объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-83-575

А.А.Леонович, А.Б.Пестов

АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ФЕЙНМАНА-ГЕЛЛ-МАННА И ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КУЛОНОВСКОЙ ПРОБЛЕМЫ ДЛЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1983

Как известно [1,2], экзотические атомы, образованные K^--мезонами, антипротонами, Σ^--гиперонами, наблюдались экспериментально. Кулоновские силы могут удерживать около ядра и Ω^--гипероны. Квадруплетное расщепление энергетических уровней, которое должны производить Ω^--гипероны, может служить средством для измерения магнитного момента таких частиц. В связи с этим встает вопрос о математической модели водородоподобной системы с Ω^--орбитальной частицей. Уравнение Рариты-Швингера не годится для этой цели в силу известных причин [3].

Здесь предлагается описывать Ω^--гиперон симметричным спинором третьего ранга, который подчиняется уравнению типа Фейнмана-Гелл-Манна. Рассмотрение кулоновской задачи в рамках этого уравнения показывает, что она решается точно, а формула для дискретного энергетического спектра имеет квадруплетную структуру. Этот результат, по-видимому, свидетельствует в пользу ведущихся экспериментальных поисков Ω^--гиперонных адронных атомов.

Симметричный спинор 3-го ранга ϕ_{ABC} реализует представление (0, 3/2) группы Лоренца и подчиняется уравнению

$$(\nabla^a \nabla_a + m^2)\phi_{ABC} = \frac{e}{2} F^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}{}^{D}{}_{(A}\phi_{BC)D}, \qquad /1/$$

где

$$\nabla_a = \partial_a - ieA_a, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

тензор электромагнитного поля,

$$\sigma_{\mu\nu AB} = \sigma_{\mu A\dot D}\,\sigma_{\nu B}{}^{\dot D} - \sigma_{\nu A\dot D}\,\sigma_{\mu B}{}^{\dot D}.$$

Спинорные индексы поднимаются по обычному правилу

$$\phi^A = \epsilon^{AB}\phi_B \iff \phi_A = \phi^B \epsilon_{BA},$$

$$\epsilon_{AB} = \epsilon_{\dot A\dot B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon^{AB} = \epsilon^{\dot A\dot B}.$$

Метрика пространства Минковского задается тензором

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Круглые скобки обозначают симметризацию. Если ввести матрицы для спина 3/2

$$S_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

то уравнение /1/ можно представить в форме, удобной для решения задачи о движении в кулоновском поле.

$$\{(\frac{\partial}{\partial t} - ieA_0)^2 - (\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 + m^2\}\psi = -e(\vec{H} + i\vec{E})\cdot\vec{S}\psi, \qquad /2/$$

где ψ - столбец из четырех элементов. Волновая функция ψ, представляющая состояние с энергией ϵ, изменяется со временем по закону $\psi = e^{-i\epsilon t}\psi(\vec{r})$. Разложим $\psi(\vec{r})$ по шаровым тензорам $Y^{LS}_{JM}(\theta,\phi)$ ранга 3/2.

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{L=|J-\frac{3}{2}|}^{J+\frac{3}{2}} \psi_L(r)\, Y^{L\frac{3}{2}}_{JM}(\theta,\phi). \qquad /3/$$

Подставляя /3/ в /2/ и используя соотношения, задающие действие операторов $\vec{\nabla}$ и $(\vec{S}\cdot\vec{n})$ на шаровые тензоры[4], получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Dq = \frac{1}{r^2}\Lambda q, \qquad /4/$$

где

$$D = (\epsilon + \frac{\alpha}{r^2})^2 - m^2 + \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}, \quad \alpha = Ze^2,$$

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{J+\frac{3}{2}} \\ -i\psi_{J+\frac{1}{2}} \\ \psi_{|J-\frac{1}{2}|} \\ -i\psi_{|J-\frac{3}{2}|} \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} (J+\frac{3}{2})(J+\frac{5}{2}) & \alpha\sqrt{\frac{3J}{J+1}} & 0 & 0 \\ -\alpha\sqrt{\frac{3J}{J+1}} & (J+\frac{1}{2})(J+\frac{3}{2}) & -\alpha\sqrt{\frac{(2J+3)(2J-1)}{J(J+1)}} & 0 \\ 0 & \alpha\sqrt{\frac{(2J+3)(2J-1)}{J(J+1)}} & (J-\frac{1}{2})(J+\frac{1}{2}) & \alpha\sqrt{\frac{3(J+1)}{J}} \\ 0 & 0 & -\alpha\sqrt{\frac{3(J+1)}{J}} & (J-\frac{3}{2})(J-\frac{1}{2}) \end{pmatrix}.$$

Так как $|\Lambda| \neq 0$, то оператор Λ можно привести к диагональной форме. Собственные значения Λ находятся решением характеристического уравнения

$$|\Lambda - \lambda I| = 0. \qquad /5/$$

Как известно, алгебраическое уравнение четвертой степени разрешимо в радикалах. Соответствующие формулы можно найти в[5]. Таким образом, линейным преобразованием система уравнений /4/ сводится к одному уравнению

$$DQ = \frac{\lambda}{r^2}Q,$$

где λ - корни характеристического уравнения /5/. Удобно ввести новую независимую переменную $x = 2r\sqrt{m^2-\epsilon^2}$. Сделав подстановку $Q = 2Y\sqrt{(m^2-\epsilon^2)/x}$, для функции $Y(x)$ получим уравнение

$$x\frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{dY}{dx} + (-\frac{x}{4} + \beta - \frac{s^2}{4x})Y = 0, \qquad /6/$$

где

$$\beta = \frac{\alpha\epsilon}{\sqrt{m^2-\epsilon^2}}, \quad s^2 = 4\lambda + 1 - 4\alpha^2. \qquad /7/$$

Уравнение /6/ подробно исследовано в[6]. Его решения выражаются через обобщенные полиномы Лагерра, а параметр β принимает значения

$$\beta = \frac{s+1}{2} + n, \quad n = 0,1,2,\dots . \qquad /8/$$

Из /7/ и /8/ следует формула для уровней энергии

$$\epsilon = m\left[1 + \frac{\alpha^2}{(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4} - \alpha^2})^2}\right]^{-1/2},$$

где, напоминаем, λ - корни алгебраического уравнения /5/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллов-Угрюмов В.Г., Никитин Ю.П., Сергеев Ф.М. Атомы и мезоны. Атомиздат, М., 1980.

2. Бетти С.Дж. Экзотические атомы. ЭЧАЯ; 1982, т.13, вып.1, с.164.
3. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. Атомиздат, М., 1980.
4. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. "Наука", Л., 1975.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. "Наука", М.,1976.
6. Фок В.А. Начала квантовой механики. "Наука", М., 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 августа 1983 года.

Леонович А.А., Пестов А.Б. Р2-83-575

Аналог уравнения Фейнмана-Гелл-Манна
и точное решение релятивистской проблемы
для заряженной частицы со спином 3/2

Предложено описывать Ω^--гипероны симметричным спинором третьего ранга, который подчиняется уравнению типа Фейнмана-Гелл-Манна. Для случая движения в кулоновском поле получена точная релятивистская формула для дискретных уровней энергии.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Leonovich A.A., Pestov A.B. P2-83-575

An Analog of the Feynman-Gell-Mann Equation
and Exact Solution of the Relativistic Coulomb Problem
for a 3/2 Charged Spin Particle

A relativistic wave equation is proposed for a 3/2 charged spin particle. The wave function for such a particle is represented by a three-rank symmetric spinor. The equation proposed is similar to the known Feynman-Gell-Mann equation for 1/2 spin particles. An exact spectral formula is obtained for the problem of motion in the Coulomb field.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой