объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-83-506

А.Б.Пестов

О ГРУППЕ ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМОГО ОПЕРАТОРОМ ВНЕШНЕГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Направлено в журнал
"Теоретическая и математическая физика"

1983

В работе [1] было предложено релятивистское волновое уравнение, определяемое операторами внешнего дифференцирования и обобщенной дивергенции, - общее волновое уравнение. Настоящее сообщение посвящено изучению симметрии волнового уравнения, которая не связана с преобразованием координат, - внутренней симметрии. Группа внутренней симметрии позволяет дать физическую интерпретацию общего волнового уравнения, как уравнения, пригодного для описания семейства лептонов, а следовательно, и кварков. Рамки статьи не позволяют изложить эти вопросы одновременно, поэтому мы вынуждены ограничиться здесь исследованием группы внутренней симметрии.

Прежде чем переходить к изучению этой группы, отметим две, по-видимому, главные формально-математические особенности общего волнового уравнения, которые уже и сами по себе резко выделяют его из бесконечного разнообразия всевозможных релятивистски-инвариантных уравнений. Во-первых, как уже отмечалось, общее волновое уравнение определяется оператором внешнего дифференцирования. В математической литературе можно найти доказательство, что это единственный линейный дифференциальный оператор первого порядка, коммутирующий с группой общекоординатных преобразований. Во-вторых, оператор внешнего дифференцирования естественным образом входит в формулировку теоремы Стокса. Поэтому общее волновое уравнение может быть записано как в дифференциальной, так и в интегральной форме. Подчеркнем, что вся современная физика вышла из уравнений Максвелла, которые как раз имеют перечисленные особенности. Далее, уравнение Дирака при определенных условиях, относящихся к геометрии пространства-времени, может быть выведено из общего волнового уравнения и, следовательно, также согласуется с указанными ограничениями.

1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Чтобы наиболее полно осветить связь группы внутренней симметрии с геометрией пространства-времени, следует записать общее волновое уравнение в пространстве Римана-Картана. Как известно, это пространство характеризуется метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ и тензором кручения Э.Картана $K^{\sigma}_{\alpha\beta}$. Коэффициенты связности пространства Римана-Картана выражаются через $g_{\alpha\beta}$, $K^{\sigma}_{\alpha\beta}$ по формуле

$$\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} = \left\{ {}^{\sigma}_{\alpha\beta} \right\} + K^{\sigma}_{\alpha\beta} + g^{\sigma\tau} \left(K^{\nu}_{\tau\alpha} g_{\nu\beta} + K^{\nu}_{\tau\beta} g_{\nu\alpha} \right), \qquad /1/$$

где $\{^{\sigma}_{\alpha\beta}\}$ - символы Кристоффеля тензора $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ - тензор, взаимный тензору $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\tau} g_{\beta\tau} = \delta^{\alpha}_{\beta}$. Ковариантное дифференцирование относительно $\{^{\sigma}_{\alpha\beta}\}$ обозначим через ∇_α.

Форма степени p / p - форма/ - это полностью антисимметричное ковариантное тензорное поле типа $(0, p)$. Обозначим p-форму через F_p. То, что p-форма F_p имеет компоненты $f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(x)$, будет выражаться записью

$$F_p \Rightarrow f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}.$$

Для $p > 4$ антисимметричный тензор тождественно равен нулю. Следовательно, p пробегает значения 0,1,2,3,4. Указанное обстоятельство полезно иметь в виду при выводе многих соотношений. Под формой степени 0 понимается скалярное поле $f(x)$, $F_0 \Rightarrow f$, а под формой степени 1 - ковариантное векторное поле $f_\alpha(x)$, $F_1 \Rightarrow f_\alpha$. Оператор внешнего дифференцирования отображает пространство p-форм в пространство $(p+1)$-форм, причем

$$dF_{p-1} \Rightarrow p\,\partial_{[\alpha_1} f_{\alpha_2 \dots \alpha_p]}.$$

Квадратные скобки обозначают альтернирование.

В отличие от p-форм волновая функция F должна обладать свойством замкнутости относительно внешнего дифференцирования. Отсюда следует, что волновая функция существует как объединение p-форм всех возможных степеней. Входящие в волновую функцию p-векторы F_p назовем ее составляющими и обозначим через $(F)_p$. Тогда $(F)_p = F_p$ и

$$F = F_0 \oplus F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus F_4.$$

Представление волновой функции в виде

$$(F)_p = F_p, \quad p = 0,1,2,3,4,$$

весьма удобно для задания различного рода операторов, т.к. действие любого оператора Q на F задано, если известны составляющие $(QF)_p$ волновой функции QF. Так,

$$(dF)_p = dF_{p-1}, \quad (\lambda F)_p = \lambda F_p,$$

где λ - число. В некоторых случаях удобно записывать волновую функцию, располагая компоненты ее составляющих в строку:

$$F = (f, f_\alpha, f_{\alpha\beta}, f_{\alpha\beta\mu}, f_{\alpha\beta\mu\nu}).$$

Так как пока нет никаких оснований для расширения поля вещественных чисел, то будем предполагать, что $f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(x)$ - действительные функции. Этим объясняется и обозначение волновой функции.

Обозначим через D_e, D_i операторы, такие, что

$$D_e F_{p-1} \Rightarrow p\,\nabla_{[\alpha_1} f_{\alpha_2 \dots \alpha_p]},$$

$$D_i F_{p+1} \Rightarrow -\nabla^{\sigma} f_{\sigma\alpha_1 \dots \alpha_p}.$$

Операторы D_e, D_i алгебраически связаны с оператором внешнего дифференцирования; их действие на волновую функцию задается соотношениями

$$(D_e F)_p = D_e F_{p-1}, \quad (D_i F)_p = D_i F_{p+1}.$$

Чтобы упростить запись многих формул, положим по определению

$$(F, H) = fh + f_\alpha h^\alpha + \frac{1}{2} f_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} + \frac{1}{3!} f_{\alpha\beta\mu} h^{\alpha\beta\mu} + \frac{1}{4!} f_{\alpha\beta\mu\nu} h^{\alpha\beta\mu\nu}.$$

$$(F, H)_\mu = (f h_\mu - h f_\mu) + (f^\alpha h_{\alpha\mu} - h^\alpha f_{\alpha\mu}) + \frac{1}{2}(f^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta\mu} - h^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta\mu}) + \frac{1}{3!}(f^{\alpha\beta\sigma} h_{\alpha\beta\sigma\mu} - h^{\alpha\beta\sigma} f_{\alpha\beta\sigma\mu}).$$

Очевидно, что

$$(F, H) = (H, F), \quad (F, H)_\mu = -(H, F)_\mu. \qquad /2/$$

Проделав соответствующие выкладки, получаем

$$(DF, H) = (F, DH) + \nabla_\sigma S^\sigma, \qquad /3/$$

где

$$D = D_e + D_i, \quad S^\sigma = g^{\sigma\mu} S_\mu, \quad S_\mu = (F, H)_\mu.$$

Если ввести операторы K_e, K_i, такие, что

$$K_e F_{p+1} \Rightarrow pK_{[\alpha_1} f_{\alpha_2 \dots \alpha_p]},$$

$$K_i F_{p+1} \Rightarrow -K^\sigma f_{\sigma\alpha_1 \dots \alpha_p},$$

$$(K_e F)_p = K_e F_{p-1}, \quad (K_i F)_p = K_i F_{p+1},$$

и учесть следующее из /1/ соотношение

$$\nabla_\sigma S^\sigma = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\sigma (\sqrt{-g}\, S^\sigma) + 2K_\sigma S^\sigma ,$$

где $K_\sigma = K^\nu_{\nu\sigma}$ - ковектор кручения, то $\nabla_\sigma S^\sigma$ можно представить так:

$$\nabla_\sigma S^\sigma = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\sigma (\sqrt{-g}\, S^\sigma) + (F, KH) , \qquad /4/$$

где $K = K_e + K_i$. Отметим, что $(F, KH) = -(KF, H)$.

Рассмотрим лагранжиан

$$\mathfrak{L}(F) = \frac{1}{2}(F, DF) + \frac{\lambda}{2}(F, F), \qquad /5/$$

где $\lambda = mc/h$. С помощью /3/, /4/ получаем

$$\mathfrak{L}(F + H) - \mathfrak{L}(F) = (H, DF - KF + \lambda F) + \frac{1}{2}(H, DH - KH + \lambda H) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\sigma (\sqrt{-g}\, S^\sigma). \qquad /6/$$

Отсюда следует, что волновая функция подчиняется уравнению

$$DF - KF + \lambda F = 0. \qquad /7/$$

Таким образом, фундаментальное волновое уравнение представляет собой нераспадающуюся систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned}
&D^\sigma f_\sigma = \lambda f ,\\
&D^\sigma f_{\sigma\alpha} - D_\alpha f = \lambda f_\alpha ,\\
&D^\sigma f_{\sigma\alpha\beta} - D_\alpha f_\beta + D_\beta f_\alpha = \lambda f_{\alpha\beta} ,\\
&D^\sigma f_{\sigma\alpha\beta\mu} - D_\alpha f_{\beta\mu} - D_\beta f_{\mu\alpha} - D_\mu f_{\alpha\beta} = \lambda f_{\alpha\beta\mu} ,\\
&D_\nu f_{\alpha\beta\mu} - D_\alpha f_{\beta\mu\nu} + D_\beta f_{\mu\nu\alpha} - D_\mu f_{\nu\alpha\beta} = \lambda f_{\alpha\beta\mu\nu} ,
\end{aligned} \qquad /8/$$

где $D_\alpha = \nabla_\alpha - K_\alpha$. Подчеркнем, что волновое уравнение может быть записано в интегральной форме, поскольку оператор внешнего дифференцирования входит в формулировку теоремы Стокса. Далее, если F, H - решения волнового уравнения, то из /7/, /8/ следует,

что

$$\partial_\sigma (\sqrt{-g}\, S^\sigma) = 0 .$$

2. О ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть L - линейное пространство волновых функций F. Обозначим через $F \times F$ волновую функцию пространства $L \otimes L$, а через $(F \times F)_{p;q}$, $p, q = 0,1,2,3,4$, ее составляющие. Запись

$$(F \times F)_{p;q} \Rightarrow \phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p ; \tau_1 \ldots \tau_q}$$

означает, что такая-то составляющая имеет такие-то компоненты. Покажем, что тензор $g_{\alpha\beta}$ позволяет задать отображение из L в $L \otimes L$. Положим по определению

$$\begin{aligned}
&g_{\alpha\beta;\tau\sigma} = 2g_{\alpha[\tau} g_{\sigma]\beta} ,\\
&g_{\alpha\beta\mu;\tau\sigma\epsilon} = 3g_{\alpha\beta;[\tau\sigma} g_{\epsilon]\mu} ,\\
&g_{\alpha\beta\mu\nu;\tau\sigma\epsilon\lambda} = 4g_{\alpha\beta\mu;[\tau\sigma\epsilon} g_{\lambda]\nu} .
\end{aligned}$$

Обозначенные тензоры антисимметричны по первой и второй группам индексов. Искомое отображение дается соотношениями

$$q = 0, \qquad /9/$$

$$\phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = f_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} ,$$

$$\begin{aligned}
&q = 1 ,\\
&\phi_{;\tau} = -f_\tau ,\\
&\phi_{\alpha;\tau} = f_{\tau\alpha} + g_{\tau\alpha} f ,\\
&\phi_{\alpha\beta;\tau} = -f_{\tau\alpha\beta} - 2g_{\tau[\alpha} f_{\beta]} ,\\
&\phi_{\alpha\beta\mu;\tau} = f_{\tau\alpha\beta\mu} + 3g_{\tau[\alpha} f_{\beta\mu]} ,\\
&\phi_{\alpha\beta\mu\nu;\tau} = -4g_{\tau[\alpha} f_{\beta\mu\nu]} .
\end{aligned} \qquad /10/$$

$$q = 2,$$

$$\phi_{;\tau\sigma} = f_{\tau\sigma},$$

$$\phi_{\alpha;\tau\sigma} = f_{\tau\sigma\alpha} + g_{\tau\sigma;\gamma\alpha} f^{\gamma},$$

$$\phi_{\alpha\beta;\tau\sigma} = f_{\tau\sigma\alpha\beta} + 2g_{\tau\sigma;\gamma[\alpha} f^{\gamma}_{\cdot\beta]} - g_{\tau\sigma;\alpha\beta} f, \qquad /11/$$

$$\phi_{\alpha\beta\mu;\tau\sigma} = 3g_{\tau\sigma;\gamma[\alpha} f^{\gamma}_{\cdot\beta\mu]} - 3g_{\tau\sigma;[\alpha\beta} f_{\mu]},$$

$$\phi_{\alpha\beta\mu\nu;\tau\sigma} = -6g_{\tau\sigma;[\alpha\beta} f_{\mu\nu]},$$

$$q = 3,$$

$$\phi_{;\tau\sigma\epsilon} = -f_{\tau\sigma\epsilon},$$

$$\phi_{\alpha;\tau\sigma\epsilon} = f_{\tau\sigma\epsilon\alpha} + \frac{1}{2} g_{\tau\sigma\epsilon;\gamma\omega\alpha} f^{\gamma\omega}, \qquad /12/$$

$$\phi_{\alpha\beta;\tau\sigma\epsilon} = g_{\tau\sigma\epsilon;\gamma\alpha\beta} f^{\gamma} - g_{\tau\sigma\epsilon;\gamma\omega[\alpha} f^{\gamma\omega}_{\cdot\cdot\beta]},$$

$$\phi_{\alpha\beta\mu;\tau\sigma\epsilon} = -g_{\tau\sigma\epsilon;\alpha\beta\mu} f - 3g_{\tau\sigma\epsilon;\gamma[\alpha\beta} f^{\gamma}_{\cdot\mu]},$$

$$\phi_{\alpha\beta\mu\nu;\tau\sigma\epsilon} = 4g_{\tau\sigma\epsilon;[\alpha\beta\mu} f_{\nu]},$$

$$q = 4,$$

$$\phi_{;\tau\sigma\epsilon\lambda} = f_{\tau\sigma\epsilon\lambda},$$

$$\phi_{\alpha;\tau\sigma\epsilon\lambda} = \frac{1}{3!} g_{\tau\sigma\epsilon\lambda;\gamma\omega\kappa\alpha} f^{\gamma\omega\kappa}, \qquad /13/$$

$$\phi_{\alpha\beta;\tau\sigma\epsilon\lambda} = -\frac{1}{2} g_{\tau\sigma\epsilon\lambda;\gamma\omega\alpha\beta} f^{\gamma\omega},$$

$$\phi_{\alpha\beta\mu;\tau\sigma\epsilon\lambda} = -g_{\tau\sigma\epsilon\lambda;\gamma\alpha\beta\mu} f^{\gamma},$$

$$\phi_{\alpha\beta\mu\nu;\tau\sigma\epsilon\lambda} = g_{\tau\sigma\epsilon\lambda;\alpha\beta\mu\nu} f.$$

Замечательное свойство установленного отображения заключается в следующем. Пусть $f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ удовлетворяют волновому уравнению,

$$D^{\sigma} f_{\sigma\alpha_1 \dots \alpha_p} - pD_{[\alpha_1} f_{\alpha_2 \dots \alpha_p]} = \lambda f_{\alpha_1 \dots \alpha_p},$$

$$p = 0,1,2,3,4.$$

Тогда из /9/-/13/ следует, что $\phi_{\alpha_1 \dots \alpha_p ; \tau_1 \dots \tau_q}$ будут удовлетворять уравнению

$$D^{\sigma} \phi_{\sigma\alpha_1 \dots \alpha_p ; \tau_1 \dots \tau_q} - pD_{[\alpha_1} \phi_{\alpha_2 \dots \alpha_p]; \tau_1 \dots \tau_q} = \lambda \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_p ; \tau_1 \dots \tau_q},$$

$$p, q = 0,1,2,3,4.$$

Мы получим отображение из L в L, если свернем $\phi_{\alpha_1 \dots \alpha_p ; \tau_1 \dots \tau_q}$ с q-вектором $u_{\tau_1 \dots \tau_q}$. Согласно /14/ волновая функция $\phi_{\alpha_1 \dots \alpha_p ; \tau_1 \dots \tau_q} u^{\tau_1 \dots \tau_q}$ будет решением волнового уравнения, если q-вектор удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{\mu} u_{\alpha_1 \dots \alpha_q} = 0, \qquad /15/$$

которое имеет простой геометрический смысл. Предполагая последнее условие выполненным, мы придем к операторам, которые действуют в пространстве решений волнового уравнения. Это есть генераторы группы внутренней симметрии. Вопрос об интегрируемости уравнения /15/ требует особого рассмотрения, но уже сейчас мы можем установить без всяких дополнительных исследований один важный оператор, который действует в пространстве решений волнового уравнения. Действительно, если существенную компоненту 4-вектора $e_{\alpha\beta\mu\nu}$ положить равной $\sqrt{-g}$, $e_{0123} = \sqrt{-g}$, то из /1/ следует, что $e_{\alpha\beta\mu\nu}$ удовлетворяет уравнению /15/. Таким образом, согласно /13/ в пространстве решений волнового уравнения действует оператор J, такой, что

$$(JF)_0 \Rightarrow \frac{1}{4!} e_{\tau\sigma\epsilon\lambda} f^{\tau\sigma\epsilon\lambda},$$

$$(JF)_1 \Rightarrow \frac{1}{3!} e_{\tau\sigma\epsilon\alpha} f^{\tau\sigma\epsilon},$$

$$(JF)_2 \Rightarrow -\frac{1}{2} e_{\tau\sigma\alpha\beta} f^{\tau\sigma},$$

$$(JF)_3 \Rightarrow -e_{\tau\alpha\beta\mu} f^{\tau},$$

$$(JF)_4 \Rightarrow e_{\alpha\beta\mu\nu}\, f.$$

Квадрат оператора J равен

$$J^2 = -1. \qquad /16/$$

Так как

$$(JF, H) = (F, JH),\ (JF, H)_\mu = (F, JH)_\mu\,, \qquad /17/$$

то лагранжиан $\mathcal{L}(F)$ не инвариантен относительно преобразований

$$F \to {}'F = \exp(\beta J)F = \cos\beta F + \sin\beta JF \qquad /18/$$

и

$$(F, JF)_\mu = 0.$$

Таким образом, встает вопрос об инвариантном относительно преобразований /18/ лагранжиане. Далее, в силу /16/ задача на собственные значения оператора J с необходимостью требует расширения поля вещественных чисел. К обсуждению этих вопросов мы вернемся, рассмотрев предварительно свойства операторов, определяемых векторными полями.

Согласно /10/ векторному полю u^α соответствует оператор Q_u, такой, что

$$(Q_u F)_0 \Rightarrow -u^\sigma f_\sigma\,,$$

$$(Q_u F)_1 \Rightarrow u^\sigma f_{\sigma\alpha} + u_\alpha f,$$

$$(Q_u F)_2 \Rightarrow -u^\sigma f_{\sigma\alpha\beta} - 2u_{[\alpha} f_{\beta]}\,, \qquad /19/$$

$$(Q_u F)_3 \Rightarrow u^\sigma f_{\sigma\alpha\beta\mu} + 3u_{[\alpha} f_{\beta\mu]}\,,$$

$$(Q_u F)_4 \Rightarrow -4u_{[\alpha} f_{\beta\mu\nu]}\,.$$

Из /19/ следуют важные соотношения

$$(F, Q_u H) = -(Q_u F, H)\,, \qquad /20/$$

$$(F, Q_u H)_\mu = -(Q_u F, H)_\mu\,, \qquad /21/$$

$$Q_u Q_v + Q_v Q_u = -2u^\sigma v_\sigma\,. \qquad /22/$$

Как уже сказано, оператор Q_u действует в пространстве решений волнового уравнения, если u^α удовлетворяет уравнению

$$\nabla_\mu u^\alpha = 0. \qquad /23/$$

Из условия интегрируемости уравнения /23/ следует, что оно может, вообще говоря, не иметь решений. Таким образом, тензоры $g_{\alpha\beta}$, $K^\sigma_{\alpha\beta}$ задают не только волновое уравнение, но и группу его внутренней симметрии.

Если u^α удовлетворяет уравнению /29/, то $u^\alpha u_\alpha = \mathrm{const}$. Следовательно, без ограничения общности можно положить

$$Q_u^2 = \pm 1. \qquad /24/$$

Из /20/, /24/ следует, что лагранжиан /5/ инвариантен относительно преобразований

$$F \to {}'F = \exp(\omega Q_u)F\,, \qquad /25/$$

где ω - параметр. Таким образом, вектор

$$j_\mu = (F, Q_u F)_\mu$$

удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\, j^\mu) = 0.$$

Операторы Q_u и J антикоммутируют

$$JQ_u + Q_u J = 0. \qquad /26/$$

Из /17/, /26/ следует, что ток j^μ инвариантен относительно преобразований /18/. Структура группы внутренней симметрии определяется уравнением /23/, к исследованию которого мы сейчас и перейдем.

3. О СТРУКТУРЕ ГРУППЫ ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ

Здесь будут рассмотрены только наиболее важные случаи, когда уравнение /23/ или вполне интегрируемо, или вообще не имеет решений. Составляя условие интегрируемости, получим алгебраическое соотношение

$$R_{\mu\nu\sigma\cdot}{}^{\alpha} u^\sigma = 0, \qquad /27/$$

где

$$R_{\mu\nu\sigma\cdot}^{\;\;\;\;\;\alpha} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} + \Gamma^\alpha_{\mu\tau}\Gamma^\tau_{\nu\sigma} - \Gamma^\alpha_{\nu\tau}\Gamma^\tau_{\mu\sigma} \; . \; -$$

тензор Римана. Пусть уравнение /23/ имеет четыре линейно независимых решения u^α_i, $i = 0,1,2,3$. Обозначим через u^i_α ковекторы, удовлетворяющие условиям

$$u^\alpha_i u^i_\beta = \delta^\alpha_\beta \; . \qquad /28/$$

Тогда из /27/, /28/ следует, что

$$R_{\mu\nu\sigma\cdot}^{\;\;\;\;\;\alpha} = 0 \, . \qquad /29/$$

Верно и обратное. Действительно, если условие /29/ выполнено, то общее решение уравнения /23/ можно записать в виде ряда

$$u^\alpha(x) = u^\alpha(x_0) + c^\alpha_\tau(x_0)(x^\tau - x^\tau_0) + \frac{1}{2} c^\alpha_{\tau\sigma}(x_0)(x^\tau - x^\tau_0)(x^\sigma - x^\sigma_0) + \dots ,$$

где

$$c^\alpha_\tau(x) = -\Gamma^\alpha_{\tau\sigma}(x)\, u^\sigma(x) \, , \quad c^\alpha_{\tau\sigma}(x) = -u^\gamma(x)\left(\partial_\tau \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} - \Gamma^\nu_{\tau\gamma}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\right)$$

и т.д. Итак, пусть уравнение /23/ вполне интегрируемо. Полагая

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{ik}\, u^i_\alpha u^k_\beta , \qquad /30/$$

мы выразим через u^i_α метрический тензор. Постоянные коэффициенты выберем равными $\eta_{ik} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, вводя тем самым лоренцеву структуру. Сейчас в преобразовании

$$u^i_\alpha \to {}'u^i_\alpha = L^i_j u^j_\alpha$$

постоянные L^i_j должны подчиняться условию

$$L^j_i L^m_k \eta_{jm} = \eta_{ik} \, .$$

Векторные поля u^α_i задают группу внутренней симметрии. Действительно, всякий вектор $u^\alpha = a^i u^\alpha_i$ удовлетворяет уравнению /23/ при $a^i = \mathrm{const}$. Заметим, что в рассматриваемом случае не нужно изучать уравнение /15/ при $q \geq 2$, т.к. всякий q-вектор можно записать в виде суммы простых q-векторов.

Операторы, задаваемые векторными полями u^α_i, обозначим через $\mathbf{Q}_i$. Из /22/, /30/ получаем

$$\mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_k + \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_i = -2\eta_{ik} \, . \qquad /31/$$

Введем генераторы алгебры Ли группы внутренней симметрии. Положим $I_i = \frac{1}{2}\mathbf{Q}_i$, $I_{ik} = [I_i, I_k]$. Алгебра Ли операторов I_i, I_{jk} замкнута, т.к.

$$\begin{aligned} [I_i, I_{jk}] &= \eta_{ik} I_j - \eta_{ij} I_k \, , \\ [I_{jk}, I_{mn}] &= -\eta_{jn} I_{km} - \eta_{km} I_{jn} + \eta_{kn} I_{jm} + \eta_{jm} I_{kn} \, . \end{aligned} \qquad /32/$$

Таким образом, в вещественной области алгебра Ли группы внутренней симметрии задается соотношениями /32/. Как уже отмечалось, лагранжиан /5/ не инвариантен относительно преобразований, порождаемых оператором J, а, следовательно, и относительно преобразований, порождаемых генераторами $I_i J$. Вместо лагранжиана /5/ мы могли бы рассмотреть лагранжиан вида

$$\mathfrak{L}(F) = \frac{1}{2}(F, D\mathbf{Q}_u F) + \frac{\lambda}{2}(F, \mathbf{Q}_u F) \, .$$

однако здесь возникает трудность, связанная с тождественным обращением в нуль массового члена. В связи с этим рассмотрим волновое уравнение над полем комплексных чисел. Определения (F, H), $(F, H)_\mu$ очевидным образом обобщаются на случай комплексных волновых функций, которые будем обозначать через Ψ, Φ, $(\Psi)_p \Rightarrow \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$, $(\Phi)_p \Rightarrow \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$. Имеем

$$(\Psi, i\Phi) = -(i\Psi, \Phi), \; (\Psi, \Phi) = \overline{(\Phi, \Psi)}, \; (\Psi, \Phi)_\mu = -\overline{(\Phi, \Psi)}_\mu \, , \qquad /33/$$

причем черта обозначает комплексное сопряжение. Лагранжиан

$$\mathfrak{L}(\Psi) = \frac{1}{2}(\Psi, D\Psi) + \frac{1}{2}(D\Psi, \Psi) + \lambda(\Psi, \Psi) \qquad /34/$$

инвариантен относительно преобразований

$$\Psi \to \exp(\alpha i)\Psi, \quad \Psi \to \exp(\beta i J)\Psi, \qquad /35/$$

что дает сохраняющиеся токи

$$j_\mu = i(\Psi, \Psi)_\mu , \quad k_\mu = i(\Psi, J\Psi)_\mu \, . \qquad /36/$$

Заметим, что, подвергая Ψ преобразованию /32/, получим

$$j_\mu \to \cos 2\beta\, j_\mu + \sin 2\beta\, k_\mu \, ,$$

$$k_\mu \to -\sin 2\beta\, j_\mu + \cos 2\beta\, k_\mu \, .$$

Если тензор Римана удовлетворяет условию

$$R_{\mu\nu\sigma\cdot}^{\ \ \ \ a} = K(g_{\mu\sigma}\delta^{a}_{\nu} - g_{\nu\sigma}\delta^{a}_{\mu}), \qquad /37/$$

где K - не равная нулю функция, то группа внутренней симметрии волнового уравнения сводится к группе преобразований /35/, т.к. в этом случае уравнение /23/ не имеет решений, отличных от тривиального. Рассмотрим этот случай подробнее, поскольку он представляет интерес к связи с идеей дуально заряженных частиц или дионов, выдвинутой Швингером. Задача ставится так. Если преобразования /35/ удастся свести к фазовым преобразованиям, то мы имеем дело только с заряженными частицами, в противном случае можно говорить о дионах. Преобразования /18/ по аналогии с электродинамикой будем называть дуальными. Нарушить дуальную симметрию можно с помощью дополнительного условия: потребуем, чтобы Ψ была собственной функцией оператора J. Положим $\Pi_{\epsilon} = \frac{1}{2}(1+\epsilon iJ)$, $\epsilon=\pm 1$. Операторы Π_{ϵ} удовлетворяют соотношениям проекционных операторов

$$\Pi^{2}_{\epsilon} = \Pi_{\epsilon}, \quad \Pi_{1}\Pi_{-1} = \Pi_{-1}\Pi_{1} = 0, \quad \Pi_{1} + \Pi_{-1} = 1 .$$

Волновую функцию $\Pi_{\epsilon}\Psi$ обозначим через Ψ_{ϵ}. По определению

$$J\Psi_{1} = -i\Psi_{1}, \quad J\Psi_{-1} = i\Psi_{-1} .$$

Нетрудно найти явный вид Ψ_{ϵ}:

$$\Psi_{1} = (\psi, \psi_{a}, \psi_{\alpha\beta}, -ie_{\sigma\alpha\beta\mu}\psi^{\sigma}, ie_{\alpha\beta\mu\nu}\psi),$$
$$\Psi_{-1} = (\phi, \phi_{a}, \phi_{\alpha\beta}, ie_{\sigma\alpha\beta\mu}\phi^{\sigma}, -ie_{\alpha\beta\mu\nu}\phi), \qquad /38/$$

причем $\psi_{\alpha\beta}$, $\phi_{\alpha\beta}$ подчиняются условиям дуальности

$$\tilde{\psi}_{\mu\nu} = i\psi_{\mu\nu}, \quad \tilde{\phi}_{\mu\nu} = -i\phi_{\mu\nu}, \quad \tilde{\psi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}e_{\mu\nu\alpha\beta}\psi^{\alpha\beta} .$$

Подставляя /38/ в /8/, получим систему уравнений, которой подчиняются компоненты Ψ_{1}:

$$D^{\sigma}\psi_{\sigma} = \lambda\psi,$$

$$D_{a}\psi_{\beta} - D_{\beta}\psi_{a} - ie_{\alpha\beta\mu\nu}D^{\mu}\psi^{\nu} = \lambda\psi_{\beta a},$$

$$D^{\sigma}\psi_{\sigma a} - D_{a}\psi = \lambda\psi_{a} .$$

Так как $\exp(\beta iJ)\Psi_{\epsilon} = e^{\epsilon\beta}\Psi_{\epsilon}$, то дуальные преобразования не сводятся к фазовым после нарушения симметрии. К фазовым преобразованиям сводятся повороты дуальности /18/, однако, как уже отмечалось, лагранжиан не инвариантен при таких отображениях. Ввести другой лагранжиан, который давал бы те же уравнения движения и был инвариантен относительно преобразований /18/, при принятых предположениях нельзя. Все это находит отражение и в таких соотношениях $(\Psi_{\epsilon}, \Psi_{\epsilon}) = 0$, $(\Psi_{\epsilon}, \Psi_{\epsilon})_{\mu} = 0$. Выразим теперь токи /36/ через Ψ_{ϵ}. Так как $\Psi = \Psi_{1} + \Psi_{-1}$, то

$$j_{\mu} = i(\Psi_{1}, \Psi_{-1})_{\mu} + i(\Psi_{-1}, \Psi_{1})_{\mu},$$

$$k_{\mu} = (\Psi_{-1}, \Psi_{1})_{\mu} - (\Psi_{1}, \Psi_{-1})_{\mu} .$$

Отсюда усматриваем, что при преобразовании

$$C_{g}: \Psi_{1} \to C_{g}\Psi_{1} = \Psi_{-1}, \quad \Psi_{-1} \to C_{g}\Psi_{-1} = \Psi_{1}$$

вектор k_{μ} меняет знак, а вектор j_{μ} остается неизменным. Используя явные выражения токов j_{μ} и k_{μ} через компоненты волновых функций Ψ_{1}, Ψ_{-1}, нетрудно проверить, что преобразование

$$C_{e}: \Psi_{1} \to C_{e}\Psi_{1} = \bar{\Psi}_{1}, \quad \Psi_{-1} \to C_{e}\Psi_{-1} = \bar{\Psi}_{-1}$$

меняет знак у вектора j_{μ}, а вектор k_{μ} оставляет неизменным. Таким образом, мы действительно пришли к представлению о дуально заряженных частицах с зарядами e и g, которые могут проявлять себя через существование векторных полей A^{μ} и B^{μ} с универсальной связью

$$\mathcal{L}_{i} = \frac{e}{hc}A^{\mu}j_{\mu} + \frac{g}{hc}B^{\mu}k_{\mu} .$$

Подчеркнем, что условие /37/ выводит нас за рамки пространства-времени специальной теории относительности.

При условии $R_{\mu\nu\sigma\cdot}^{\ \ \ \ a} = 0$ группа внутренней симметрии максимальна. Запишем структурные соотношения этой группы. Пусть индексы a, b, c, ..., взятые из начала латинского алфавита пробегают значения 0,1,2,3,4, а индексы i, j, k, взятые из середины латинского алфавита, пробегают, как прежде, значения 0,1,2,3. Положим $I_{4} = \frac{1}{2}iJ$, $I_{ab} = [I_{a}, I_{b}]$. Операторы I_{a}, I_{ab} удовлетворяют следующим структурным соотношениям:

$$[I_{a}, I_{b}] = I_{ab}, \quad [I_{a}, I_{bc}] = \eta_{ab}I_{c} - \eta_{ac}I_{b},$$

$$[I_{ab}, I_{cd}] = \eta_{ad}I_{bc} + \eta_{bc}I_{ad} - \eta_{bd}I_{ac} - \eta_{ac}I_{bd},$$

где $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1,1)$. Таким образом, группа внутренней симметрии локально изоморфна конформной группе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все вышесказанное указывает на существование неизвестных еще и неожиданных связей между структурой пространства-времени и физикой микромира.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пестов А.Б. ТМФ, 1978, 34, 1, с.48.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 июля 1983 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Пестов А.Б. Р2-83-506

О группе внутренней симметрии волнового уравнения, определяемого оператором внешнего дифференцирования

Показано, что группа внутренней симметрии волнового уравнения, определяемого оператором внешнего дифференцирования, связана с геометрией пространства-времени. Изучена структура этой группы.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Pestov A.B. P2-83-506

On a Group of Internal Symmetry of the Wave Equation Defined by the External Differential Operator

It is shown that a group of internal symmetry of the wave equation defined by the external differential operator is connected with the space-time geometry. The structure of this group is studied.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой