31/x-83

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

9/II-83

P2-83-524

Б.М.Барбашов, А.А.Леонович

КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНАЯ ТЕОРИЯ ВЕКТОРНОГО И БИВЕКТОРНОГО ПОЛЕЙ

Направлено в журнал "Letters in Mathematical Physics".

1983

ВВЕДЕНИЕ

Согласно принципу конформной инвариантности полевые уравнения для безмассовых частиц должны быть конформно-инвариантными, а след тензора энергии-импульса должен равняться нулю[1-3]. Как известно, уравнения Максвелла и уравнение Дирака при $m = 0$ конформно-инвариантны. Конформно-инвариантное уравнение для скалярного поля в 4-мерном пространстве-времени было предложено Пенроузом[1]. В работе[2] был найден соответствующий метрический тензор энергии-импульса скалярного поля, свойства которого изучались затем в работе[4]. Принцип конформной инвариантности имеет большое эвристическое значение, так как несет с собой сильные ограничения на возможные типы взаимодействий[2-5].

Уравнение Пенроуза-Черникова-Тагирова для скалярного поля и уравнение Дирака для спинора характеризуются тем, что они конформно-инвариантны при любой размерности пространства-времени[2,6]. Для уравнений Максвелла существенно, чтобы $n = 4$[7]. Поэтому представляет интерес вопрос о существовании конформно-инвариантных уравнений для векторного поля в пространстве произвольной размерности.

В работе[8] было введено понятие о нотофе - частице, дополняющей по своим свойствам фотон. Роль потенциала при этом играет бивектор. Однако предложенные в [8] уравнения для нотофа не являются конформно-инвариантными. Здесь показано, что бивектор можно подчинить конформно-инвариантному уравнению второго порядка в пространстве произвольной размерности.

Мы изучаем вопрос о конформно-инвариантных уравнениях для вектора и бивектора в римановом пространстве произвольной размерности, потому что это не создает дополнительных трудностей, а полученные формулы могут представлять и чисто геометрический интерес.

Прежде чем перейти к рассмотрению уравнений для вектора и бивектора, введем основные понятия и определения на примере уравнения для скалярного поля[1-2].

1. Скалярное поле. В n-мерном римановом пространстве поведение скалярных частиц характеризуется уравнением[2]

$$\Lambda\phi = \Box\phi + \frac{n-2}{4(n-1)} R\phi = 0 \qquad /1/$$

и тензором энергии-импульса[2]

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\phi_\mu\phi_\nu + \phi_\nu\phi_\mu) - L g_{\mu\nu} - \frac{n-2}{4(n-1)}(R_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)\phi^2, \qquad /2/$$

где

$$L = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\beta - \frac{n-2}{8(n-1)} R\phi^2 \qquad /3/$$

– лагранжиан, R – скалярная кривизна, $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи, ∇_μ – ковариантная производная, $\Box = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta$, $\phi_\mu = \nabla_\mu\phi$, $\nabla_\mu\phi_\nu = \partial_\mu\phi_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\phi_\lambda$.

Для уравнения движения /1/ $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ и след тензора энергии-импульса равен нулю: $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \frac{n-2}{2}\phi\Lambda\phi = 0$. При конформном отображении риманова пространства[9]

$$'g_{\mu\nu} = e^{2\sigma} g_{\mu\nu}, \qquad 'g^{\mu\nu} = e^{-2\sigma} g^{\mu\nu}, \qquad /4/$$

$$'\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \Gamma^\nu_{\alpha\beta} + \sigma_\alpha\delta^\nu_\beta + \sigma_\beta\delta^\nu_\alpha - \sigma^\nu g_{\alpha\beta}, \qquad /5/$$

$$'R = e^{-2\sigma}[R + 2(n-1)\Delta_2\sigma + (n-1)(n-2)\Delta_1\sigma],$$

$$\Delta_1\sigma = g^{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta, \qquad \Delta_2\sigma = g^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha\beta} \qquad /6/$$

скалярное поле ϕ и уравнение /1/ преобразуются следующим образом:

$$\phi' = e^{\frac{2-n}{2}\sigma}\phi, \qquad /7/$$

$$\Lambda'\phi' = e^{-\frac{n+2}{2}\sigma}\Lambda\phi. \qquad /8/$$

Оператор $\hat{K}$, который скаляру ϕ ставит в соответствие скаляр

$$\hat{K}\phi = K^\mu\nabla_\mu\phi + \frac{n-2}{2}F\phi, \qquad /9/$$

где векторное поле K_μ удовлетворяет конформным уравнениям Киллинга

$$\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 2Fg_{\mu\nu}, \qquad F = \frac{1}{n}\nabla_\alpha K^\alpha, \qquad /10/$$

коммутирует с оператором Λ, то есть действует в пространстве решений уравнения движения /1/. Оператор $\hat{K}$ называется оператором конформного момента импульса скалярного поля ϕ[8].

Принципиальной особенностью уравнения /1/ является наличие слагаемого с кривизной, обеспечивающего конформную инвариантность. Теперь перейдем к исследованию уравнений для вектора и бивектора.

2. Векторное поле. Рассмотрим линейное уравнение второго порядка для вектора A_μ в римановом пространстве

$$\Lambda A_\mu = b\nabla^\alpha\nabla_\alpha A_\mu + c\nabla^\alpha\nabla_\mu A_\alpha + d\nabla_\mu\nabla^\alpha A_\alpha + eRA_\mu = 0, \qquad /11/$$

где b, c, d, e – безразмерные константы. Докажем конформную инвариантность уравнения /11/ при определенном выборе этих констант. При конформном отображении риманова пространства /4/-/6/ векторное поле A_μ и уравнение /11/ преобразуются следующим образом:

$$A'_\mu = e^{a\sigma}A_\mu, \qquad /12/$$

$$'g^{\alpha\beta}\nabla'_\alpha\nabla'_\beta A'_\mu = e^{-2\sigma}\{e^{a\sigma}\nabla^\alpha\nabla_\alpha A_\mu + A'_\mu[(-a^2+2-n)\Lambda_1\sigma + (a-1)\Lambda_2\sigma] +$$
$$+ A'_\alpha\sigma^\alpha\sigma_\mu(2-n) - 2\sigma_\mu\nabla^\alpha A'_\alpha + (2a-4+n)\sigma^\alpha\nabla_\alpha A'_\mu + 2\sigma^\alpha\nabla_\mu A'_\alpha\}. \qquad /13/$$

$$'g^{\alpha\beta}\nabla'_\alpha\nabla'_\mu A'_\beta = e^{-2\sigma}\{e^{a\sigma}\nabla^\alpha\nabla_\mu A_\alpha + A'_\mu[-\Lambda_2\sigma + (2-n)\Delta_1\sigma] +$$
$$+ (\nabla^\alpha A'_\alpha)\sigma_\mu(a-2) + A'_\alpha[a\sigma^\alpha_{,\cdot\mu} + \sigma^\alpha\sigma_\mu(2-n-a^2)] + (a+n-2)\sigma^\alpha\nabla_\mu A'_\alpha\},$$

$$'g^{\alpha\beta}\nabla'_\mu\nabla'_\alpha A'_\beta = e^{-2\sigma}\{e^{a\sigma}\nabla_\mu\nabla^\alpha A_\alpha + A'_\alpha[(a-2+n)\sigma^\alpha_{,\cdot\mu} + (4-2n-a^2)\sigma^\alpha\sigma_\mu] +$$
$$+ (\nabla^\alpha A'_\alpha)\sigma_\mu(a-2) + (a+n-2)\sigma^\alpha\nabla_\mu A'_\alpha\},$$

$$R'A'_\mu = e^{-2\sigma}[R + 2(n-1)\Delta_2\sigma + (n-1)(n-2)\Delta_1\sigma]e^{a\sigma}A_\mu.$$

Отсюда следует, что

$$\Lambda'A'_\mu = e^{(a-2)\sigma}\Lambda A_\mu, \qquad /14/$$

если выполняется следующая система уравнений

$$\begin{aligned}
&b(-a^2+2-n) + c(2-n) + e(n-1)(n-2) = 0,\\
&b(n-1) - c + e2(n-1) = 0,\\
&-2b + (c+d)(a-2) = 0,\\
&b(2a-4+n) = 0, \qquad\qquad /15/\\
&2b + (c+d)(a+n-2) = 0,\\
&ca + d(a+n-2) = 0,\\
&c(2-n-a^2) + d(4-2n-a^2) + b(2-n) = 0.
\end{aligned}$$

Решение системы /15/ имеет вид

$$a = \frac{4-n}{2}, \quad b = \frac{n-2}{2}, \quad c = -1, \quad d = \frac{4-n}{n}, \quad e = \frac{n(n-4)}{8(n-1)}, \qquad /16/$$

что доказывает конформную инвариантность уравнения /11/. В 4-мерном пространстве-времени уравнение /11/ с коэффициентами /16/ переходит в уравнение Максвелла. Таким образом, конформно-инвариантное уравнение /11/ с коэффициентами /16/ обобщает уравнение Максвелла для векторного поля в 4-мерии на случай пространства-времени произвольной размерности. Уравнение /11/ может быть получено из лагранжиана

$$2L = A^{\mu}\Lambda A_{\mu} - b\nabla^{\alpha}(A^{\mu}\nabla_{\alpha} A_{\mu}) - c\nabla^{\alpha}(A^{\mu}\nabla_{\mu}A_{\alpha}) - d\nabla^{\alpha}(A_{\alpha}\nabla_{\mu}A^{\mu}). \qquad /17/$$

Применяя к /17/ способ вывода симметричного тензора энергии-импульса, указанный в [10], получаем

$$T_{ab} = \frac{1}{2}(\pi^{\sigma}_{a\cdot}\nabla_b A_{\sigma} + \pi^{\sigma}_{b\cdot}\nabla_a A_{\sigma}) + \nabla^{c}(\pi^{\sigma}_{a\cdot}S_{bc}A_{\sigma} + \pi^{\sigma}_{b\cdot}S_{ac}A_{\sigma}) - \qquad /18/$$

$$- g_{ab}L + e(R_{ab} + \nabla_a\nabla_b - g_{ab}\Box)(A_{\sigma}A^{\sigma}),$$

где

$$S_{bc}A_{\sigma} = \frac{1}{2}(g_{b\sigma}A_c - g_{c\sigma}A_b),$$

$$\pi_{\alpha\mu} = \frac{\partial L}{\partial\nabla^{\alpha}A^{\mu}} = -b\nabla_{\alpha}A_{\mu} - c\nabla_{\mu}A_{\alpha} - dg_{\mu\alpha}\nabla_{\sigma}A^{\sigma}.$$

След тензора энергии-импульса /18/ при выполнении уравнений движения /11/ равен нулю:

$$T = g^{ab}T_{ab} = \pi_{a\sigma}\nabla^{a}A^{\sigma} + \nabla^{\sigma}(g^{\alpha\mu}\pi_{\alpha\mu}A_{\sigma} - \pi_{a\sigma}A^{a}) - nL + \qquad /19/$$

$$+ e[R + (1-n)\Box](A^{\sigma}A_{\sigma}) = \frac{2-n}{2}A^{\mu}\Lambda A_{\mu} = 0,$$

что находится в соответствии с принципом конформной инвариантности.

Оператор конформного момента импульса векторного поля A_{α}

$$\hat{K}A_{\alpha} = K^{\mu}\nabla_{\mu}A_{\alpha} + A_{\mu}\nabla_{\alpha}K^{\mu} + \frac{n-4}{2}FA_{\alpha}, \qquad /20/$$

где K_{μ} удовлетворяет /10/, коммутирует с оператором полевого уравнения /11/ с коэффициентом /16/, то есть действует в пространстве решений этого уравнения.

3. Бивекторное поле. Аналогичным образом доказывается конформная инвариантность уравнения для $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$:

$$\Lambda A_{\mu\nu} = b\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}A_{\mu\nu} + c\nabla^{\alpha}(\nabla_{\mu}A_{\alpha\nu} - \nabla_{\nu}A_{\alpha\mu}) + eRA_{\mu\nu} + hR_{\mu\nu\alpha\beta}A^{\alpha\beta} = 0, \qquad /21/$$

$$b = n-2, \quad c = -4, \quad e = \frac{(n+2)(n-6)}{4(n-1)}, \quad h = 6-n, \qquad /22/$$

которое может быть получено из лагранжиана

$$2L = A^{\mu\nu}\Lambda A_{\mu\nu} - b\nabla^{\alpha}(A^{\mu\nu}\nabla_{\alpha}A_{\mu\nu}) - 2c\nabla^{\alpha}(A^{\mu\nu}\nabla_{\mu}A_{\alpha\nu}). \qquad /23/$$

При конформном отображении /4/-/6/ поле $A_{\mu\nu}$ и уравнения движения /21/-/22/ преобразуются так:

$$A'_{\mu\nu} = e^{a\sigma}A_{\mu\nu}, \qquad /24/$$

$$\Lambda' A'_{\mu\nu} = e^{(a-2)\sigma}\Lambda A_{\mu\nu}, \quad a = \frac{6-n}{2}. \qquad /25/$$

Из-за громоздкости формул выкладки здесь не приводим. Симметричный тензор энергии-импульса [10]

$$T_{ab} = \frac{1}{2}(\pi_{a\cdot\cdot}^{\cdot\sigma\lambda}\nabla_b A_{\sigma\lambda} + \pi_{b\cdot\cdot}^{\cdot\sigma\lambda}\nabla_a A_{\sigma\lambda}) +$$

$$+ \nabla^{c}(\pi_{a\cdot\cdot}^{\cdot\sigma\lambda}S_{bc}A_{\sigma\lambda} + \pi_{b\cdot\cdot}^{\cdot\sigma\lambda}S_{ac}A_{\sigma\lambda}) - g_{ab}L + \qquad /26/$$

$$+ X_{a\cdot\cdot\cdot}^{\cdot ijk}R_{bijk} + X_{b\cdot\cdot\cdot}^{\cdot ijk}R_{aijk} + 2(\nabla^{i}\nabla^{j} + \nabla^{j}\nabla^{i})X_{aijb} +$$

$$+ e(R_{ab} + \nabla_a\nabla_b - g_{ab}\Box)(A_{\mu\nu}A^{\mu\nu}),$$

где

$$\pi_{\alpha\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial\nabla^{\alpha}A^{\mu\nu}} = -b\nabla_{\alpha}A_{\mu\nu} - c(\nabla_{\mu}A_{\alpha\nu} - \nabla_{\nu}A_{\alpha\mu}), \qquad /27/$$

$$X_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}hA_{\mu\nu}A_{\alpha\beta},$$

$$S_{bc}A_{\sigma\lambda} = \frac{1}{2}(g_{b\sigma}A_{c\lambda} - g_{c\sigma}A_{b\lambda} + g_{b\lambda}A_{\sigma c} - g_{c\lambda}A_{\sigma b}), \qquad /28/$$

имеет след, равный нулю при выполнении /21/:

$$T = g^{ab}T_{ab} = \frac{n-2}{2}A^{\mu\nu}\Lambda A_{\mu\nu} = 0. \qquad /29/$$

Оператор конформного момента импульса бивекторного поля $A_{\alpha\beta}$,

$$\hat{K}A_{\alpha\beta} = K^{\mu}\nabla_{\mu}A_{\alpha\beta} + A_{\alpha\mu}\nabla_{\beta}K^{\mu} + A_{\mu\beta}\nabla_{\alpha}K^{\mu} + \frac{n-6}{2}FA_{\alpha\beta}, \qquad /30/$$

где K_μ удовлетворяет /10/, коммутирует с оператором полевого уравнения /21/ с коэффициентами /22/, то есть действует в пространстве решений этого уравнения.

Для уравнений /11/ и /21/ можно определить скалярные произведения в пространстве решений, доказать теоремы об интеграле от тензора энергии-импульса /16,17/. С точки зрения квантовой теории поля представляет несомненный интерес вычисление конформных аномалий для тензора энергии-импульса /25/.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю признательность профессору Н.А.Черникову за обсуждение результатов работы.

Авторы благодарят также Е.А.Иванова, В.В.Нестеренко, А.Б.Пестова, Э.А.Тагирова, Н.С.Шавохину за стимулирующие замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Penrose R. In Relativity, Groups and Topology (C.M. De Witt and B.S. De Witt eds), pp. 565-584; Les Houches Summer School 1963. New York: Gordon and Breach, 1964.
2. Chernikov N.A., Tagirov E.A. Paris, 1968, Ann.Inst.H. Poincare, A9, pp. 109-141.
3. Todorov I., Mintchev M., Petkova V. Conformal Invariant Quantum Field Theory. Quaderni della Scuola Normale Superiore, Pisa, 1978.
4. Coleman S., Jackiw R. Ann.Phys. (N.Y.), 1971, v. 67, p. 552.
5. Tagirov E.A., Todorov I.T. Acta Physica Austriaca, 1979, 51, pp. 135-154.
6. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ТМФ, 1974, 18, № 3, с. 310-317.
7. Пестов А.Б., Черников Н.А., Шавохина Н.С. ТМФ, 1975, 23, № 3, с. 331-334.
8. Огиевецкий В.И., Полубаринов И.В. ЯФ, 1965, 4, вып. 1, с.216.
9. Petrov A.Z. Einstein Spaces. Oxford: Pergamon Press, 1969.
10. Барбашов Б.М., Леонович А.А., Пестов А.Б. ЯФ, 1983, 38, 261, вып. 1.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 августа 1983 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Барбашов Б.М., Леонович А.А. Р2-83-524

Конформно-инвариантная теория векторного и бивекторного полей

Предложены конформно-инвариантные уравнения для вектора и антисимметричного тензора второго ранга в римановом пространстве произвольной размерности. Построены симметричный тензор энергии-импульса с нулевым шпуром и конформный момент импульса.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Barbashov B.M., Leonovich A.A. P2-83-524

Conformally Invariant Theory of the Vector and Antisymmetric Tensor Fields

Conformally invariant equations for vector and antisymmetric tensor in the Riemannian space of arbitrary dimension are proposed. Symmetric traceless energy-momentum tensor and conformal momentum are constructed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой.