объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-83-52

Н.С.Шавохина

КРУГОВОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ ТЕЛ

Направлено в журнал
"Известия вузов. Физика"

1983

Релятивистская задача двух одинаковых тел, притягивающихся друг к другу с постоянной по модулю силой, может быть представлена [1] как задача о двумерной минимальной поверхности в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве $E^4_{(1,3)}$, задаваемой двумя функциями $\xi(t)$ и $\vec{k}(t)$. Ось времени t считаем осью симметрии минимальной поверхности, так что если ее задать в виде

$$\vec{r} = \vec{y}(\eta, t), \qquad /1/$$

то функция y нечетна относительно первого аргумента. Параметр η меняется в пределах

$$-\xi(t) \leq \eta \leq \xi(t), \qquad /2/$$

где $\xi(t)$ - упомянутая выше функция.

Граничные линии $\eta = -\xi(t)$ и $\eta = \xi(t)$ поверхности /1/ рассматриваем как мировые траектории соответственно первого и второго тела. Мировая траектория второго тела записывается также в виде

$$\vec{r} = \vec{x}(t) = \vec{y}(\xi(t), t), \qquad /3/$$

а мировая траектория первого - в виде

$$\vec{r} = -\vec{x}(t) = \vec{y}(-\xi(t), t). \qquad /4/$$

Если импульс второго тела равен $\vec{p}(t)$, то импульс первого равен $-\vec{p}(t)$. Импульс $\vec{p}(t)$ вычисляется по формулам релятивистской механики материальной точки:

$$\vec{p}(t) = p^0(t)\dot{\vec{x}}(t), \qquad /5/$$

где

$$p^0(t) = m[1 - \{\frac{\dot{\vec{x}}(t)}{c}\}^2]^{-1/2}, \qquad /6/$$

m - масса покоя тела, c - скорость света. В качестве краевого условия для минимальной поверхности принимаем

$$p^0(t) + \frac{G}{c^2}\xi(t) = \epsilon, \qquad /7/$$

где G - константа взаимодействия тел, ϵ - константа, равная половине энергии системы.

Что касается функции $\vec{k}(t)$, то она равна

$$\vec{k}(t) = p^0(t)\,\vec{x}(t) + \frac{G}{c^2}\int_0^{\xi(t)} \vec{y}(\eta, t)\,d\eta \qquad /8/$$

и удовлетворяет условию

$$|\dot{\vec{k}}(t)| = G. \qquad /9/$$

С другой стороны, полагаем

$$\vec{y}(\eta, t) = -\frac{c}{2G}\left[\dot{\vec{k}}\left(t + \frac{\eta}{c}\right) - \dot{\vec{k}}\left(t - \frac{\eta}{c}\right)\right], \qquad /10/$$

так что

$$\vec{x}(t) = -\frac{c}{2G}\left[\vec{k}(u(t)) - \vec{k}(v(t))\right], \qquad /11/$$

где

$$u(t) = t + \frac{\xi(t)}{c}, \qquad v(t) = t - \frac{\xi(t)}{c}. \qquad /12/$$

В силу условия /7/ первая квадратичная форма поверхности /1/ равна

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{y}^{\,2} = \cos^2\Delta(\eta, t)\left[c^2dt^2 - d\eta^2\right], \qquad /13/$$

где

$$G^2\cos 2\Delta(\eta, t) = \ddot{\vec{k}}\left(t + \frac{\eta}{c}\right)\ddot{\vec{k}}\left(t - \frac{\eta}{c}\right). \qquad /14/$$

Считая ее регулярной, полагаем

$$-\frac{\pi}{2} < \Delta(\eta, t) < \frac{\pi}{2}. \qquad /15/$$

Обозначая

$$\Delta(t) = \Delta(\xi(t), t), \qquad /16/$$

из /14/ и /12/ находим

$$G^2\cos 2\Delta(t) = \ddot{\vec{k}}(u(t))\,\ddot{\vec{k}}(v(t)), \quad 0 \le \Delta(t) < \frac{\pi}{2}. \qquad /17/$$

По формуле /6/ получаем

$$p^0(t) = \frac{m}{\sqrt{\dot{u}(t)\,\dot{v}(t)}\ \cos\Delta(t)}. \qquad /18/$$

Интеграл, входящий в формулу /8/, берется, так как согласно /10/

$$\frac{G}{c^2}\,\vec{y}(\eta, t) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\vec{k}\left(t + \frac{\eta}{c}\right) + \vec{k}\left(t - \frac{\eta}{c}\right)\right]. \qquad /19/$$

Взяв интеграл, получаем

$$p^0(t)\,\vec{x}(t) = \frac{1}{2}\left[\vec{k}(u(t)) + \vec{k}(v(t))\right]. \qquad /20/$$

Дифференцируя формулу /8/, в силу условия /7/ получаем

$$\dot{\vec{k}}(t) = \vec{p}(t) + \frac{G}{c^2}\int_0^{\xi(t)} \frac{\partial}{\partial t}\vec{y}(\eta, t)\,d\eta. \qquad /21/$$

Подставляя сюда /19/, находим

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{2}\left[\dot{\vec{k}}(u(t)) + \dot{\vec{k}}(v(t))\right]. \qquad /22/$$

Из /5/ и /6/ следует, что

$$p^0(t) = \sqrt{m^2 + \left[\frac{\vec{p}(t)}{c}\right]^2}. \qquad /23/$$

Подставляя сюда /22/, находим наряду с /7/ и /18/ еще одно выражение для $p^0(t)$.

Далее, из формулы /5/ следует, что

$$p^0(t)\,\ddot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{p}}(t) - \dot{\vec{x}}(t)\frac{d}{dt}p^0(t). \qquad /24/$$

Подставляя сюда /7/, /11/ и /12/, находим

$$p^0(t)\,\vec{x}(t) = \frac{1}{2}\left[\ddot{\vec{k}}(u(t)) + \ddot{\vec{k}}(v(t))\right]\dot{u}(t)\,\dot{v}(t). \qquad /25/$$

Эту же формулу можно получить, дифференцируя /21/ и учитывая, что

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\vec{y}(\eta, t) = 0 \qquad /26/$$

и что

$$\ddot{\vec{k}}(t) = -G\frac{\partial}{\partial \eta}\vec{y}(\eta, t)|_{\eta=0} \, . \qquad /27/$$

Релятивистская задача двух одинаковых тел с постоянной по величине силой притягивания, равной G, сводится к тому, чтобы по приведенным выше формулам найти функции $\xi(t)$ и $\vec{k}(t)$.

Мы будем решать эту задачу при условии, что функция $\xi(t)$ не зависит от времени t. При этом условии согласно формулам /7/ и /18/ функции $p^0(t)$ и $\Delta(t)$ также не зависят от времени t, а сами формулы записываются в виде

$$p^0 + \frac{G}{c^2}\xi = c, \qquad /28/$$

$$p^0 = \frac{m}{\cos\Delta} \, . \qquad /29/$$

Из /11/ и /20/ следует, что при $\xi = \mathrm{const}$ функция $k(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{mc}{2\cos\Delta}\left[\dot{\vec{k}}\left(t+\frac{\xi}{c}\right) - \dot{\vec{k}}\left(t-\frac{\xi}{c}\right)\right] = -\frac{G}{2}\left[\vec{k}\left(t+\frac{\xi}{c}\right) + \vec{k}\left(t-\frac{\xi}{c}\right)\right]. \qquad /30/$$

Из формулы /6/ получаем

$$|\dot{\vec{x}}(t)| = c\sin\Delta, \qquad /31/$$

а из формулы /25/ следует, что

$$|\ddot{\vec{x}}(t)| = \frac{G}{m}\cos^2\Delta \, . \qquad /32/$$

На основании нижеследующей теоремы заключаем, что вектор

$$\dddot{\vec{x}}(t) + \omega^2\dot{\vec{x}}(t), \qquad /33/$$

где

$$\omega = \frac{G}{mc}\,\frac{\cos^2\Delta}{\sin\Delta}, \qquad /34/$$

ортогонален к векторам $\dot{\vec{x}}(t)$ и $\ddot{\vec{x}}(t)$.

Теорема

Если векторная функция $\vec{z}(t)$ удовлетворяет условиям $|\vec{z}(t)| = M$, $|\dot{\vec{z}}(t)| = N$, где M и N - положительные константы, то вектор

$$M^2\ddot{\vec{z}}(t) + N^2\vec{z}(t) \qquad /35/$$

ортогонален к двум взаимно ортогональным векторам $\vec{z}(t)$ и $\dot{\vec{z}}(t)$.

Доказательство

Дифференцируя равенства $\vec{z}^2 = M^2$, $\dot{\vec{z}}^2 = N^2$, получаем $\vec{z}\dot{\vec{z}} = 0$, $\dot{\vec{z}}\ddot{\vec{z}} = 0$. Отсюда следует, что вектор /35/ ортогонален к $\dot{\vec{z}}(t)$. Дифференцируя равенство $\vec{z}\dot{\vec{z}} = 0$, получаем $\vec{z}\ddot{\vec{z}} + N^2 = 0$. Отсюда следует, что вектор /35/ ортогонален к $\vec{z}(t)$.

Следствие

Если векторная функция $\vec{z}(t)$ принимает значения из двумерного евклидова пространства E^2, то вектор /35/ равен нулю.

Предположим теперь, что мировая траектория второго тела вложена в трехмерное пространство $E^3_{(1,2)}$. Как это следует из предыдущих результатов, в этом случае функция $\dot{\vec{x}}(t)$ подчиняется уравнению

$$\dddot{\vec{x}}(t) + \omega^2\dot{\vec{x}}(t) = 0, \qquad /36/$$

общее решение которого, удовлетворяющее условию /31/, есть

$$\dot{\vec{x}}(t) = c\sin\Delta\;\vec{g}(\omega t + a), \qquad /37/$$

где a - постоянное число, $\vec{g}(\phi)$ - векторная функция, равная

$$\vec{g}(\phi) = -\vec{i}\sin\phi + \vec{j}\cos\phi, \qquad /38/$$

$\vec{i}$ и $\vec{j}$ - постоянные единичные орты правой либо левой ориентации. По поводу функции /38/ и следующей ниже функции /41/ см./2/.

Из формул /5/, /29/ и /37/ следует, что

$$\vec{p}(t) = mc\,\mathrm{tg}\Delta\ \vec{g}(\omega t + a). \qquad /39/$$

С другой стороны, первообразная функция для /37/ есть

$$\vec{x}(t) = \vec{a} + \frac{mc^2}{G}\,\mathrm{tg}^2\Delta\ \vec{e}(\omega t + a), \qquad /40/$$

где $\vec{a}$ - постоянный вектор, $\vec{e}(\phi)$ - векторная функция, равная

$$\vec{e}(\phi) = \vec{i}\cos\phi + \vec{j}\sin\phi. \qquad /41/$$

Полученные данные /39/ и /40/ позволяют найти функцию $\dot{\vec{k}}(t)$. Подставляя эти данные в формулы /11/ и /22/, находим для нее два выражения, а именно:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{k}}(t + \frac{\xi}{c}) &= -\frac{G}{c}\vec{a} + \frac{G}{\omega}\vec{g}(\omega t + a + \Delta),\\ \dot{\vec{k}}(t - \frac{\xi}{c}) &= +\frac{G}{c}\vec{a} + \frac{G}{\omega}\vec{g}(\omega t + a - \Delta).\end{aligned} \qquad /42/$$

Согласно первому выражению конец вектора $\dot{\vec{k}}(t)$ описывает окружность с центром в точке $-\frac{G}{c}\vec{a}$, а согласно второму - окружность с центром в точке $\frac{G}{c}\vec{a}$. Следовательно, $\vec{a} = 0$ и

$$\vec{x}(t) = \frac{mc^2}{G}\,\mathrm{tg}^2\Delta\ \vec{e}(\omega t + a). \qquad /43/$$

Далее, согласно /42/ имеем

$$\dot{\vec{k}}(t) = \frac{G}{\omega}\vec{g}(\omega t + a + \Delta - \frac{\omega\xi}{c}) = \frac{G}{\omega}\vec{g}(\omega t + a - \Delta + \frac{\omega\xi}{c}).$$

Следовательно,

$$\frac{\omega\xi}{c} = \Delta. \qquad /44/$$

Таким образом,

$$\dot{\vec{k}}(t) = \frac{G}{\omega}\vec{g}(\omega t + a). \qquad /45/$$

Основываясь на /45/, по формуле /10/ находим функцию

$$\vec{y}(\eta, t) = \frac{c}{\omega}\sin\frac{\omega\eta}{c}\,\vec{e}(\omega t + a), \qquad /46/$$

так что минимальная поверхность /1/ является геликоидом/3/. После этого по формуле /8/ находим функцию

$$\vec{k}(t) = \frac{G}{\omega^2}\vec{e}(\omega t + a). \qquad /47/$$

Собирая формулы /44/, /34/, /28/ и /29/, получаем следующее трансцендентное уравнение для угла Δ:

$$\frac{1}{\cos\Delta} + \frac{\Delta\sin\Delta}{\cos^2\Delta} = \frac{\epsilon}{m}. \qquad /48/$$

Отметим также, что

$$\frac{G\xi}{mc^2} = \frac{\Delta\sin\Delta}{\cos^2\Delta}. \qquad /49/$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шавохина Н.С. ДАН СССР, 1982, 265, № 4, с.852.
2. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. Физматгиз, М., 1958.
3. Норден А.П. Теория поверхностей. ГИТТЛ, М., 1956.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 февраля 1983 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги,
если они не были заказаны ранее.

Шавохина Н.С.

Р2-83-52

Круговое релятивистское движение двух одинаковых тел

Рассмотрено круговое релятивистское движение двух тел в качестве решения полученных ранее уравнений с отклоняющимся аргументом, в которых само отклонение аргумента является неизвестной функцией времени. В случае кругового движения отклонение аргумента не зависит от времени и является корнем полученного трансцендентного уравнения.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Shavokhina N.S.

P2-83-52

Circular Relativistic Motion of Two Identical Bodies

The circular relativistic motion of two bodies is considered as a solution of obtained earlier equations with a deviating argument, in which the argument deviation itself is an unknown function of time. In the case of circular motion the argument deviation does not depend on time and is a solution of the transcendental equation derived in the paper.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод автора.