ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2-83-649

П.П.Физиев

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ГАМИЛЬТОНИАН С КВАДРАТНЫМ КОРНЕМ В ФОРМАЛИЗМЕ ИНТЕГРАЛА ПО ПУТЯМ

Направлено в журнал
"Теоретическая и математическая физика"

1983

1. В настоящей работе мы рассмотрим некоторые методические вопросы релятивистской квантовой механики, которые связаны с квантованием классического гамильтониана релятивистской заряженной частицы с массой покоя m, находящейся во внешних полях: в электромагнитном $A_\mu(\vec r, t)$ $/ \mu = 0,1,2,3/$, и в скалярном $V(\vec r, t)$:

$$H = \sqrt{c^2(\vec p - \vec A)^2 + (mc^2 + V)^2} + A_0. \qquad /1.1/$$

Для этого имеются основания разного вида:

1. Все еще продолжаются попытки строить релятивистскую квантовую механику без квадрирования квадратного корня в /1.1/ /см. напр.[1] и приведенные там ссылки/.

2. Для нас более весомой причиной было желание вычислить соответствующий негауссовский интеграл по путям для квантовой амплитуды перехода[2–10]

$$G(q'', t''; q', t') = \langle q''| T\exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} \hat H\, dt\Big)|q'\rangle, \qquad /1.2/$$

который можно записать как в лагранжевом виде

$$G = \int \mathfrak{D}(q(t)) \exp\Big[\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} L(\dot q, q, t)\Big]\, \delta(q'' - q(t''))\, \delta(q' - q(t')), \qquad /1.3/$$

так и в гамильтоновом виде:

$$G = \int \mathfrak{D}(p(t), q(t)) \exp\Big[\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} (p dq - H dt)\Big]\, \delta(q'' - q(t''))\, \delta(q' - q(t')). \qquad /1.4/$$

В /1.3/ лагранжиан имеет вид:

$$L = -(mc^2 + V)\sqrt{1 - \vec C^2/c^2} + \vec A \cdot \vec C + A_0. \qquad /1.5/$$

Видно, что интеграл /1.3/ негауссов, даже если $A_\mu = 0$, $V = 0$, в результате чего его нельзя вычислить прямым способом. Предлагались обходные пути вычисления[7,11–14], которые предполагают переход к четырехмерному явно ковариантному формализму /в рамках теории со связями[8–10] /. Они эквивалентны процедуре квадрирования[3–6] и приводят к функции Грина G уравнения Клейна-Гордана.

В свободном случае можно выписать формальный ответ для интеграла по путям /1.4/, используя процедуру из[10] для зависящего только от импульсов гамильтониана $H = \sqrt{c^2\vec p^2 + m^2c^4}$ /см. напр.[15], где неправильно утверждается, что таким образом получается пропагатор уравнения Клейна-Гордана/. Такой ответ является существенно неполным и приводит к затруднениям при интерпретации.

Имеются еще два менее формальных основания изучать /1.1/:

3. Квадратичный корень возникает в задаче о релятивистской струне, для которой не построено последовательного квантования соответствующего гамильтониана[16]. Опыт работы с гамильтонианом /1.1/ может оказаться полезным и в задаче о струне.

4. Гамильтониан /1.1/ интересен и для исследования соотношений между релятивистскими и нерелятивистскими задачами как на классическом, так и на квантовом уровнях. Известно, например, что /1.1/ имеет нерелятивистский предел /при $c \to \infty$ /

$$H_{\text{нер}} = \frac{1}{2m}(\vec p - \vec A)^2 + V + A_0. \qquad /1.6/$$

Такой же предел и у гамильтониана

$$H_1 = \sqrt{c^2(\vec p - \vec A)^2 + m^2c^4 + 2mc^2 V} + A_0, \qquad /1.7/$$

который также применяется, например, в кварковых моделях /см.[17,18] и ссылки в них/.

Видно, что задача о релятивизации нерелятивистских систем неоднозначна. Можно ставить более скромную задачу: зная решение задачи с гамильтонианом типа /1.6/, получить решение задачи с гамильтонианом /1.1/. Легко сообразить, что если

$$p = p_{extr}(t; p_0, q_0, t_0), \qquad /1.8/$$
$$q = q_{extr}(t; p_0, q_0, t_0)$$

есть функции t, которые задают решение задачи с $H_{\text{нер}}$ /1.6/ при начальных условиях p_0, q_0, t_0, то в случае чисто магнитного стационарного поля: $\partial_t \vec A = 0$, $A_0 = 0$, $V = 0$; соответствующие решения задачи с H – /1.1/ получаются простой подстановкой на место t в функциях /1.8/ собственного времени

$$\tau = \tau(t; p_0, q_0, t_0) = \frac{mc^2}{H}(t - t_0) + t_0. \qquad /1.9/$$

При $V \neq 0$, $\partial_t V = 0$ такая процедура проходит, если /1.8/ задают решение задачи с гамильтонианом

$$\bar{H} = H_{\text{нер.}} + \frac{V^2}{2mc^2}. \qquad /1.10/$$

При $V \neq 0$, $\vec{A} \neq 0$, $A_0 = 0$, $\partial_t V = 0$, $\partial_t \vec{A} = 0$ можно получать решения задачи с H_1 - /1.7/ прямо из решений задачи с $H_{\text{нер}}$.подстановкой $t \to \tau$, меняя в /1.9/ H на H_1.

Эти результаты являются проявлением следующего общего утверждения:

Если не зависящие от времени гамильтонианы $H(p,q)$ и $\bar{H}(p,q)$ связаны соотношением

$$H = f(\bar{H}), \qquad /1.11/$$

то решения уравнений Гамильтона с H можно получить из экстремалей задачи с $\bar{H}$ подстановкой $t \to \tau = f'(\bar{H})(t - t_0) + t_0$, где f' - производная функции f.

Действительно, значение любой функции $F(p,q)$ на экстремалях /1.8/ можно получить как решение уравнения

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] = X_H F$$

при начальном условии $F_0 = F(p_0, q_0)$ в случае произвольного $H(p,q,t)$ по формуле

$$F(p_{extr}, q_{extr}) = T\exp\left(\int_{t_0}^{t} X_H^0(t')\right) F(p_0, q_0), \qquad /1.12/$$

где $X_H = \partial_p H \partial_q - \partial_q H \partial_p$ есть оператор первого порядка /гамильтоновское векторное поле /19,20/, а X_H^0 - этот оператор в переменных p_0, q_0. Если скобка Пуассона

$$[H(p,q,t_1),\ H(p,q,t_2)] = 0 \qquad /1.13/$$

для любых t_1, t_2, то операторы $X_H(t)$ в разные моменты времени коммутируют, и в /1.12/ можно заменить $T\exp$ на обычную экспоненту. Это имеет место, в частности, при $\partial_t H = 0$, когда /1.12/ приобретает максимально простой вид /20/:

$$F = \exp\left((t - t_0) X_H^0\right) F(p_0, q_0). \qquad /1.14/$$

При наличии связи /1.11/ получаем

$$X_H = f'(\bar{H}) X_{\bar{H}}, \qquad /1.15/$$

и так как при $\partial_t \bar{H} = 0$ $f'(\bar{H})$ есть константа движения, ее можно включить в общий множитель $f'(\bar{H})(t - t_0)$ перед $X_{\bar{H}}$ в /1.14/.

В общем случае $A_0 \neq 0$ связь типа /1.11/ можно получить, переводя потенциал A_0 под знак корня при помощи калибровочного преобразования

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \int^{t} dt' A_0(\vec{r}, t'). \qquad /1.16/$$

В результате получим электромагнитное поле в калибровке Гамильтона:

$$A'_0 = 0, \quad \vec{A}' = \vec{A} - \nabla \int^{t} dt' A_0(\vec{r}, t'), \qquad /1.17/$$

а для гамильтониана /1.1/ имеем соотношение типа /1.11/:

$$H' = \sqrt{2mc^2 \bar{H}' + m^2 c^4}, \qquad /1.18/$$

где $\bar{H}'$ задается формулой /1.10/ в калибровке /1.17/. То же самое соотношение получается и для H'_1 из /1.17/, если на место $\bar{H}'$ в /1.18/ подставить $H'_{\text{нер.}}$ из /1.6/.

В калибровке /1.17/ остается калибровочный произвол: к $\vec{A}'$ можно добавлять ∇a, где $a = a(\vec{r})$ не зависит от времени t.

Связь /1.18/ имеет место при $A_0 = 0$, что приводит к перечисленным выше результатам, если $\partial_t \vec{A} = 0$ и $\partial_t V = 0$.

При $A_0 \neq 0$ /даже если $\partial_t A_0 = 0$/, а также в нестационарных полях A_μ, V гамильтонианы H', H, $\bar{H}'$ и $H'_{\text{нер.}}$ зависят явно от t, причем /1.13/, вообще говоря, не соблюдается. Тогда простая связь между соответствующими экстремалями теряется из-за наличия $T\exp$ в /1.12/, а также из-за несохранения гамильтонианов. Несмотря на это, ясно, что при "релятивизации" гамильтонианов $\bar{H}'$ и $H'_{\text{нер.}}$ локально экстремали только деформируются. Это можно описать, заменяя H'_1 в каждой компоненте векторов $\vec{p}'_{extr}(t)$, $\vec{q}'_{extr}(t)$ на свою функцию $\tau_i^{(p,q)}(t; p_0, q_0, t_0)$, $i = 1,2,3$. Для этих функций получаем систему уравнений

$$\dot{\tau}_i^p \partial_{q_i} \bar{H}'[\bar{p}'_{extr}(\tau_i^p), \bar{q}'_{extr}(\tau_i^p), \tau_i^p] = f'[\bar{H}'(\bar{p}', \bar{q}', t)\, \partial_{q_i} \bar{H}'(\bar{p}', \bar{q}', t)$$

$$\dot{\tau}_i^q \partial_{p_i} \bar{H}'[\bar{p}'_{extr}(\tau_i^q), \bar{q}'_{extr}(\tau_i^q), \tau_i^q] = f'[H'(\bar{p}', \bar{q}', t)]\, \partial_{p_i} H'(\bar{p}', \bar{q}', t)$$

при начальных условиях $\tau_i^{(p,q)}(t_0; p_0, q_0, t_0) = t_0$, $i = 1,2,3$.

В этих уравнениях $\bar{p}'_{extr}(t)$, $\bar{q}'_{extr}(t)$ являются экстремалями задачи с $\bar{H}'$, а в правой стороне $\bar{p}'_k = \bar{p}'_{extr_k}(\tau_k^p)$, $\bar{q}'_k = \bar{q}'_{extr_k}(\tau_k^q)$ - те же самые функции, но от других аргументов. Исследование этой системы уравнений представляет как практический, так и принципиальный интерес. Оно объяснило бы, почему удается решать одни и те же физические задачи /задача Кеплера, эффекты Штарка и Зеемана и т.д., см. напр., /21/, и приведенные там ссылки/ как в нерелятивистском, так и в релятивистском вариантах. Такой анализ траекторий интересен для вычисления интегралов по путям /1.3/ и /1.4/, а также позволяет взглянуть по-новому на общую проблему релятивизации взаимодействий.

Установление аналогичных связей между квантовыми задачами требует соответствующего квантования гамильтонианов /1.1/, /1.6/, /1.7/ и /1.10/. Оно усложняется неоднозначностями задачи квантования.

2. Мы будем вычислять интеграл по путям /1.4/ при помощи нового способа конечномерных аппроксимаций, предполагая, что этот интеграл определяется как предел [2,5,7,10] /см. также ссылки в [15,22,23]:

$$\hat{G}_{t''t'} = \lim_{N\to\infty} \hat{\mathcal{G}}_{t''t_N} \hat{\mathcal{G}}_{t_N t_{N-1}} \dots \hat{\mathcal{G}}_{t_1 t'} \qquad /2.1/$$

Здесь $\hat{G}_{t''t'}$ есть интегральный оператор на пространстве квантовых состояний с ядром /1.2/, а $\mathcal{G}_{t''t'}$ - такой же оператор, ядро которого задает амплитуду перехода для малых времен $\Delta t = t'' - t'$, вычисляемую обычно по формуле

$$\mathcal{G}(q'', t''; q', t') = \theta(\Delta t) \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\Delta\vec{q} - H^*\Delta t)\right]. \qquad /2.2/$$

Стандартное оправдание /2.2/ - конечномерные аппроксимации классического действия при помощи его вычисления /приближенного/ на полигональных путях в фазовом пространстве $M^{(6)}_{\vec{p}\vec{q}}$ частицы. Такие пути задают при помощи кусков

$$\vec{p}_\alpha(t) = \vec{p}_\alpha = \text{const}, \qquad /2.3/$$

$$\vec{q}_\alpha(t) = \vec{q}_{\alpha-1} + \frac{\Delta\vec{q}_\alpha}{\Delta t_\alpha}(t - t_{\alpha-1}), \qquad \alpha = 1,\dots,N;$$

на каждом интервале разбиения $t' < t_1 < \dots t_N < t''$.

В качестве H^* принимаются разные выражения, но чаще всего применяется "правило средней точки":

$$H^* = H\left(\vec{p}, \frac{\vec{q}'' + \vec{q}'}{2}\right). \qquad /2.4/$$

В /2.2/ $\theta(\Delta t)$ есть функция Хевисайда, учитывающая причинность.

Известно [22], что результат для интеграла по путям зависит от выбора конечномерной аппроксимации, и что это эквивалентно неопределенности задачи квантования классических систем. Например, /2.3/ и /2.4/ приводят к вейлевскому квантованию [15,22]. Обычно утверждается, что описанным способом проводится суммирование по всем траекториям на фазовом пространстве, но ответ зависит от выбора конечномерной аппроксимации.

В [23] было показано, что процедура конечномерных аппроксимаций интегралов по путям неявно предполагает некий выбор подмножества путей, по которому в действительности проводится суммирование. В справедливости этого утверждения можно убедиться путем анализа свойств классического действия [23-25]. Решающим обстоятельством оказывается существование бесконечного множества траекторий с одинаковым классическим действием, которые лежат на поверхностях Майера [26] в пространстве состояний $M^{(7)}_{\vec{p}\vec{q}t}$ механической частицы. Было показано [23], что при вычислении квантовой амплитуды перехода за малые Δt ($\mathcal{G}_{t''t'}$, следует учитывать только один путь на соответствующей поверхности Майера $M^{(4)}_{P_t}(Q)$ /в предположении, что она просто связана/. Ориентируемые поверхности Майера можно задавать как 4-мерные поверхности уровня полной инволютивной системы из трех первых интегралов в $\vec{Q}(\vec{p}, \vec{q}, t)$ рассматриваемой системы с гамильтонианом $H(\vec{p}, \vec{q}, t)$:

$$\vec{Q}(\vec{p}, \vec{q}, t) = \vec{C} = \text{const}, \quad [Q_i, Q_j] = 0: \qquad /2.5/$$
$$i,j = 1,2,3.$$

Учет только одного из бесконечного множества путей, соединяющих две точки на такой поверхности, аналогичен факторизации Фаддеева-Попова [8-10] в случае систем со связями, хотя в нашем случае нет никаких ограничений на движение частицы в $M^{(6)}_{\vec{p}\vec{q}}$. В результате факторизации оказывается, что при конечномерных аппроксимациях в интеграле по путям /1.4/ следует учитывать только ломаные траектории в $M^{(7)}_{\vec{p}\vec{q}t}$, куски которых лежат на поверхностях Майера заданного типа /2.5/.

Формула /2.2/ соответствует выбору $\vec{Q} = \vec{p}$. Эти функции являются первыми интегралами только, если $H = H(\vec{p})$. В случае первых интегралов общего вида $\vec{Q}(\vec{p}, \vec{q}, t)$ ее следует заменить [27] на формулу

$$\mathcal{G}_{t''t'} = \theta(\Delta t) \int d\mu_Q(\vec{C}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta\Phi_{\vec{Q}=\vec{C}}\right), \qquad /2.6/$$

которая описывает интерференцию слагаемых $\exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta\Phi_{\vec{Q}=\vec{C}}\right)$ от каждого слоя, возникающего, согласно /2.5/, при разных значениях констант $\vec{C}$ слоения Майера $\mathfrak{M}_Q$ пространства $M^{(7)}_{\vec{p}\vec{q}t}$.

Выбор $\vec{Q}(\vec{p}, \vec{q}, t)$ приводит к определенному виду действия $\Phi_Q(\vec{p}, \vec{q}, t; t_0)$ как функции на пространстве $M^{(7)}_{\vec{p}\vec{q}t}$ /24/. В /2.6/ $\Delta\Phi_{\vec{Q}=\vec{C}}$ есть приращение этого действия при движении из точки $(\vec{p}'', \vec{q}'', t'')$ в точку $(\vec{p}', \vec{q}', t')$, которые находятся на поверхности Майера /2.5/. Техника вычисления Φ_Q обсуждается в /24/. Приведем только формулу

$$d\Phi_Q = \vec{p}\cdot d\vec{q} - H\,dt - \vec{P}\cdot d\vec{Q}, \qquad /2.7/$$

при помощи которой можно найти Φ_Q по заданному полному набору канонически сопряженных первых интегралов $\vec{P}, \vec{Q}$.

В отличие от других способов конечномерных аппроксимаций интегралов по путям, зная Φ_Q, мы можем вычислить точно приращение действия на путях из выбранного класса в случае $H(\vec{p}, \vec{q}, t)$ общего вида:

$$\int_{t'}^{t''} (\vec{p}\cdot d\vec{q} - H\,dt)\Big|_{\vec{Q}=\vec{C}} = \Phi_Q(\vec{p}'', \vec{q}'', t''; t') - \Phi_Q(\vec{p}', \vec{q}', t'; t') = \Delta\Phi_{\vec{Q}=\vec{C}}.$$

Здесь переменные $\vec{p}'', \vec{q}'', t''$ и $\vec{p}', \vec{q}', t'$ связаны соотношениями /2.5/.

При вычислении результата интерференции Майера в /2.6/ проводится суммирование по слоям $\mathfrak{M}_Q$ с мерой

$$d\mu_Q(\vec{C}) = \frac{d^3\vec{C}}{(2\pi\hbar)^3} \left(\partial_{\vec{C}}\vec{p}''_Q\; \overline{\partial_{\vec{C}}\vec{p}'_Q}\right)^{1/2}, \qquad /2.8/$$

которая определяется однозначно геометрическими соображениями и требованиями инвариантности. В /2.8/ $\partial_{\vec{C}}\vec{p}_Q$ есть якобиан замены $\vec{C} \to \vec{p}_Q(\vec{q}, t; \vec{C})$, причем последние функции определяются неявным образом соотношениями /2.5/.

Некоторые аспекты такой процедуры конечномерных аппроксимаций интегралов по путям /1.4/ обсуждаются в /27/ на простейших примерах. Оказывается, что выбор слоения Майера при помощи /2.5/, с одной стороны, задает класс путей, по которому суммируется в /1.4/, а с другой стороны - равнозначен выбору квантования классической задачи.

Возникает заманчивая возможность попытаться вычислить негауссовские интегралы по путям за счет соответствующего выбора слоения $\mathfrak{M}_Q$. Если амплитуда перехода за малые Δt -/2.6/ удовлетворяет уравнению Смолуховского-Эйнштейна-Колмогорова-Маркова-Чепмена:

$$\hat{\mathfrak{G}}_{t''t}\,\hat{\mathfrak{G}}_{tt'} = \hat{\mathfrak{G}}_{t''t'}: \quad t' < t < t'', \qquad /2.9/$$

то вычисление предела /2.1/ становится тривиальным и дает

$$\hat{G}_{t''t'} = \hat{\mathfrak{G}}_{t''t'}. \qquad /2.10/$$

Как раз за счет этого свойства удается вычислять гауссовские интегралы по путям /2,7,10/. Возникает соблазн искать $\vec{Q}$ так, чтобы и в негауссовских случаях удовлетворить /2.9/ и /2.10/.

Мы продемонстрируем возможность такой идеи на простом примере гамильтониана /1.1/, в котором положим

$$A_0 = 0, \qquad \vec{A} = \nabla a(\vec{r}), \qquad V = 0. \qquad /2.11/$$

Хотя такая задача физически тривиальна /поле есть чистая калибровка/, ее нельзя решить при помощи аппроксимации /2.3/, /2.4/, так как H уже не является функцией только $\vec{p}$. Последовательное решение проясняет ряд вопросов вычисления /1.4/ в случае релятивистских гамильтонианов /1.1/. Необходимость в рассмотрении случая $a(\vec{r}) \neq \mathrm{const}$ видна из обсуждения этого гамильтониана в калибровке Гамильтона /1.17/.

3. Вычисляя /1.4/ при условиях /2.11/, прежде всего будем стараться обращаться аккуратно с возникающими математическими проблемами, что приведет и к правильной физической интерпретации результатов. Для начала отметим, что гамильтониан /1.1/ есть двузначная функция, которую следует рассматривать на соответствующей поверхности Римана. В результате пространство классических состояний становится двулистным.

$$M^{(7)}_{\vec{p}\vec{q}t} = R^{(7)(+)}_{\vec{p}\vec{q}t} \cup R^{(7)(-)}_{\vec{p}\vec{q}t}. \qquad /3.1/$$

Сохраняя арифметическое значение для квадратного корня, обозначим гамильтониан как функцию на пространстве /3.1/ посредством

$$\mathcal{H} = \{c^2[\vec{p} - \nabla a(\vec{r})]^2 + m^2c^2\}^{1/2} = \pm H. \qquad /3.2/$$

Следует заметить, что хотя правильная интерпретация двух знаков $\pm$ в /3.2/ давно известна /3-6/, все еще иногда говорят о состояниях с "отрицательными энергиями", что заведомо неправильно. Полезно заметить, что не только в релятивистской квантовой механике, но и в обычной нерелятивистской механике гамильтониан и энергия есть разные величины /28/, хотя их значения часто совпадают.

Слоение Майера $\mathfrak{M}_Q$ выберем, полагая

$$\vec{Q} = \vec{p} - \nabla a(\vec{r}) = \vec{k} = \mathrm{const}. \qquad /3.3/$$

Нетрудно видеть, что эти $\vec{Q}$ задают полный набор первых интегралов в инволюции для системы с гамильтонианом /3.2/. При помощи /2.7/ находим, что на соответствующих листах $M^{(7)}_{\vec{p}\vec{q}t}$

$$\Phi^{\pm}_{Q} = \vec{r}\cdot(\vec{p} - \nabla a) \mp H\,\Delta t + a(\vec{r}).$$

Тогда согласно /2.6/ и /2.8/ получаем

$$\mathcal{G}^{\pm}_{t''t'} = \theta(\Delta t)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta a\right)\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi\hbar)^3}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\vec{k}\cdot\Delta\vec{r} \pm \Delta t\sqrt{c^2\vec{k}^2 + m^2c^4}\right)\right] = \qquad /3.4/$$

$$= \theta(\Delta t)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta a\right)\frac{8im^2c^3\Delta t}{(2\pi\hbar)^2(\Delta\vec{r}^2 - c^2\Delta t^2)}\left[K_0\left(\pm\frac{mc}{\hbar}\sqrt{\Delta\vec{r}^2 - c^2\Delta t^2}\right) \pm 2\frac{\hbar}{mc}\frac{K_1\left(\pm\frac{mc}{\hbar}\sqrt{\Delta\vec{r}^2 - c^2\Delta t^2}\right)}{\sqrt{\Delta\vec{r}^2 - c^2\Delta t^2}}\right],$$

где $\Delta\vec{r} = \vec{r}'' - \vec{r}'$, $\Delta a = a(\vec{r}'') - a(\vec{r}')$, а K_0 и K_1 - модифицированные функции Бесселя.

Видно, что Δa появилось только в тривиальном фазовом множителе, как и следовало ожидать. Дальше положим $\Delta a = 0$.

Можно проверить, что функции $\mathcal{G}^{\pm}_{t''t'}$ задают операторы $\hat{\mathcal{G}}^{\pm}$, которые удовлетворяют /2.9/, откуда следует /2.10/, т.е. /3.4/ есть точный результат для интеграла по путям /1.4/.

Этот результат можно записать в явно ковариантном виде

$$G^{\pm} = \theta(x^0)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^3}\exp(-ipx)\,\delta\left(p^0 \mp \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\right), \qquad /3.5/$$

если ввести четырехмерные обозначения x: $x^0 = c\Delta t$, $\vec{x} = \Delta\vec{r}$; p: p^0, $\vec{p}$; $px = p^0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x}$ и положить $\hbar = 1$, $c = 1$.

На первый взгляд полученный результат выглядит странно:

1. Вместо одной мы получили две функции Грина, каждая из которых имеет свою особенность на соответствующем листе обобщенного фазового пространства $M^{(8)}_{\vec{p}\vec{q}p^0q^0}$.

2. Из /3.4/ видно, что любая из этих функций нарушает релятивистское условие причинности [1,3] на расстояниях порядка $\hbar/mc$.

3. Из /3.5/ легко получить, что

$$(\Box - m^2)\,G^{\pm} = -\left(i\partial_0 \pm \sqrt{-\Delta + m^2}\right)\delta(x),$$

т.е., вопреки ожиданиям, интеграл по путям /1.4/ с гамильтонианом /1.1/ не приводит к функции Грина уравнения Клейна-Гордана. Также легко проверить, что $G^{\pm}$ являются функциями Грина двух разных уравнений:

$$\left(i\partial_0 \mp \sqrt{-\Delta + m^2}\right)G^{\pm} = \delta(x). \qquad /3.6/$$

К правильному пониманию результата можно прийти, если вспомнить, что квантовые состояния можно описать волновыми функциями только локально, что было осознано четко в геометрическом квантовании [29,30]. В соответствии с двулистностью $M^{(7)}_{\vec{p}\vec{q}t}$ в нашем случае надо ввести две компоненты, т.е. задавать состояния квантовой задачи столбцами

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix}. \qquad /3.7/$$

В соответствии с этим функция Грина будет матричнозначной:

$$G = \begin{pmatrix} G^+ & 0 \\ 0 & G^- \end{pmatrix}. \qquad /3.8/$$

Из /3.6/ видно, что она удовлетворяет матричному уравнению

$$\left(i\sigma_0\partial_0 - \sqrt{-\Delta + m^2}\,\sigma_3\right)G = \sigma_0\,\delta(x), \qquad /3.9/$$

где σ_i - матрицы Паули. Для вектора состояния /3.7/ получаем уравнение

$$i\partial_0\Psi = \sqrt{-\Delta + m^2}\,\sigma_3\Psi = \hat{H}_{FV}\Psi. \qquad /3.10/$$

Становится очевидным, что мы получили уравнение обычного свободного скалярного поля в двухкомпонентном формализме Фешбаха-Вилларса [4,5]. Связь двухкомпонентного поля Ψ с более привычным полем Клейна-Гордана ϕ можно установить при помощи неунитарного преобразования типа преобразования Фолди-Ваутхайзена. Компоненты $\psi^{\pm}$ описывают соответственно частицу и античастицу, входящие в запутанном виде в ϕ. В случае свободных полей такое разделение ψ^+ от ψ^- -лоренц-инвариантно, но при наличии взаимодействия оно невозможно без нарушения релятивистской инвариантности. Возможно, это есть источник потери лоренц-инвариантности в задаче о релятивистской струне [16]. Ясно, что при квантовании без квадрирования корня там также следует строить двухкомпонентный формализм.

Напомним также, что квантовый гамильтониан Фешбаха - Вилларса $\hat{H}_{FV}$ эрмитов в пространстве Гильберта с индефинитной метрикой [4]:

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3\vec{r}\,(\Psi_1^+\sigma_3\Psi_2). \qquad /3.11/$$

Нормировка Ψ на ± 1 соответствует двум значениям заряда частиц, а их энергия всегда неотрицательна:

$$E = (\Psi, \hat{H}_{FW} \Psi) \geq 0. \qquad /3.12/$$

4. При наличии нетривиальных внешних полей возникают новые проблемы трех основных видов:

А. Общие для нерелятивистских и релятивистских задач:

1. В полях A_μ и V общего вида /2.5/ приводят к слоениям Майера сложной структуры. При подсчете $\mathcal{G}_{t'' t'}$ появляются как технические трудности, так и принципиальные усложнения.

2. Учет эффекта туннелирования требует комплексификации $M^{(7)}_{\vec{p}\vec{q}t}$. Надо учиться работать в $CM^{(7)}_{\vec{p}\vec{q}t}$.

Б. Специфические релятивистские трудности:

В первой части настоящей работы мы видели, что между классическими релятивистскими и нерелятивистскими движениями существует простая локальная связь. Однако в релятивистском случае из-за многозначности гамильтониана /1.1/ возникают дополнительные глобальные проблемы. Их удобно рассматривать в калибровке Гамильтона /1.17/, в которой видно, что в $CM^{(7)}_{\vec{p}\vec{q}t}$ возникает сложная релятивистская поверхность ветвления с уравнением

$$c^2(\vec{p} - \vec{A} - \nabla \int A_0 dt)^2 + (mc^2 + V)^2 = 0. \qquad /4.1/$$

Это усложнение структуры $CM^{(7)}_{\vec{p}\vec{q}t}$ требует внимательного анализа пространства квантовых состояний, а также методики вычисления интегралов по путям.

В. При поиске общего соответствия между квантовыми релятивистскими и нерелятивистскими задачами /см. выше/ надо квантовать согласованным образом H' и $\bar{H}'$, или H'_l и $H'_{\text{нер.}}$ Хотя суть такого требования не совсем понятна, можно заметить, что условие существования общего слоения Майера для двух гамильтонианов H и $\bar{H}$ есть [23]:

$$[\partial_t H - \partial_t \bar{H} + [H, \bar{H}], H - \bar{H}] = 0. \qquad /4.2/$$

Оно обеспечивает возможность вычислять интегралы по путям с H и с $\bar{H}$ на одном и том же классе путей, и в случае наличия связи /1.11/ приобретает вид

$$[\partial_t \bar{H}, \bar{H}] = 0. \qquad /4.3/$$

Ясно, что /4.3/, вообще говоря, не выполняется для $\bar{H}'$ или $H'_{\text{нер.}}$ в полях A_μ, V общего вида, и поэтому для согласования квантований надо квантовать H' и $\bar{H}'$ /или H' и $H'_{\text{нер.}}$/ по-разному. Условию /4.3/ легко удовлетворить в случае стационарных полей, если не переходить к калибровке Гамильтона.

Поставленные в последней части настоящей работы вопросы, очевидно, нуждаются в дальнейшем изучении.

В заключение автор выражает глубокую признательность Б.М.Барбашову за помощь, поддержку и многочисленные обсуждения работы, а также И.С.Златеву, И.Т.Тодорову, А.Д.Донкову, В.А.Мещерякову, П.Н.Боголюбову, Г.В.Ефимову, М.И.Широкову, В.В.Нестеренко и В.И.Иноземцеву за полезные советы и дискуссии на разных этапах выполнения работы.

Особенно приятно поблагодарить В.Н.Попова и В.С.Буслаева за обсуждение предлагаемого способа аппроксимаций интегралов по путям, а также Б.Костанта и А.А.Кириллова за пояснение некоторых возникающих при этом математических вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tepper L., Gill Preprint Fermilab Pub 82/60 THY, 1982.
2. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям, М., "Мир", 1968.
3. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1973.
4. Feshbach H., Villars F. Rev.Mod.Phys., 1958, 30, p. 24.
5. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. Физматгиз, М., 1960.
6. Бьеркен Д., Дрелл С. Релятивистская квантовая теория, т. 1, "Наука", М., 1978.
7. Feynman R. Phys.Rev., 1950, 80, p. 440; 1951, 84, p. 108.
8. Faddeev L.D., Popov V.N. Phys.Lett., 1967, 25B, p. 29.
9. Фаддеев Л.Д. ТМФ, 1969, 1, с. 3.
10. Попов В.Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. Атомиздат, М., 1967.
11. Morette C. Phys.Rev., 1951, 81, p. 848.
12. Bardacki K., Samuel. Phys.Rev., 1978, D18, p. 2.
13. Блохинцев Д.И., Барбашов Б.М. УФН, 1972, 106, с. 593.
14. Krausz F. Preprint Harvard Univ. HUTP 80-A-003, 1980.
15. Mizravi M., J. Math.Phys., 1975, 16, p. 2201.
16. Goddard P., Goldstone J., Rebbi C. Thorn B. Nucl. Phys., 1973, B56, p. 109.
17. Боголюбов П.Н. ЭЧАЯ, 1972, 3, с. 144.
18. Коккедэ Я. Теория кварков. "Мир", М., 1975.
19. Арнольд В.И. Математические методы классической механики, "Мир", М., 1975.
20. Зуланке Р., Винтген. Дифференциальная геометрия и расслоения. "Мир", М., 1975.
21. Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. "Наука", М., 1974.
22. Березин Ф.А. ТМФ, 1971, 6, с. 194; УФН, 1980, 132, с. 497.

23. Fiziev P.P. Bulg. Jour. Phys., 1983, 10, p. 27.
24. Физиев П.П. ОИЯИ, Р2-81-52, Дубна, 1981.
25. Физиев П.П. ОИЯИ, Р2-81-742, Дубна, 1981.
26. Буслаев В.С. Вариационное исчисление. Изд. ЛГУ, Л., 1980.
27. Физиев П.П. ОИЯИ, Р2-83-580, Дубна, 1983.
28. Лич Дж.У. Классическая механика, ИИЛ, М., 1961.
29. Kostant B., Lect in Math. Ann and Appl., III, N.Y., Springer, 1970.
30. Simms D.J., Woodhouse N.M.J. Lect. Mod. Math. Phys., 53, N.Y. Springer, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 сентября 1983 года.

Физиев П.П. Р2-83-649

Релятивистский гамильтониан с квадратным корнем в формализме интеграла по путям

Обсуждается квантование релятивистского гамильтониана $H = \sqrt{c^2(\vec{p} - \vec{A})^2 + (mc^2 + V)^2} + A_0$. Предлагается новый способ аппроксимаций соответствующего интеграла по путям. Показано, что вычисление этого интеграла не дает функцию Грина уравнения Клейна-Гордана, а приводит к пропагатору скалярного поля в двухкомпонентном формализме Фешбаха-Вилларса. Обсуждаются трудности вычисления интегралов по путям при наличии нетривиальных внешних полей.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Fiziev P.P. P2-83-649

Relativistic Hamiltonian with Square Root in the Path Integral Formalizm

The quantisation of the relativistic hamiltonian $H = \sqrt{c^2(\vec{p} - \vec{A})^2 + (mc^2 + V)^2} + A_0$ is discussed. A new approximation procedure is proposed for the corresponding path integral. It is shown that the evaluation of thos integral das not lead to the Green function of the Klein-Gordon equation but reproduces the propagator of the scalar field in the two component formalism of the Feshbach-Villars. The difficulties, connected with the evaluation of the path integrals in the presence of nontrivial external fields are discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой.