объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна



Р2-83-580



П.П.Физиев

# НЕКОТОРЫЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ МАЙЕРА В ИНТЕГРАЛЕ ПО ПУТЯМ

Направлено в "Болгарский физический журнал"

1983

I. Применение метода интегрирования по путям для квантования физических систем наталкивается на затруднения разных типов. В частности, отсутствует применимое в общем /негауссовском/ случае корректное математическое определение интеграла по путям, которое приводило бы к однозначным результатам.

Известно[1], что возникающие неоднозначности эквивалентны неопределенности задачи квантования классических систем, отмеченной еще в начальных работах Шредингера[2]. В литературе встречаются разные определения интеграла по путям как предел $N$-кратного интеграла при $N \to \infty$,[1,3-9] /см. также ссылки в[10]/. Обычно при этом утверждают, что проводится суммирование по всем траекториям на фазовом пространстве $M^{2n}_{pq}$ классической системы /с $n < \infty$ степенями свободы/, однако ответ зависит от выбора конечномерной аппроксимации.

В[10] было показано, что применяемая на практике процедура конечномерных аппроксимаций неявно предполагает некий выбор подмножества путей, по которому в действительности проводится суммирование в интеграле по путям. Справедливость этого утверждения доказана анализом свойств классического действия[10-12]. Решающим обстоятельством оказывается существование бесконечного множества траекторий с одинаковым классическим действием, которые лежат на гиперповерхностях Майера[13] в пространстве состояний $M^{2n+1}_{pqt}$ механической системы. Показано[10], что при вычислении квантовой амплитуды перехода для малых времен $\Delta t = t'' - t'$ следует учитывать только один путь на соответствующей поверхности Майера $M^{n+1}_{p_t}(Q)$ /в предположении, что она просто связана/. Ориентируемые поверхности Майера можно задавать как $(n+1)$-мерные гиперповерхности уровня полной инволютивной системы из $n$ первых интегралов $Q_\alpha(p, q, t)$ $(\alpha = 1, \dots, n)$ рассматриваемой классической системы с гамильтонианом $H(p, q, t)$:

$$Q_\alpha(p, q, t) = C_\alpha = \mathrm{const}$$
$$[Q_\alpha, Q_\beta] = 0 \qquad : \alpha, \beta = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где [ , ] - скобка Пуассона.

Учет только одного из бесконечного множества путей, соединяющих две точки на такой поверхности, аналогичен факторизации Фаддеева-Попова[6,7,14,15] для систем со связями. Однако в нашем случае нет никаких ограничений на движение классической системы. Так как введение детерминанта Фаддеева-Попова не проходит, приходится проводить факторизацию прямым путем.

В конечном счете оказывается [10], что при конечномерных аппроксимациях в интеграле по путям следует учитывать только ломаные траектории в $M^{2n+1}_{pqt}$, куски которых лежат на гиперповерхностях Майера /1/ заданного типа.

Выбор $Q_\alpha$ приводит к определенному действию $\phi_Q(p,q,t;t_0)$ как функции на пространстве состояний [11], и определяет класс траекторий, по которому "усредняется" при интегрировании по путям. Явный учет этого обстоятельства позволяет избежать возникновения константных бесконечных множителей, с точностью до которых иногда считают, что определен интеграл по путям. Это дает возможность получить корректное математическое определение объекта.

Видно, что квантовая амплитуда перехода

$$G(q'',t'';q',t') = \langle q''|T\exp(-\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\hat H\,dt)|q'\rangle = \int\mathfrak{D}(p,q)\exp[\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}(pdq - Hdt)]\,\delta(q''-q(t''))\,\delta(q'-q(t')) \qquad /2/$$

имеет характер условной вероятности, а многоточечные функции Грина - условных средних из теории вероятностей. В зависимости от выбора $Q_\alpha$ можно получать разные результаты, что соответствует разным квантованиям классической системы. В настоящей работе мы продемонстрируем это на отдельных примерах. В них соответствующие амплитуды перехода за малое $\Delta t$

$$\mathcal{G}(q'',t'';q',t') = \theta(\Delta t)\int_{(C)} d\mu_Q(C)\exp(\frac{i}{\hbar}\Delta\phi_{Q=C}) \qquad /3/$$

обладают полугрупповым свойством, описываемым уравнением Смолуховского-Эйнштейна-Колмогорова-Чепмена-Маркова

$$\hat{\mathcal{G}}_{t''t}\,\hat{\mathcal{G}}_{tt'} = \hat{\mathcal{G}}_{t''t'} \quad : \; t'<t<t'', \qquad /4/$$

где $\hat{\mathcal{G}}_{t''t'}$ есть интегральный оператор с ядром /3/, а $\theta(\Delta t)$ - функция Хевисайда. Тогда для пропагатора за конечное время $\Delta t$ /2/ получаем

$$\hat G = \lim_{N\to\infty}\hat{\mathcal{G}}_{t''t_N}\,\hat{\mathcal{G}}_{t_N t_{N-1}}\cdots\hat{\mathcal{G}}_{t_1 t'} = \hat{\mathcal{G}}_{t''t'}$$

/здесь $t'<t_1<\ldots<t_{N-1}<t_N<t''$/.

В ключевой для нас формуле /3/

$$\Delta\phi_{Q=C} = \phi_Q(p'',q'',t'';t') - \phi_Q(p',q',t';t') = \int_{t'}^{t''}(pdq - Hdt), \qquad /5/$$

где переменные $(p'',q'',t'')$ и $(p',q',t')$ связаны соотношением /1/, т.е.



$\Delta\phi_{Q=C}$ есть приращение классического действия при движении по траектории, соединяющей эти две точки на поверхности $M^{n+1}_{pt}(Q)$. Техника вычисления $\phi_Q$ излагается в [11]. Здесь приведем лишь формулу

$$d\phi_Q = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha dq_\alpha - Hdt - \sum_{\alpha=1}^{n} P_\alpha dQ_\alpha, \qquad /6/$$

которая дает возможный способ нахождения $\phi_Q$ по заданному полному набору канонически сопряженных первых интегралов системы - $P_\alpha$, $Q_\alpha$.

В отличие от других известных процедур конечномерных аппроксимаций интегралов по путям [1-9], при помощи /5/ и /6/ мы вычисляем точно приращение действия на путях из выбранного класса в случае гамильтониана $H(p,q,t)$ общего вида.

В этой работе мы будем иметь дело только с ориентируемыми поверхностями Майера с простейшей топологией - объединения несвязанных компонент, которые являются топологически-связанными, просто связанными дифференцируемыми подмногообразиями размерности $(n+1)$ в $M^{2n+1}_{pqt}$.

Придавая константам $C_\alpha$ в /1/ всевозможные классические значения, получим слоение [16] пространства $M^{2n+1}_{pqt}$, состоящее из гиперповерхностей Майера, которое назовем слоением Майера - $\mathfrak{M}_Q$.

В /3/ проводится суммирование по слоям $\mathfrak{M}_Q$ с мерой

$$d\mu_Q(C) = \frac{d^n C}{(2\pi\hbar)^n}\left(|\partial_C p''_Q|\,|\partial_C p'_Q|\right)^{1/2}, \qquad /7/$$

где $p_Q(q,t;C)$ определяются неявно уравнениями /1/, а $|\partial_C p_Q|$ - соответствующие якобианы. Такое суммирование описывает интерференцию слагаемых $\exp(\frac{i}{\hbar}\Delta\phi_{Q=C})$ из каждого слоя $\mathfrak{M}_Q$, которую естественно назвать интерференцией Майера.

На возможную роль поверхностей Майера при квантовании указывалось еще в [17,18].

Простой выбор

$$Q_\alpha(p,q,t) = p_\alpha \quad : \alpha = 1,\ldots,n$$

приводит к конечномерной аппроксимации полигональными путями, которая дает квантование Борна-Йордана [5,8,9]. Тогда

$$d\mu_Q(p) = \frac{d^n p}{(2\pi\hbar)^n}.$$

Функции $Q_\alpha = p_\alpha$ задают первые интегралы системы только, если $H = H(p)$.

В настоящей работе мы не будем обсуждать вывод /7/ в случае $Q_\alpha(p,q,t)$ общего вида, а ограничимся ее применением в простых конкретных примерах. Важно, что соображения инвариантности определяют меру $d\mu_Q(C)$ однозначно*.

Отметим также общую формулу для матричных элементов квантового гамильтониана $\hat{H}$:

$$\langle q''|\hat{H}|q'\rangle = i\hbar\,\partial_{t''}\,G(q'',t'';q',t')\big|_{\Delta t=+0}\,. \qquad /8/$$

Величина

$$I(q'',q') = G\big|_{\Delta t=+0} \qquad /9/$$

по смыслу должна задавать ядро единичного оператора $\hat{I}$ на гильбертовом пространстве квантовых состояний. Как увидим на примерах, при нашем способе вычисления $G$, /9/ позволяет судить о виде этого пространства и определять его как инвариантное подпространство оператора $\hat{I}$. При этом таких инвариантных пространств может существовать несколько, что дает соответствующее количество способов квантования. Ситуация такого типа не была известна при других способах вычисления интегралов по путям.

II. Перейдем к рассмотрению примеров.

A. <u>Свободная частица с одной степенью свободы</u> $(n=1)$:

Общее решение уравнений Гамильтона с $H = p^2/2m$ есть $p = p_0$, $q = q_0 + p\,\Delta t/m$ и дает возможность написать в качестве полного набора канонически сопряженных первых интегралов начальные условия

$$p_0 = p, \quad q_0 = q - p\,\Delta t/m. \qquad /10/$$

1. Выбор в качестве функций /1/

$$Q = p_0 = p \qquad /11/$$

приводит, согласно /6/, к действию на $M^{2n+1}_{pqt}$

$$\phi_{p_0}(p,q,t;t_0) = pq - \frac{p^2}{2m}\Delta t\,, \qquad /12/$$

---

*Автор благодарен Бертраму Костанту за это замечание.



откуда на поверхностях $Q = p = \text{const}$

$$\Delta\phi_{p_0=p} = p\,\Delta q - \frac{p^2}{2m}\Delta t. \qquad /13/$$

В этом случае $d\mu_{p_0}(p) = dp/2\pi\hbar$, и /3/ дает

$$\mathcal{G} = \Theta(\Delta t)\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\,\Delta t}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\,\frac{m\,\Delta q^2}{2\,\Delta t}\right), \qquad /14/$$

что задает хорошо известную функцию Грина[4]. Так как /14/ удовлетворяет /4/, то $G = \mathcal{G}$. Условие /9/ дает

$$G\big|_{\Delta t=+0} = \delta(q''-q') \qquad /15/$$

и показывает, что пространство состояний при данном способе квантования состоит из квадратично-интегрируемых функций на интервале $q \in (-\infty,\infty)$.

2. Выберем в качестве $Q$ сам гамильтониан. Поскольку $H = H(p)$, /6/ приводит снова к /12/. Однако поверхности

$$Q = \frac{p^2}{2m} = E = \text{const} \qquad /16/$$

уже имеют две несвязанные компоненты – плоскости $p = p_E^{\pm} = \pm\sqrt{2mE}$. Поэтому при каждом значении $E > 0$ на /16/ имеются два пути из $(q',t')$ в $(q'',t'')$, на которых, соответственно,

$$\Delta\phi^{\pm}_{H=E} = \pm\Delta q\sqrt{2mE} - E\,\Delta t. \qquad /17/$$

Учитывая эти пути и имея в виду, что $d\mu_H(E) = \frac{dE}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}}$, получаем

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^+ + \mathcal{G}^- = \theta(\Delta t)\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\,\Delta t}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\,\frac{m\,\Delta q^2}{2\,\Delta t}\right),$$

т.е. результат совпадает с /14/. Его разбиение на части

$$\mathcal{G}^{\pm} = \theta(\Delta t)\int_0^\infty \frac{dE}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}}\,\exp\left[-\frac{i\Delta t}{\hbar}\left(E \mp \frac{\Delta q}{\Delta t}\sqrt{2mE}\right)\right] =$$

$$= \theta(\Delta t)\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\,\Delta t}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\,\frac{m\,\Delta q^2}{2\,\Delta t}\right)\left\{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{i}{2}}\left[C\left(\Delta q\sqrt{\frac{m}{\pi\hbar\,\Delta t}}\right) - iS\left(\Delta q\sqrt{\frac{m}{\pi\hbar\,\Delta t}}\right)\right]\right\},$$

где $C(z)$ и $S(z)$ - интегралы Френеля, соответствует разбиению полной амплитуды перехода на амплитуду перехода с $p>0-\mathcal{G}^+$ и с $p<0-\mathcal{G}^-$.

В рассмотренных случаях /11/ и /16/, из /8/ следует знакомый вид квантового гамильтониана

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}=-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_q^2, \qquad /18/$$

и как классическая, так и квантовая задачи обладают трансляционной симметрией по $q$.

3. Выберем теперь в качестве $Q$ первый интеграл

$$Q=\frac{p_0}{q_0}=p\left(q-\frac{p\Delta t}{m}\right)^{-1}. \qquad /19/$$

Ему соответствует канонически сопряженный первый интеграл $P=$ $=-\frac{1}{2}q_0^2=-\frac{1}{2}\left(q-\frac{p\Delta t}{m}\right)^2$. Из /6/ получаем

$$\phi_Q=\frac{1}{2}pq.$$

Тогда на поверхности $Q=C=\mathrm{const}$

$$\Delta\phi_{Q=C}=\frac{m}{2\Delta t}(q''^2+q'^2)-\frac{m}{2\Delta t}\left[q''^2\left(1+\frac{C\Delta t}{m}\right)^{-1}+q'^2\left(1+\frac{C\Delta t}{m}\right)\right]. \qquad /20/$$

В этом случае

$$d\mu_Q(C)=\frac{dC}{2\pi\hbar}|q'q''|^{1/2}\left(1+\frac{C\Delta t}{m}\right)^{-1}$$

и

$$\mathcal{G}=\theta(\Delta t)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dC}{2\pi\hbar}|q'q''|^{1/2}\left(1+\frac{C\Delta t}{m}\right)^{-1}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta\phi_{Q=C}\right)=$$
$$=\theta(\Delta t)\frac{m}{\hbar\Delta t}\left|\frac{q''}{q'}\right||q'q''|^{1/2}J_0\left(\frac{m|q'q''|}{\hbar\Delta t}\right)\exp\left\{i\left[\frac{m}{2\hbar\Delta t}(q''^2+q'^2)-\pi\right]\right\}. \qquad /21/$$

Легко проверить, что $\mathcal{G}$ удовлетворяет /4/ и, следовательно, совпадает с $G$. Теперь

$$G|_{\Delta t=+0}=2|q'q''|^{1/2}\delta(q''^2-q'^2) \qquad /22/$$



будет ядром единичного оператора на пространстве квадратично интегрируемых функций, только если ограничить их область определения до $(-\infty,0)$, или до $(0,+\infty)$, т.е. этому способу квантования соответствуют две квантовые задачи с разными пространствами квантовых состояний. В обоих случаях из /8/ получаем

$$\hat{H}_Q=\frac{\hat{p}^2}{2m}-\frac{\hbar^2}{8m}\frac{1}{\hat{q}^2}=\frac{1}{2m}|\hat{q}|^{-1/2}\hat{p}|\hat{q}|\hat{p}|\hat{q}|^{-1/2}. \qquad /23/$$

Видно, что выбор слоения Майера в виде /18/ приводит к нестандартному квантованию классической задачи о свободной частице. На возможность квантований такого типа указывалось в /2/.

Важно отметить, что при этом квантовании квантовая задача теряет трансляционную инвариантность, что на первый взгляд вызывает недоумение. Она сохраняет классическую инвариантность с генератором /19/, квантовым аналогом которого является интегральный оператор с ядром

$$\langle q''|\hat{Q}|q'\rangle=$$
$$=-\frac{m}{\Delta t}\delta(q''-q')-\frac{i}{\hbar}\frac{m^2}{2\Delta t^2}|q'q''|^{1/2}\,\mathrm{sign}(q''^2-q'^2)\,e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\Delta t}(q''^2-q'^2)}.$$

Можно проверить, что он удовлетворяет соотношению

$$\partial_t\hat{Q}+\frac{1}{i\hbar}[\hat{Q},\hat{H}_Q]=0, \qquad /24/$$

откуда видно, что $\hat{Q}$ есть зависящий от времени квантовый первый интеграл системы с гамильтонианом /23/. Однако он не является первым интегралом системы с квантовым гамильтонианом /18/.

Полученный результат согласуется с теоремой Ван Хова /19,20/, согласно которой при квантовании нельзя сохранить всю классическую алгебру скобок Пуассона. В частности, нельзя построить квантовый аналог всей алгебры Ли из первых интегралов классической задачи. Напомним, что классическая система с $n$ степенями свободы имеет $2n$ функционально независимых первых интегралов $I(p,q,t)$ /21/. Так как любая функция от них снова есть первый интеграл, то имеется бесконечномерная алгебра Ли из линейно независимых первых интегралов. Все они являются генераторами канонических преобразований симметрии /т.е. преобразований, которые переводят решения уравнений Гамильтона снова в такие решения/. Отрицательный результат Ван Хова показывает, что в квантовой задаче, по сравнению с классической, будут утеряны те или иные симметрии, в зависимости от способа квантования. Наш пример показывает, что, если квантование определено выбором слоения Майера при помощи функций /1/, то в квантовой задаче сохраняются классические симметрии, порожденные генераторами $Q_\alpha$. Наоборот, задание коммутативной алгебры симметрии с размерностью, равной количеству степеней свободы системы, однозначно определяет слоение Майера $\mathfrak{M}_Q$. Тем самым требование переноса такой алгебры симметрии из классической в квантовую задачу однозначно определяет способ квантования. Мы не будем доказывать здесь это общее утверждение.

Следует отметить, что /23/ есть гамильтониан с сингулярным потенциалом, т.е. оператор с отличным от нуля индексом дефекта. Решение формальных проблем, возникающих при работе с такими операторами, описано в [22]. В нашем подходе эти проблемы не очень существенны, поскольку гамильтониан /23/ мы получили после того, как решили квантовую задачу, т.е. из функции Грина /21/.

Выясним класс траекторий, суммирование по которому в интеграле по путям воспроизводит известные результаты [4] в еще двух простых случаях:

Б. Движение в поле постоянной силы $\vec{F} = \mathrm{const}$:

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \vec{F}\cdot\vec{r}. \qquad /25/$$

Полный набор канонически сопряженных первых интегралов задают начальные условия, как функции на $M^{2n+1}_{pqt}$:

$$\vec{p}_0 = \vec{p} - \vec{F}\,\Delta t, \quad \vec{r}_0 = \vec{r} - \frac{\vec{p}}{m}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2m}\vec{F}.$$

Выберем слоение Майера при помощи полного инволютивного набора:

$$\vec{Q} = \vec{p}_0 = \vec{p} - \vec{F}\,\Delta t.$$

Тогда /6/ приводит к

$$\phi_{\vec{p}_0} = \vec{p}\cdot\vec{r} - \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2m}\vec{p}\cdot\vec{F} - \frac{\Delta t^3}{6m}\vec{F} \quad ,$$

откуда

$$\Delta\phi_{\vec{p}_0 = \vec{C}} = \vec{C}\cdot\Big(\Delta r - \frac{\Delta t^2}{2m}\vec{F}\Big) - \frac{\Delta t}{2m}\vec{C}^{\,2} + \vec{F}\cdot\vec{r}\,''\Delta t - \frac{\Delta t^3}{6m}\vec{F}^{\,2}.$$

Из /7/ видно, что $d\mu_{\vec{p}_0}(\vec{C}) = d^3\vec{C}/(2\pi\hbar)^3$, и тогда при помощи /3/, проверяя /4/, получаем знакомый результат [4]:

$$G = \theta(\Delta t)\Big(\frac{m}{2\pi i\hbar\,\Delta t}\Big)^{3/2}\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\Big[\frac{m}{2\Delta t}\vec{\Delta r}^{\,2} + \frac{\Delta t}{2}\vec{F}\cdot(\vec{r}\,'' - \vec{r}\,') - \frac{\Delta t^3}{24}\vec{F}^{\,2}\Big]\Big\}. \qquad /27/$$



В. Трехмерный гармонический осциллятор

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\vec{r}^{\,2}. \qquad /28/$$

В этом случае

$$\vec{p}_0 = \vec{p}\cos\omega\,\Delta t + m\omega\,\vec{r}\sin\omega\,\Delta t, \quad \vec{r}_0 = \vec{r}\cos\omega\,\Delta t - \frac{\vec{p}}{m\omega}\sin\omega\,\Delta t.$$

Слоение Майера выберем при помощи инволютивного набора первых интегралов

$$\vec{G} = \vec{p}_0 = \vec{p}\cos\omega\,\Delta t + m\omega\,\vec{r}\sin\omega\,\Delta t.$$

Тогда из /6/ и /7/ получаем соответственно:

$$\phi_{\vec{p}_0} = \vec{p}\cdot\vec{r}\cos^2\omega\,\Delta t - \frac{1}{4m\omega}(\vec{p}^{\,2} - m^2\omega^2\vec{r}^{\,2})\sin(2\omega\,\Delta t),$$

$$d\mu_{\vec{p}_0}(\vec{C}) = \frac{d^3\vec{C}}{(2\pi\hbar)^3}(\cos\omega\,\Delta t)^{3/2}.$$

В результате интерференции Майера, согласно /3/, получаем амплитуду перехода

$$\mathcal{G} = \theta(\Delta t)\Big(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega\,\Delta t}\Big)^{3/2}\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\,\frac{m\omega}{2\sin\omega\,\Delta t}\big[(\vec{r}\,''^{2} + \vec{r}\,'^{2})\cos\omega\,\Delta t - 2\vec{r}\,''\cdot\vec{r}\,'\big]\Big\}, \qquad /29/$$

которая удовлетворяет условию /4/ и воспроизводит известный результат для G [4].

Таким образом, мы продемонстрировали на простейших примерах некоторые возможности и особенности предлагаемой процедуры вычисления интегралов по путям. Главная ее черта - четкое определение класса путей, по которому ведется суммирование в интеграле по путям. Как мы убедились, этот класс следует задавать при помощи слоения Майера $\mathfrak{M}_Q$ в классическом пространстве состояний. Это эквивалентно заданию процедуры квантования классической задачи и позволяет проследить связь между квантованием и симметриями.

Продемонстрировано, что при квантовании нельзя сохранить все классические симметрии, что, возможно, бросает свет на актуальную проблему квантования задачи о релятивистской струне, связанной с квантовой хромодинамикой. Как известно [23], применяемые в этой задаче способы квантования приводят к потере лоренц-инвариантности на квантовом уровне. Возможно, что это связано с неудачно выбранным способом квантования.

В нашем подходе удается описать, казалось бы, чисто квантовую проблему квантования полностью на классическом языке. Подобные результаты наметились и в формализме геометрического квантования [24], связь которого с нашим подходом желательно проследить более детально.

Открытыми вопросами остаются полное обоснование выражения /7/ для $d\mu_Q$ в общем случае, а также детальное изучение связи между выбором слоения Майера $\mathfrak{M}_Q$ и выбором квантования.

С физической точки зрения остается основным вопрос о смысле разных квантований. Можно надеяться, что сведение проблемы квантования к выбору чисто классического объекта - слоение Майера, и намеченная выше связь с симметриями задачи, позволят разобраться в этой принципиальной проблеме, оставшейся нерешенной со времен создания квантовой механики.

Автор глубоко признателен Б.М.Барбашову за поддержку, постоянный интерес к работе и многочисленные обсуждения, а также И.С.Златеву, И.Т.Тодорову, А.Д.Донкову и В.В.Нестеренко за стимулирующие дискуссии на разных этапах выполнения работы.

Особенно приятно поблагодарить В.Н.Попова и В.С.Буслаева за обсуждение нового способа аппроксимаций интегралов по путям, а также Б.Костанта и А.А.Кириллова за дискуссии по математическим проблемам этого способа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Березин Ф.А. ТМФ, 1971, 6, с.194; УФН, 1980, 132, с.497.
2. Schrödinger E. Ann.Phys., 1926, 79, p.734.
3. Feynman R. Phys.Rev., 1951, 84, p.108.
4. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. "Мир", М., 1968.
5. Garrod C. Rev.Mod.Phys., 1966, 38, p.483.
6. Popov V.N. Preprint CERN TH 2424, Geneva, 1977.
7. Попов В.Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. Атомиздат, М., 1976.
8. Kerner E.H., Sutcliffe W.G. J.M.Phys., 1970, 11, p.391.
9. Алимов А.Л. ТМФ, 1972, 11, с.182.
10. Fiziev P.P., Bulg .J.Phys., 1983, 10, p.27.
11. Физиев П.П. ОИЯИ, Р2-81-52, Дубна, 1981.
12. Физиев П.П. ОИЯИ, Р2-81-742, Дубна, 1981.
13. Буслаев В.С. Вариационное исчисление. Изд-во ЛГУ, Л., 1980.
14. Faddeev L.D., Popov V.N. Phys.Lett., 1967, 25B, p.29.
15. Фаддеев Л.Д. ТМФ, 1969, 1, с.1.
16. Тамура И. Топология слоений. "Мир", М., 1979.
17. Dirac P.A.M. Can.J.Math., 1951, 3, p.1.
18. Singe J.L. Phys.Rev., 1953, 89, p.467; Geometrical Mechanics and de Brogle Waves. Cambridge, 1954.



19. Van Hove L. Proc. Roy. Acad. Sci. Belgium, 1951, 26, p.1.
20. Chernoff P.R. Hadronic J., 1981, 4, p.879.
21. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. "Наука", М., 1979.
22. Наймарк М.А. Линейные операторы. "Наука", М., 1969.
23. Goddard P. et al. Nucl.Phys., 1973, B56, p.109.
24. Sims D.J., Woodhouse N.M.J. Lect.Not.Phys., Springer, N.Y., 1976, p.53.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 августа 1983 года.

## НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

| | | |
|---|---|---|
| Д3-11787 | Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978. | 3 р. 00 к. |
| Д13-11807 | Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978. | 6 р. 00 к. |
| | Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/ | 7 р. 40 к. |
| Д1,2-12036 | Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978 | 5 р. 00 к. |
| Д1,2-12450 | Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978. | 3 р. 00 к. |
| | Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/ | 8 р. 00 к. |
| Д11-80-13 | Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979 | 3 р. 50 к. |
| Д4-80-271 | Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979. | 3 р. 00 к. |
| Д4-80-385 | Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980. | 5 р. 00 к. |
| Д2-81-543 | Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981 | 2 р. 50 к. |
| Д10,11-81-622 | Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980 | 2 р. 50 к. |
| Д1,2-81-728 | Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981. | 3 р. 60 к. |
| Д17-81-758 | Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981. | 5 р. 40 к. |
| Д1,2-82-27 | Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981. | 3 р. 20 к. |
| Р18-82-117 | Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981. | 3 р. 80 к. |
| Д2-82-568 | Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982. | 1 р. 75 к. |
| Д9-82-664 | Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982. | 3 р. 30 к. |
| Д3,4-82-704 | Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982. | 5 р. 00 к. |

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Физиев П.П. Р2-83-580

Некоторые показательные примеры интерференции Майера в интеграле по путям

Предлагается новая процедура вычисления интегралов по путям методом конечномерных аппроксимаций, основанная на установленной раньше необходимости в выделении множества классических путей, по которым проводится суммирование. Показано, что выбор класса путей ведет к выбору процедуры квантования, и прослеживается связь с симметриями задачи. Вводится понятие "Интерференция Майера" и проводится ее исследование на простейших примерах. Продемонстрирована возможность получения информации о пространстве квантовых состояний из интеграла по путям. Установлен класс путей, суммирование по которым, в рамках предлагаемого подхода, воспроизводит известные результаты в случае движения в поле постоянной силы, и в случае гармонического осциллятора.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Fiziev P.P. P2-83-580

Some Instructive Examples of Mayer's Interference in Path Integral

A new technique is proposed for evaluation of path integrals by means of a discretization procedure. It is based on the previously established necessity to single out the set of classical trajectories along which the summation is performed. The notion of Mayer's interference is introduced and is illustrated on a number of sinple examples. It is shown that the choice of the set of paths induced a corresponding quantization procedure and this line is followed to demonstrate its connection with the symmetries of the problem. The possibility is shown of extracting information about the space of quantum states from the path integral. A class of paths is established the summation over which in the framework of the suggested approach leads to the well-known results for the motion in a homogeneous field and for the harmonic oscillator.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой