объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-83-542

Б.М.Барбашов, В.В.Нестеренко, А.М.Червяков

РЕДУКЦИЯ
В МОДЕЛИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО

Направлено в журнал
"Теоретическая и математическая физика"

1983

ВВЕДЕНИЕ

В серии работ [1-5] динамика релятивистской струны изучалась с точки зрения внутренней геометрии минимальных поверхностей в пространстве Минковского E^1_{d-1}. Основой такого подхода является рассмотрение ориентированного подвижного репера на мировой поверхности струны в главном расслоении $SO(1, d-1)$ над многообразием Грассмана $G(1,1;d-2)$ с группой $SO(1,1)\times SO(d-2)$. Изменение репера при движении его начала по поверхности струны задается с помощью дифференциальных форм в главном расслоении парой линейных уравнений. Условия их интегрируемости /уравнения вложения Гаусса, Петерсона-Кодацци и Риччи/ рассматриваются в данном подходе как динамические уравнения. Если мировая поверхность релятивистской струны вложена в пространство Минковского E^1_2, уравнения Гаусса и Петерсона-Кодацци в релятивистски-инвариантной калибровке сводятся к одному нелинейному уравнению Лиувилля [1-3]. В настоящее время получены и решены системы нелинейных уравнений для струны в E^1_3- и E^1_4-пространствах Минковского [4,5]. Однако при увеличении размерности d объемлющего пространства, число уравнений в системе Гаусса - Петерсона-Кодацци - Риччи возрастает, как $d^2/2$, причем число неизвестных функций превышает число уравнений. Поэтому в геометрическом подходе возникает проблема сокращения как динамических переменных, так и уравнений до $(d-2)$ существенных физических степеней свободы струны.

В настоящей статье эта проблема решается для различных калибровочных условий, используемых в теории релятивистской струны [6]. Отправным пунктом нашей работы являются результаты исследований [7-10] по редукции n-полей на вещественных сферах произвольной размерности. В работах [7,8] с помощью пары Лакса для n-поля получена пара уравнений Риккати для инвариантов полевых переменных по отношению к группе киральной симметрии, а затем найдено представление, в котором эти уравнения линеаризуются.
В статье [10] показано, что обе пары Лакса калибровочно эквивалентны в смысле работы [11]. Отметим, что в рамках геометрического подхода к теории n-поля пару линейных уравнений можно построить с помощью метода подвижного репера. Более того, она совпадает с парой Лакса, полученной в [8], если дифференциальные формы принимают значения в Z_2 -градуированном главном расслоении с калибровочной группой, перемешивающей касательное и нормальное пространства рассматриваемой поверхности. Факторизация по этой калибровочной группе, как и в статье [9], приводит к редуцирован-

ной системе нелинейных уравнений. С технической точки зрения метод подвижного репера является более экономным, хотя свойство калибровочной эквивалентности с исходной киральной моделью прослеживается менее явно [12]. В применении к модели релятивистской струны описанная процедура состоит в выделении калибровочной группы, перемешивающей касательное и нормальное пространства к мировой поверхности струны, и факторизации чисто калибровочных степеней свободы.

1. РЕДУКЦИЯ В КАЛИБРОВКЕ $x^0(\tau, \sigma) = \tau$

В этой калибровке мировая поверхность релятивистской струны $x^\mu(\tau, \sigma)$ в пространстве Минковского E^1_{d-1} описывается $(d-1)$-мерным евклидовым вектором $x^i(t, \sigma) \in E_{d-1}$, $i = 1, 2, \ldots, d-1$. Уравнения движения и дополнительные условия имеют вид [6]:

$$\ddot{x}^i - x''^i = 0, \qquad /1.1/$$

$$(\dot{x} \pm x')^2 = 1, \qquad /1.2/$$

где $\dot{x}^i = \partial x^i/\partial t$, $x'^i = \partial x^i/\partial\sigma$, $x^0 = t = \tau$. Согласно /1.2/ метрический тензор на мировой поверхности струны можно выбрать в виде

$$g_{11} = \dot{x}^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}, \quad g_{22} = x'^2 = \sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$g_{12} = \dot{x}x' = 0. \qquad /1.3/$$

В дальнейшем удобно перейти к конусным координатам $\xi = (t + \sigma)/2$, $\eta = (t - \sigma)/2$, в которых уравнения /1.1-1.3/ записываются так:

$$x^i_{\xi\eta} = 0, \qquad /1.4/$$

$$x^2_\xi = x^2_\eta = 1, \qquad /1.5/$$

$$(x_\xi x_\eta) = \dot{x}^2 - x'^2 = \cos\theta. \qquad /1.6/$$

Уравнения движения /1.4/ и дополнительные условия /1.5/, /1.6/ описывают динамику релятивистской струны в обычном подходе в калибровке $x^0(\tau, \sigma) = \tau$.

Теперь перейдем к рассмотрению геометрического подхода. В каждой точке мировой поверхности струны с метрикой /1.6/ построим подвижный ортонормированный репер, образованный двумя касательными векторами, $e^i_1 = x^i_\xi$, $e^i_2 = (x^i_\eta - \cos\theta \cdot x^i_\xi)/\sin\theta$, и $(d-3)$ единичными нормалями $e^i_a = \eta^i_a$, $a = 3, 4, \ldots, d-1$,

$$e_i = \left\{ x_\xi, \frac{x_\eta - \cos\theta x_\xi}{\sin\theta}, \eta_a \right\}, \qquad /1.7/$$

$$e^k_i e_{kj} = \delta_{ij}.$$

Изменение репера $\{e^k_i\}$ при движении радиус-вектора $x^i(\xi, \eta)$ по поверхности струны задается следующими линейными дифференциальными уравнениями:

$$e^k_{i\xi} = \Omega^{1j}_i e^k_j, \quad e^k_{i\eta} = \Omega^{2j}_i e^k_j, \qquad /1.8/$$

$$i, j, k = 1, 2, \ldots, d-1.$$

Здесь матрицы Ω^1 и Ω^2 принимают значения в алгебре Ли компактной группы $SO(d-1)$ и с учетом /1.4/-/1.6/ записываются так:

$$\Omega^1 = \left|\begin{array}{cc|c} 0 & -\theta_\xi & b^+_a \\ \theta_\xi & 0 & -\mathrm{ctg}\theta \cdot b^+_a \\ \hline -\tilde{b}^+_a & \mathrm{ctg}\theta \cdot \tilde{b}^+_a & \underbrace{\nu^+_{\alpha\beta}}_{d-3} \end{array}\right| \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} d-3,$$

$$\Omega^2 = \left|\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sin\theta)^{-1} b^-_a \\ \hline 0 & -(\sin\theta)^{-1}\tilde{b}^-_a & \underbrace{\nu^-_{\alpha\beta}}_{d-3} \end{array}\right| \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} d-3, \qquad /1.9/$$

где $b^\pm = (\eta_a x_{\xi\xi \atop \eta\eta})$ – коэффициенты второй квадратичной формы мировой поверхности струны, волна сверху означает транспонирование, $\nu^\pm_{\alpha\beta} = (\eta_{\alpha\,\xi \atop \eta}\, \eta_\beta) = -\nu^\pm_{\beta\alpha}$ – вектора кручения, $\alpha, \beta = 3, 4, \ldots, d-1$.

Из /1.9/ следует, что алгебра Ли группы $SO(d-1)$ имеет Z_2-градуировку

$$so(d-1) = so(2) \times SO(d-3) \oplus \frac{so(d-1)}{so(2) \times so(d-3)}$$

с группой изотропии $SO(2) \times SO(d-3)$, не перемешивающей касательное $\{e_1, e_2\}$ и нормальное $\{\eta_a\}$ пространства мировой поверхности струны в данной точке.

Условия интегрируемости /1.8/ представляют собой уравнения вложения Гаусса, Петерсона-Кодацци и Риччи

$$\Omega^1_\eta - \Omega^2_\xi + [\Omega^1, \Omega^2] = 0. \qquad /1.10/$$

Если мировая поверхность струны с метрикой /1.6/ вложена в евклидово пространство E_{d-1}, система /1.10/ принимает вид:

$$\theta_{\xi\eta} + (\sin\theta)^{-1} \sum_{a=3}^{d-1} b^+_a b^-_a = 0,$$

$$b^+_{a\eta} = \theta_\xi (\sin\theta)^{-1} b^-_a + \sum_{\beta=3}^{d-1} \nu^-_{a\beta} b^+_\beta,$$

$$b^-_{a\xi} = \theta_\eta (\sin\theta)^{-1} b^+_a + \sum_{\beta=3}^{d-1} \nu^+_{a\beta} b^-_\beta, \qquad /1.11/$$

$$\nu^+_{a\beta\eta} - \nu^-_{a\beta\xi} + \sum_{\gamma=3}^{d-1} (\nu^+_{a\gamma} \cdot \nu^-_{\gamma\beta} - \nu^-_{a\gamma} \nu^+_{\gamma\beta}) +$$

$$+ \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(b^+_a b^-_\beta - b^-_a b^+_\beta) = 0,$$

$$a, \beta = 3,4,\ldots, d-1.$$

Уравнения вложения /1.11/ образуют систему $1 + 2(d-3) + (d-3)(d-4)/2$ уравнений с $1 + 2(d-3) + (d-3)(d-4)$ неизвестными функциями θ, $b^\pm_a$, $\nu^\pm_{a\beta}$, $a, \beta = 3, \ldots, d-1$. Такая неопределенность системы /1.10/ связана с ее калибровочной инвариантностью по отношению к группе преобразований $SO(d-3)$ в нормальном пространстве к поверхности струны, соответствующей свободе выбора векторов η^i_a, $a = 3,4,\ldots, d-1$. При переходе от репера $\{e^k_i\}$ к новому реперу $\{\bar{e}^k_i\}$,

$$e^k_i = F^j_i \bar{e}^k_j, \qquad /1.12/$$

матрицы Ω^1 и Ω^2 преобразуются следующим образом:

$$\bar{\Omega}^1 = F^T \Omega^1 F + F^T_\xi F,$$

$$\bar{\Omega}^2 = F^T \Omega^2 F + F^T_\eta F, \qquad /1.13/$$

где F - ортогональная матрица из группы $SO(d-3)$. Соответствующим выбором F систему /1.11/ можно доопределить, при этом число входящих в нее уравнений не изменится. В калибровке $x^0(\tau, \sigma) = \tau$ и $d = 4$ это число сокращалось за счет интегрирования уравнений Петерсона-Кодацци [5]. Оказывается, что аналогичное интегрирование можно провести и в d-мерном объемлющем пространстве. Чтобы увидеть эту возможность, перегруппируем уравнения /1.11/ следующим образом. Определим "коэффициенты второй квадратичной формы"

$$b^+_2 \equiv (\eta_2 x_{\xi\xi}) = -\theta_\xi, \quad b^-_2 \equiv (\eta_2 x_{\eta\eta}) = \theta_\eta \cdot \cos\theta \qquad /1.14/$$

и "вектора кручения"

$$\nu^+_{2a} \equiv (\eta_{2\xi} \eta_a) = -\mathrm{ctg}\theta \cdot b^+_a,$$

$$\nu^-_{2a} \equiv (\eta_{2\eta} \eta_a) = (\sin\theta)^{-1} b^-_a, \quad a = 3, \ldots, d-1, \qquad /1.15/$$

связанные с вектором $\eta_2 \equiv e_2 = \dfrac{x_\eta - \cos\theta x_\xi}{\sin\theta}$, касательным к мировой поверхности струны в каждой точке. С учетом /1.14/, /1.15/ матрицы /1.9/ принимают вид

$$\Omega = \left|\begin{array}{c|c} 0 & b^+_a \\ \hline -b^+_a & \underbrace{\nu^+_{a\beta}}_{d-2} \end{array}\right| \Big\}\, d-2, \qquad \Omega = \left|\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{\nu^-_{a\beta}}_{d-2} \end{array}\right| \Big\}\, d-2 \qquad /1.16/$$

Теперь рассмотрим следующую Z_2-градуировку алгебры Ли группы $SO(d-1)$:

$$so(d-1) = \frac{so(d-1)}{so(d-2)} \oplus so(d-2). \qquad /1.17/$$

Подгруппа $SO(d-2)$ перемешивает касательное и нормальное пространства мировой поверхности релятивистской струны. Уравнения вложения /1.10/ с матрицами /1.16/ записываются так:

$$b^+_{a\eta} = \sum_{\beta=1}^{d-1} \nu^-_{a\beta} b^+_\beta,$$

$$\nu^+_{a\beta\eta} - \nu^-_{a\beta\xi} + \sum_{\gamma=2}^{a-1} (\nu^+_{a\gamma} \nu^-_{\gamma\beta} - \nu^-_{a\gamma} \nu^+_{\gamma\beta}) = 0, \qquad /1.18/$$

$$a, \beta = 2,3,\ldots, d-1,$$

где коэффициенты второй квадратичной формы b^+_a выражаются через вектора кручения ν^+_{2a} согласно /1.14/, /1.15/ следующим образом:

$$b^+_a = -\theta_\xi \delta_{2a} - \mathrm{tg}\theta \cdot \nu^+_{2a}, \qquad /1.19/$$

$$a = 2,3,\dots,d-1.$$

Уравнения, записанные во второй строке в /1.18/, легко интегрируются [13]. Для этого совершим преобразование /1.12/, /1.13/ с ортогональной матрицей F из группы $SO(d-2)$ и положим $\bar{\nu}^{\pm}_{a\beta} = 0$. Такой выбор можно сделать всегда, определяя F из условий

$$\nu^+ = F_\xi F^T, \quad \nu^- = F_\eta F^T. \qquad /1.20/$$

В калибровке /1.20/ с учетом соотношений /1.19/ уравнения вложения /1.18/ сводятся к системе $(d-2)$ нелинейных уравнений для $(d-2)$ независимых функций $\theta(\xi, \eta)$, $f_a(\xi, \eta) = F_{2a}$, $a = 2,3,\dots,d-1$:

$$\theta_{\xi\eta} \cdot f^a + \theta_\xi f^a_\eta + \frac{\theta_\eta}{\cos^2\theta} f^a_\xi + \mathrm{tg}\theta \cdot f^a_{\xi\eta} = 0, \qquad /1.21/$$

$$f_a f^a = 1.$$

С помощью подстановки $\phi^a(\xi, \eta) = \sin\theta \cdot f^a$, указанной в работе [9], уравнения /1.21/ принимают вид

$$\partial_\eta\left(\frac{\phi^a_\xi}{\sqrt{1 - \|\phi\|^2}}\right) = 0, \qquad /1.22/$$

$$a = 2,3,\dots,d-1.$$

Интересно отметить, что система /1.22/ отличается от известных уравнений Полмайера-Ререна в теории n -поля [9] отсутствием в правой части слагаемого $\sqrt{1 - \|\phi\|^2} \cdot \phi^a$. По своему построению уравнения /1.22/ являются условиями интегрируемости пары линейных уравнений

$$e_{1\xi} = -\frac{\phi^a_\xi e_a}{\sqrt{1 - \|\phi\|^2}}, \quad e_{1\eta} = 0,$$

$$e_{a\xi} = \frac{\phi^a_\xi}{\sqrt{1 - \|\phi\|^2}} e_1, \quad e_{a\eta} = 0, \qquad /1.23/$$

$$a = 2,\dots,d-1.$$

Если размерность объемлющего пространства $d = 3,4$, система /1.22/ дает нелинейные уравнения, ранее полученные в работе [5].

Таким образом, в калибровке $x^0(\tau, \sigma) = \tau$ динамика релятивистской струны, мировая поверхность которой вложена в d-мерное пространство Минковского E^1_{d-1}, сводится к системе $(d-2)$ нелинейных уравнений /1.22/.

2. РЕДУКЦИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКИ-ИНВАРИАНТНОЙ КАЛИБРОВКЕ

В теории релятивистской струны помимо калибровки $x^0(\tau, \sigma) = \tau$ представляют интерес и другие дополнительные условия. Пусть по-прежнему $x^\mu(\tau, \sigma)$, $\mu = 0, 1, \dots, d-1$ - параметрическое задание мировой поверхности струны, движущейся в d-мерном плоском псевдоевклидовом пространстве E^1_{d-1}. Не теряя общности, уравнения, определяющие координаты струны

$$\ddot{x}^\mu - x''^\mu = 0, \qquad /2.1/$$

$$\dot{x}^2 = -x'^2 = \lambda(\tau, \sigma),$$
$$\dot{x}x' = 0, \qquad /2.2/$$

можно дополнить следующими нелинейными релятивистски-инвариантными условиями [3-5]:

$$(\ddot{x} \pm \dot{x}')^2 = -q^2, \qquad /2.3/$$

где q^2 - произвольная положительная константа. В конусных переменных $\xi = (\tau + \sigma)/\sqrt{2}$, $\eta = (\tau - \sigma)/\sqrt{2}$ система уравнений /2.1/-/2.3/ принимает вид

$$x^\mu_{\xi\eta} = 0, \qquad /2.4/$$

$$x^2_\xi = x^2_\eta = 0, \qquad /2.5/$$

$$(x_\xi x_\eta) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - x'^2) = \lambda, \qquad /2.6/$$
$$x^2_{\xi\xi} = -q^2 = x^2_{\eta\eta}.$$

Решение $x^\mu(\xi,\eta)$ задачи /2.4/-/2.6/, зависящее от $2(d-2)$ произвольных функций одной переменной, было получено в работе [3].

Перейдем теперь к рассмотрению геометрического подхода, в котором мировая поверхность струны с метрикой /2.5/ описывается набором переменных λ, $b^\pm_a$, $\nu^\pm_{a\beta}$, $a, \beta = 2, 3, \ldots, d-1$, удовлетворяющих условиям /2.4/, /2.6/ и уравнениям вложения Гаусса - Петерсона-Кодацци - Риччи. Для этого построим подвижный ортонормированный репер в главном расслоении $SO(1, d-1)$, образованный двумя касательными к поверхности струны векторами $e^\mu_0 = x^\mu_\xi + \frac{x^\mu_\eta}{2\lambda}$, $e^\mu_1 = x^\mu_\xi - \frac{x^\mu_\eta}{2\lambda}$ и $(d-2)$ единичными нормалями η^μ_a, $a = 2,3,\ldots,d-1$,

$$e_\nu = \{ x_\xi + \frac{x_\eta}{2\lambda},\ x_\xi - \frac{x_\eta}{2\lambda},\ \eta_a \},$$
$$e^\mu_\nu \cdot e_{\mu\sigma} = \eta_{\nu\sigma}, \qquad /2.7/$$

где $\eta_{\nu\sigma}$- метрика пространства E^1_{d-1} с сигнатурой $\eta_{\nu\sigma} = \mathrm{diag}(1,-1,\ldots,-1)$. Матрицы Ω^j, $j = 1,2$, описывающие локальное изменение репера /2.7/, принимают значения в алгебре Ли псевдоортогональной группы $SO(1, d-1)$:

$$\Omega^1 = \left|\begin{array}{cc|c} 0 & \frac{\lambda_\xi}{\lambda} & -b^+_a \\ \frac{\lambda_\xi}{\lambda} & 0 & -b^+_a \\ \hline -\bar{b}^+_a & \bar{b}^+_a & \underbrace{-\nu^+_{a\beta}}_{d-2} \end{array}\right| \begin{array}{c} \\ \\ \left.\right\} d-2 \end{array},$$

$$\Omega^2 = \left|\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -\frac{b^-_a}{2\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{b^-_a}{2\lambda} \\ \hline -\frac{\bar{b}^-_a}{2\lambda} & -\frac{\bar{b}^-_a}{2\lambda} & \underbrace{-\nu^-_{a\beta}}_{d-2} \end{array}\right| \begin{array}{c} \\ \\ \left.\right\} d-2 \end{array}, \qquad /2.8/$$

причем коэффициенты второй квадратичной формы $b^\pm_a$, $a = 2,3,\ldots,d-1$, в силу /2.6/ подчиняются следующим условиям:

$$\sum_{a=2}^{d-1} (b^+_a)^2 = q^2 = \sum_{a=2}^{d-1} (b^-_a)^2 . \qquad /2.9/$$

Таким образом, задано главное расслоение $SO(1, d-1)$ над многообразием Грассмана $G(1,1;\ d-2)$ с группой $SO(1,1) \times SO(d-2)$.

Условия интегрируемости /1.10/ с матрицами /2.8/ представляют собой уравнения вложения Гаусса

$$(\ln\lambda)_{\xi\eta} + \frac{1}{\lambda} \sum_{a=2}^{d-1} b^+_a b^-_a = 0, \qquad /2.10/$$

Петерсона-Кодацци

$$b^+_{a\eta} + \sum_{\beta=2}^{d-1} \nu^-_{a\beta} b^+_\beta = 0,$$
$$b^-_{a\xi} + \sum_{\beta=2}^{d-1} \nu^+_{a\beta} b^-_\beta = 0 \qquad /2.11/$$

и Риччи

$$\nu^+_{a\beta\eta} - \nu^-_{a\beta\xi} - \sum_{\gamma=2}^{d-1} (\nu^+_{a\gamma}\nu^-_{\gamma\beta} - \nu^-_{a\gamma}\nu^+_{\gamma\beta}) -$$
$$- \frac{1}{\lambda}(b^+_a b^-_\beta - b^-_a b^+_\beta) = 0, \qquad /2.12/$$

$$a,\beta = 2,3,\ldots,d-1.$$

В системе /2.10-2.12/ число неизвестных функций λ, $b^\pm_a$, $\nu^\pm_{a\beta}$, $a, \beta = 2,3,\ldots,d-1$ превосходит число уравнений, причем разница составляет $(d-2)(d-3)/2$. Такая неопределенность связана с калибровочной инвариантностью уравнений /2.10-2.12/ по отношению к группе преобразований $SO(d-2)$ в нормальном пространстве к поверхности струны, соответствующей свободе выбора нормалей η^μ_a, $a = 2,3,\ldots,d-1$. Этим калибровочным произволом можно воспользоваться и частично доопределить систему /2.10-2.12/ следующим образом [5]. С помощью группы поворотов плоскости $SO(2)$ направим две нормали, η^μ_2 и η^μ_3, к мировой поверхности струны по взаимноортогональным векторам $\ddot{x} = (x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta})/2$ и $\dot{x}' = \frac{1}{2}(x_{\xi\xi} - x_{\eta\eta})$ соответственно. Тогда, разрешая условия /2.9/, получим

$$b^+_2 = b^-_2 = q \cdot \cos\frac{\theta}{2},$$

$$b_3^+ = -b_3^- = q\cdot\sin\frac{\theta}{2}\,,$$
$$b_a^\pm = 0,\quad a = 4,5,\dots,d-1. \qquad /2.13/$$

Чтобы удовлетворить уравнениям Петерсона-Кодацци /2.11/, можно положить
$$\nu_{23}^+ = \frac{\theta_\xi}{2},\quad \nu_{23}^+ = -\frac{\theta_\eta}{2},$$
$$\nu_{2a}^+ = \frac{1}{2}c_a^+(\cos\frac{\theta}{2})^{-1},\qquad \nu_{2a}^- = \frac{1}{2}c_a^-(\cos\frac{\theta}{2})^{-1},$$
$$\nu_{3a}^+ = \frac{1}{2}c_a^+(\sin\frac{\theta}{2})^{-1},\qquad \nu_{3a}^- = -\frac{1}{2}c_a^-(\sin\frac{\theta}{2})^{-1}, \qquad /2.14/$$
$$a = 4,5,\dots,d-1,$$

где $c_a^+ = \eta_a\cdot\eta_{+\xi}$, $c_a^- = \eta_a\cdot\eta_{-\eta}$, $a = 4,\dots,d-1$ - коэффициенты второй квадратичной формы двумерной поверхности нормальной по отношению к мировой поверхности релятивистской струны, $\eta_\pm = \cos\frac{\theta}{2}\eta_2 \pm \sin\frac{\theta}{2}\eta_3$ касательные вектора в каждой точке этой поверхности, $\eta_\pm^2 = -1$, $(\eta_+\eta_-) = -\cos\theta$.

С учетом /2.13/, /2.14/ уравнение Гаусса /2.10/ записывается следующим образом:
$$(\ln\lambda)_{\xi\eta} + \frac{q^2}{\lambda}\cos\theta = 0, \qquad /2.15/$$

а уравнения Риччи /2.12/ принимают вид
$$\theta_{\xi\eta} + (\sin\theta)^{-1}\sum_{a=4}^{d-1} c_a^+ c_a^- - \frac{q^2}{\lambda}\cdot\sin\theta = 0,$$
$$c_{a\eta}^+ = \theta_\xi\cdot(\sin\theta)^{-1}\cdot c_a^- - \sum_{\beta=4}^{d-1}\nu_{a\beta}^-\cdot c_\beta^+,$$
$$c_{a\xi}^- = \theta_\eta\cdot(\sin\theta)^{-1}\cdot c_a^+ - \sum_{\beta=4}^{d-1}\nu_{a\beta}^+ c_\beta^-, \qquad /2.16/$$
$$\nu_{a\beta\eta}^+ - \nu_{a\beta\xi}^- - \sum_{\gamma=4}^{d-1}(\nu_{a\gamma}^+\cdot\nu_{\gamma\beta}^- - \nu_{a\gamma}^-\nu_{\gamma\beta}^+) -$$
$$-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(c_a^+c_\beta^- - c_a^-c_\beta^+) = 0,\quad a,\beta = 4,\dots,d-1.$$

Отметим, что система /2.16/ с точностью до члена $\frac{q^2}{\lambda}\cdot\sin\theta$ в пер-

вом уравнении замечательным образом совпадает с уравнениями вложения Гаусса - Петерсона-Кодацци - Риччи /1.11/, полученными в калибровке $x^0(\tau,\sigma) = \tau$.

При переходе от уравнений /2.10/-/2,12/ к системе /2.15/-/2.16/ мы перешли от репера /2.7/ к новому реперу
$$e_\nu = \{x_\xi + \frac{x_\eta}{2\lambda},\ x_\xi - \frac{x_\eta}{2\lambda},\ \eta_+,\ \frac{\eta_- - \cos\theta\cdot\eta_+}{\sin\theta},\ \eta_a\} \qquad /2.17/$$

в главном расслоении $SO(1,1)\times SO(d-2)$. Матрицы Ω^j, $j = 1,2$, описывающие локальное изменение репера /2.17/, принимают значения в Z_2-градуированной алгебре Ли группы $SO(1,1)\times SO(d-2)$:
$$\Omega^1 = \left|\begin{array}{cccc:c} 0 & \frac{\lambda_\xi}{\lambda} & -q & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_\xi}{\lambda} & 0 & -q & 0 & 0 \\ -q & q & 0 & -\theta_\xi & -c_a^+ \\ 0 & 0 & \theta_\xi & 0 & \mathrm{ctg}\,\theta\cdot c_a^+ \\ \hdashline 0 & 0 & \tilde{c}_a^+ & -\mathrm{ctg}\theta\cdot\tilde{c}_a^+ & \underbrace{-\nu_{a\beta}^+}_{d-4} \end{array}\right|\Big\}\,d-4,$$
$$/2.18/$$
$$\Omega^2 = \left|\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & -\frac{q\cdot\cos\theta}{2\lambda} & -\frac{q\cdot\sin\theta}{2\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q\cdot\cos\theta}{2\lambda} & \frac{q\cdot\sin\theta}{2\lambda} & 0 \\ -\frac{q\cdot\cos\theta}{2\lambda} & -\frac{q\cdot\cos\theta}{2\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{q\cdot\sin\theta}{2\lambda} & -\frac{q\cdot\sin\theta}{2\lambda} & 0 & 0 & -(\sin\theta)^{-1}c_a^- \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & (\sin\theta)^{-1}\tilde{c}_a^- & \underbrace{-\nu_{a\beta}^-}_{d-4} \end{array}\right|\Big\}\,d-4,$$

причем подгруппа $SO(2) \times SO(d-4)$ является группой симметрии системы /2.15/, /2.16/. Однако в дальнейшем использовании этого калибровочного произвола нет необходимости: система /2.15/, /2.16/ допускает редукцию, аналогичную рассмотренной в предыдущем разделе.

Для этого определим коэффициенты второй квадратичной формы

$$c_3^+ \equiv \eta_3 \cdot \eta_{+\xi} = \theta_\xi \,, \quad c_3^- \equiv \eta_3 \cdot \eta_{-\eta} = -\theta_\eta \cdot \cos\theta \qquad /2.19/$$

и вектора кручения

$$\begin{aligned} \nu_{3a}^+ &\equiv \eta_{3\xi} \cdot \eta_a = -\operatorname{ctg}\theta \cdot c_a^+ \,, \\ \nu_{3a}^- &\equiv \eta_{3\eta} \cdot \eta_a = (\sin\theta)^{-1} \cdot c_a^- \,, \end{aligned} \qquad /2.20/$$

$$a = 4,5,\dots, d-1 \,,$$

связанные с вектором $\eta_3 \equiv e_3 = \dfrac{\eta_- - \cos\theta \cdot \eta_+}{\sin\theta}$, касательным к нормальной поверхности в каждой точке. С учетом /2.19/, /2.20/ матрицы /2.18/ принимают значения

$$\Omega^1 = \left|\begin{array}{ccc|c} 0 & \dfrac{\lambda_\xi}{\lambda} & -q & 0 \\ \dfrac{\lambda_\xi}{\lambda} & 0 & -q & 0 \\ -q & q & 0 & -c_a^+ \\ \hline 0 & 0 & c_a^+ & \underbrace{-\nu_{\alpha\beta}^+}_{d-3} \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \}\, d-3 \end{array} , \qquad /2.21/$$

$$\Omega^2 = \left|\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -\dfrac{q \cdot \cos\theta}{2\lambda} & -\dfrac{q \cdot \sin\theta}{2\lambda}\delta_{3a} \\ 0 & 0 & \dfrac{q \cdot \cos\theta}{2\lambda} & \dfrac{q \cdot \sin\theta}{2\lambda}\delta_{3a} \\ -\dfrac{q \cdot \cos\theta}{2\lambda} & -\dfrac{q \cdot \cos\theta}{2\lambda} & 0 & 0 \\ \hline -\dfrac{q \cdot \sin\theta}{2\lambda}\delta_{3a} & -\dfrac{q \cdot \sin\theta}{2\lambda}\delta_{3a} & 0 & \underbrace{-\nu_{\alpha\beta}^-}_{d-3} \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \}\, d-3 \end{array}$$

в Z_2 -градуированной алгебре Ли

$$so(1,1) \times so(d-2) = \frac{so(1,1) \times so(d-2)}{so(d-3)} \oplus so(d-3) \qquad /2.22/$$

с подгруппой $SO(d-3)$, которая перемешивает нормальное пространство $\{\eta_+^\mu, \eta_-^\mu\}$ и пространство, образованное другими нормалями, η_a^μ, $a = 4,5,\dots, d-1$. В системе уравнений вложения /1.10/ с матрицами /2.21/ уравнение Гаусса /2.15/ не меняется, а уравнения Риччи /2.16/ записываются следующим образом:

$$c_{a\eta}^+ = \frac{q^2}{\lambda} \cdot \sin\theta \cdot \delta_{3a} - \sum_{\beta=3}^{d-1} \nu_{a\beta}^- \cdot c_\beta^+ \,, \qquad /2.23/$$

$$\nu_{\alpha\beta\eta}^+ - \nu_{\alpha\beta\xi}^- - \sum_{\gamma=3}^{d-1} (\nu_{\alpha\gamma}^+ \nu_{\gamma\beta}^- - \nu_{\alpha\gamma}^- \nu_{\gamma\beta}^+) = 0 \,, \qquad /2.24/$$

$$\alpha, \beta = 3,4,\dots, d-1 \,,$$

где коэффициенты второй квадратичной формы c_a^+ выражаются через векторы кручения ν_{3a}^+ согласно /2.19/, /2.20/ так:

$$c_a^+ = \theta_\xi \cdot \delta_{3a} - \operatorname{tg}\theta \cdot \nu_{3a}^+ \,, \qquad /2.25/$$

$$a = 3,4,\dots, d-1 .$$

Общее решение уравнений /2.24/ является чистой калибровкой

$$\nu^+ = -F_\xi \cdot F^T \,, \quad \nu^- = -F_\eta \cdot F^T \,, \qquad /2.26/$$

где F - ортогональная матрица из группы $SO(d-3)$. Подставляя /2.26/ в /2.23/ и учитывая соотношения /2.25/, приходим к системе из $(d-3)$ нелинейных уравнений для функций $\theta(\xi,\eta)$ и $f_a(\xi,\eta) = F_{3a}$, $a = 3,\dots,d-1$:

$$\begin{aligned} &\left(\theta_{\xi\eta} - \frac{q^2}{\lambda} \cdot \sin\theta\right) \cdot f^a + \theta_\xi f_\eta^a + \frac{\theta_\eta}{\cos^2\theta} \cdot f_\xi^a + \operatorname{tg}\theta \cdot f_{\xi\eta}^a = 0 \,, \\ &f_a \cdot f^a = 1 . \end{aligned} \qquad /2.27/$$

Окончательно уравнения /2.15/ и /2.27/ с помощью замен $\lambda = e^{-u}$, $f^a = (\sin\theta)^{-1} \cdot \phi^a$ принимают вид

$$u_{\xi\eta} = q^2 \cdot e^u \cdot \sqrt{1 - \|\phi\|^2} \,,$$

$$\phi^a_{\xi\eta} + \frac{(\phi\cdot\phi_\eta)}{1-||\phi||^2}\cdot\phi^a_\xi = q^2\cdot e^u\cdot\sqrt{1-||\phi||^2}\cdot\phi^a , \qquad /2.28/$$

$a = 3,4,\dots, d-1.$

Система /2.28/ справедлива для любой размерности d объемлющего пространства и сводится к полученным ранее нелинейным уравнениям следующими подстановками:

$d=3$ /см./1-3/ /: $\phi^a = 0$,

$d=4$ /см./4/ /: $\phi^1 = \sin\theta$, $\qquad \psi_\xi = \dfrac{\kappa_\xi \cos\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$,

$d=5$ /см./5/ /: $\phi^1 = \sin\theta\cdot\cos\psi$,

$\phi^2 = \sin\theta\cdot\sin\psi$, $\qquad \psi_\eta = \dfrac{\kappa_\eta}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$.

Таким образом, в релятивистски-инвариантной калибровке /2.3/ динамика релятивистской струны, мировая поверхность которой вложена в d-мерное пространство Минковского E^1_{d-1}, сводится к системе $(d-2)$ нелинейных уравнений /2.28/.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование модели релятивистской струны в d-мерном пространстве-времени на первый взгляд может показаться чисто математической проблемой. Однако это не так. Учитывая, что удовлетворительной квантовой теории струны до сих пор еще нет, было бы интересно по аналогии с нелинейными сигма-моделями развить разложение по $1/d$ при $d\to\infty$ и в теории струны. Далее, геометрическая теория струны в d-мерном пространстве-времени генерирует целую серию нелинейных уравнений, для которых в явном виде можно построить общее решение. Для низших размерностей это было сделано в работе /5/. Использованный там метод, вероятно, можно обобщить и для случая произвольного d.

Следует отметить, что полученные нами уравнения /1.22/ и /2.28/ не совпадают с так называемыми уравнениями струнного типа, которые были построены и явно решены в работах /14,15/ с помощью групповых методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lund F., Regge T. Phys.Rev., 1976, D14, p.1524-1535.
2. Omnes R. Nucl.Phys., 1979, B149, p.269-284.
3. Барбашов Б.М., Кошкаров А.Л. ТМФ, 1979, т.39, с.27-34; Барбашов Б.М., Нестеренко В.В., Червяков А.М. ТМФ,1979, т.40, с.15-17.

4. Barbashov B.M., Nesterenko V.V., Chervjakov A.M. J.Phys., 1980, A13, p.301-312.
5. Barbashov B.M., Nesterenko V.V., Chervjakov A.M. Comm.Math. Phys., 1982, 84, p.471-481; ТМФ, 1982, т.52, с.3-14.
6. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. ЭЧАЯ, 1978, 9, с.709-758.
7. Pohlmeyer K. Comm.Math.Phys., 1976, 46, p.207-221.
8. Eichenherr H., Pohlmeyer K. Phys.Lett., 1980, 89B, p.76-78.
9. Pohlmeyer K., Rehren K.H. J.Math.Phys., 1979, 20, p.2628-2632.
10. Honerkamp J. J.Math.Phys., 1981, 22, p.277-282.
11. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А. ТМФ, 1979, 38, с.26-35.
12. Голо В.Л., Путко Б.А. ТМФ, 1980, 45, с.19-29.
13. Захаров В.Е., Михайлов А.В. ЖЭТФ, 1978, 74, с.1953-1973.
14. Leznov A.N., Saveliev M.V. Lett.Math.Phys., 1982, 6, p.505-510.
15. Leznov A.N., Saveliev M.V. Comm.Math.Phys., 1983, 89, p.59-75.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 июля 1983 года.

Барбашов Б.М., Нестеренко В.В., Червяков А.М. Р2-83-542
Редукция в модели релятивистской струны
для произвольной размерности пространства Минковского

Показано, что уравнения, описывающие динамику классической релятивистской струны в d-мерном пространстве-времени, сводятся к системе $d-2$ нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Эти уравнения определяют вложение двумерной минимальной поверхности в d-мерное псевдоевклидово пространство. Рассмотрены две калибровки, используемые в теории струны: времениподобная и релятивистски-инвариантная.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Barbashov B.M., Nesterenko V.V., Chervjakov A.M. P2-83-542
Reduction in the Relativistic String Model
for the d-Dimensional Space-Time

It is shown that the equations describing the classical dynamics of the relativistic string in the d-dimensional space-time are reduced to a set of $d-2$ nonlinear partial differential equations. These equations determine the embedding of a two-dimensional minimal surface into the d-dimensional pseudo-Euclidean space. Two different gauges time-like and relativistic invariant used in the string theory are considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983