов Г.В., Рябцев А.Д. Р2-83-708
Об условии связности в двухпетлевом приближении в нелокальной модели кварков


Условие связности $Z_3 = 0$ для бозе-частицы формулируется в явном виде на двухпетлевом уровне. Полученное условие применяется в нелокальной модели кварков для описания амплитуд двухчастичных распадов в модельном случае, когда пропагатор кварка - гауссовская экспонента. Рассмотрены распады мезонов, классифицируемых по группе SU(N) при числе цветов кварков $n_c$. В реалистическом случае $N = 3$, $n_c = 3$ отличие амплитуд двухпетлевого от амплитуд однопетлевого приближения для большинства процессов не превышает 25%. Делается вывод о возможности применения двухпетлевого приближения для описания реальных процессов. Рассмотрены также асимптотики $N \to \infty$ и $n_c \to \infty$. В последнем случае двухпетлевые диаграммы не дают вклада в асимптотику.


Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.


Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983


Efimov G.V., Ryabtsev A.D. P2-83-708
About Compositness Condition in Two-Loop Approximation in the Nonlocal Quark Model


The compositness condition $Z_3 = 0$ is given in an explicit form on the two-loop level. The condition is applied to nonlocal quark model in illustrative case, quark propagator being Gaussian exponent. Meson decays are considered, flavour group being SU(N) and a number of quark colours $n_c$. The differences between two loop and one loop amplitudes are no more than 25% for most of the processes, when the values of parameters are realistic, $N = 3$, $n_c = 3$. It is concluded that the application of the two loop approximation for describing real processes is possible. Asymptotics $N \to \infty$ and $n_c \to \infty$ are considered as well. In the latter case it is found that the two loop digrams do not contribute into asympotics.


The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.


Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой