объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна



Р2-83-475

Л.Г.Мардоян, Г.С.Погосян, А.Н.Сисакян,
В.М.Тер-Антонян

# ДВУМЕРНЫЙ АТОМ ВОДОРОДА. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ БАЗИС

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

1983

## ВВЕДЕНИЕ

Двумерным атомом водорода принято называть электрон-протонную систему с потенциалом взаимодействия $U = -\dfrac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . С физической точки зрения такая система является, по всей видимости, идеализацией, отражающей поведение атома водорода в полях, которые вынуждают электрон и протон находиться в одной плоскости. Не исключается также возможность, что к такой ситуации приводит разделение переменных, примененное при решении какой-либо реальной задачи. Примером последнего типа является задача об атоме водорода в сильном магнитном поле, которая сводится к задаче об одномерном атоме водорода, рассмотренной в [1].

Двумерный атом водорода является удобным объектом для выяснения многих вопросов, возникающих при исследовании более сложных систем. В первую очередь это касается феномена скрытой симметрии, присущего водородоподобным атомам вообще, но имеющего геометрически наглядную интерпретацию лишь в случае двумерного атома водорода [2] . Сравнивая энергетические спектры и плотности распределения вероятностей двух- и трехмерного атомов водорода, легко установить роль фактора размерности для водородоподобных систем и его влияние на физически наблюдаемые закономерности [3].

Двумерный атом водорода, будучи системой, обладающей скрытой симметрией, может быть одновременно исследован в нескольких координатных системах: полярной, параболической и эллиптической. В отсутствие внешних полей эти базисы математически равноценны, хотя очевидно, что при описании спектроскопии двумерного атома водорода физически предпочтителен полярный базис, а при анализе аналога резерфордовского рассеяния - параболический. Истинное назначение параболического и эллиптического базисов /не очевидных с точки зрения геометрической симметрии кулоновского поля/ связано с описанием поведения двумерного атома водорода в однородном электрическом поле и в поле другого протона, то есть с эффектом Штарка и с плоской задачей двух неподвижных кулоновских центров. В рамках теории возмущений с вырождением эти базисы приобретают статус правильных невозмущенных волновых функций, по которым следует строить необходимые матричные элементы, энергетические поправки и т.д. Перечисленные три базиса исчерпывают все базисы, которые можно установить, находясь в рамках метода разделения переменных [4] . Такая ограниченность числа а-зисов делает привлекательным исчерпывающий анализ всех трех базисов и установление взаимных разложений между ними.

В настоящей работе решена задача двумерного атома водорода в эллиптической системе координат. В математическом плане эта задача имеет много общего с анализом атома водорода в сфероидальных координатах /5-7/.

Эллиптические координаты являются наиболее общими ортогональными координатами на плоскости. Они содержат в себе размерный параметр $R$, при устремлении которого к нулю или бесконечности в пределе получаются полярные, параболические и декартовы координаты. В этом смысле решение двумерной кулоновской задачи в эллиптической системе координат объединяет в единое целое два базиса, различающихся своей математической структурой.

Работа построена следующим образом. В разделе 1 в целях полноты изложения приводятся необходимые для дальнейшего сведения об эллиптической системе координат. В разделе 2 производится разделение переменных и показывается, что при определенных условиях проблема сводится к решению уравнения Айнса в комплексной плоскости. В третьем разделе строится эллиптический базис двумерного атома водорода, в четвертом рассматривается ортогональность эллиптических волновых функций, в пятом и шестом обсуждаются пределы $R \to 0$ и $R \to \infty$, а в седьмом вычисляется эллиптическая нормировочная постоянная. В приложении приводится явный вид полярного, параболического и эллиптического базисов для низших стационарных состояний.

## 1. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Положение произвольной точки $(x, y)$ верхней либо нижней полуплоскости можно описать, задавая величины $r_1$ и $r_2$, определяющие ее расстояние от точек $(0,0)$ и $(R, 0)$ /см. рис. 1/. Такой подход удобен в двухцентровых задачах, когда в точках $(0, 0)$ и $(R, 0)$ находятся источники, создающие поле, в котором исследуется движение частицы с координатами $(x, y)$.

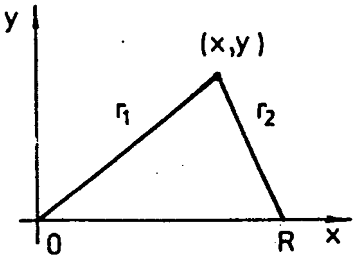


Рис. 1

Эллиптические координаты $\xi$ и $\eta$ выражаются через $r_1$ и $r_2$ следующим образом:

$$\operatorname{ch}\xi = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \cos\eta = \frac{r_1 - r_2}{2}, \qquad /1.1/$$

и изменяются в пределах

$$0 \le \xi < \infty, \qquad 0 \le \eta \le 2\pi .$$

Симметричным относительно оси абсцисс точкам соответствуют эллиптические координаты $(\xi, \eta)$ и $(\xi, 2\pi - \eta)$. Линии $\xi = \mathrm{const}$ и



$\eta = \mathrm{const}$ сохраняют постоянными сумму и разность расстояний $r_1$ и $r_2$ и потому являются софокусными эллипсами и параболами с фокусами в точках $(0,0)$ и $(R,0)$. Эллиптические координаты являются ортогональными. Декартовы координаты выражаются через $\xi$ и $\eta$ следующим образом:

$$x = \frac{R}{2}(\operatorname{ch}\xi\cos\eta + 1), \quad y = \frac{R}{2}\operatorname{sh}\xi\sin\eta .$$

Лапласиан и элемент двумерного объема в эллиптических координатах имеют вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{4}{R^2(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right),$$

$$dV = dxdy = \frac{R^2(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta)}{4}\, d\xi\, d\eta .$$

В пределах $R \to 0$ и $R \to \infty$ эллиптические координаты вырождаются в полярные и параболические:

$$\operatorname{ch}\xi \xrightarrow{R\to 0} \frac{2r}{R}, \quad \cos\eta \xrightarrow{R\to 0} \cos\phi \qquad (R \to 0), \qquad /1.2/$$

$$\operatorname{ch}\xi \longrightarrow 1 + \frac{v^2}{R}, \quad \cos\eta \longrightarrow -1 + \frac{u^2}{R} \qquad (R \to \infty). \qquad /1.3/$$

Здесь $v^2$ и $u^2$ - параболические координаты, связанные с полярными формулами

$$v^2 = r(1 - \cos\phi), \quad u^2 = r(1 + \cos\phi) .$$

Предельные переходы в /1.2/ и /1.3/ производятся при фиксированном положении точки $(x, y)$ и фиксированном начале координат. Из эллиптической системы координат можно получить также декартову, если перенести начало координат в точку $(\frac{R}{2}, 0)$, а затем удалить левый и правый фокусы к $-\infty$ и $+\infty$ соответственно.

## 2. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

В эллиптических координатах двумерный атом водорода описывается уравнением Шредингера:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} - \left[\frac{\lambda^2 R^2}{4}(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta) + R(\operatorname{ch}\xi - \cos\eta)\right]\psi = 0 . \qquad /2.1/$$

Здесь $\lambda = \sqrt{-2E}$ и принята кулоновская система единиц, в которой $\hbar = m = \alpha = 1$. Из структуры уравнения /2.1/ видно, что переменные в нем разделяются. Подстановка

$$\psi(\xi, \eta) = X(\xi)\, Y(\eta) \qquad /2.2/$$

переводит уравнение в частных производных /2.1/ в два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} + [A + R\,\mathrm{ch}\,\xi - \frac{\lambda^2 R^2}{4}\,\mathrm{ch}^2 \xi]\, X(\xi) = 0, \qquad /2.3/$$

$$\frac{d^2 Y(\eta)}{d\eta^2} - [A + R\cos\eta - \frac{\lambda^2 R^2}{4}\cos^2\eta]\, Y(\eta) = 0, \qquad /2.4/$$

в которых $A$ - константа разделения в эллиптических координатах. Эти уравнения могут быть записаны в единой форме

$$\frac{d^2 Z(\zeta)}{d\zeta^2} - [A + R\cos\zeta - \frac{\lambda^2 R^2}{4}\cos\zeta]\, Z(\zeta) = 0, \qquad /2.5/$$

где при $\zeta \in [0, 2\pi]$ имеем уравнение /2.4/, а при $\zeta \in [0, i\infty]$ - уравнение /2.3/. Иными словами, в комплексной плоскости $\zeta$, как видно из рис. 2, "физическими являются заштрихованные области на прямых $\mathrm{Jm}\,\zeta = 0$ и $\mathrm{Re}\,\zeta = 0$.

Функции $X(\xi)$ и $Y(\eta)$ выражаются через $Z(\zeta)$ следующим образом:

$$X(\xi) = Z(i\xi), \quad Y(\eta) = Z(\eta).$$

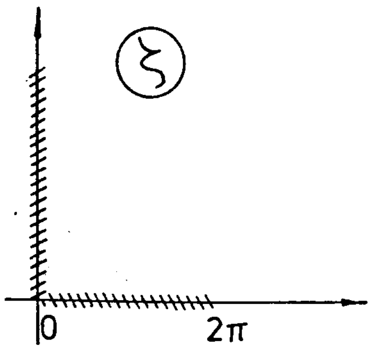


Рис. 2

Из условия однозначности

$$X(\xi) = X(\xi + 2\pi i), \quad Y(\eta) = Y(\eta + 2\pi)$$

заключаем, что физически приемлемыми решениями уравнения /2.5/ являются решения, удовлетворяющие условию периодичности

$$Z(\zeta) = Z(\zeta + 2\pi) \qquad /2.6/$$

и конечные во всех точках физической области.



## 3. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ БАЗИС

Уравнение /2.5/ относится к классу обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Подстановкой

$$Z(\zeta) = r^{-\frac{\lambda R}{2}\cos\zeta}\, W(\zeta) \qquad /3.1/$$

и последующей заменой $\zeta = 2u$ оно приводится к уравнению Айнса[8]:

$$\frac{d^2 W}{du^2} + \omega \sin 2u \frac{dW}{du} + (g - p\omega\cos 2u)\, W = 0, \qquad /3.2/$$

в котором параметры $\omega$, $g$ и $p$ равны

$$\omega = 2\lambda R, \quad g = \lambda^2 R^2 - 4A, \quad p = -1 + 2/\lambda.$$

Вводя новую переменную $t = \cos u$, преобразуем уравнение /3.2/ к алгебраическому виду

$$(1 - t^2)\frac{d^2 W}{dt^2} - t(2\omega + 1 - 2\omega t^2)\frac{dW}{dt} + (g - p\omega - 2p\omega t^2)\, W = 0. \qquad /3.3/$$

Обстоятельный анализ уравнений /3.2/ и /3.3/ был выполнен Арскоттом[8]. Согласно[8] решения уравнения /3.3/ можно разбить на следующие четыре типа:

$$W_1^{(+)}(\zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{2s} (\cos u)^{2s},$$
$$W_1^{(-)}(\zeta) = \sin u \sum_{s=0}^{\infty} b_{2s} (\cos u)^{2s}, \qquad /3.4/$$

$$W_2^{(-)}(\zeta) = \sin u \sum_{s=0}^{\infty} b_{2s+1} (\cos u)^{2s+1},$$
$$W_2^{(+)}(\zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{2s+1} (\cos u)^{2s+1}. \qquad /3.5/$$

Такое разбиение диктуется инвариантностью первоначального уравнения /3.2/ относительно инверсии $u \to -u$ и $u \to u + \pi$. Условию /2.6/ удовлетворяют лишь решения /3.4/ и /3.5/. Подставим эти решения в уравнение /3.3/ и найдем рекуррентные соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты $a_{2s}$ и $b_{2s+1}$ :

$$(s+\frac{1}{2})(s+1)a_{2s+2}+[\frac{g+p\omega}{4}-s(\omega+s)]a_{2s}+\omega(s-\frac{p+2}{2})a_{2s-2}=0, \quad /3.6/$$

$$(s+\frac{3}{2})(s+1)b_{2s+3}+[\frac{g+p\omega}{4}-s(\omega+s)-(1+2s+\frac{\omega}{2})]b_{2s+1}+\omega(s-\frac{p}{2})b_{2s-1}=0. \quad /3.7/$$

Исследуем сходимость рядов /3.4/ и /3.5/, пользуясь методом, предложенным в [5]. Пусть при больших s

$$\frac{a_{2s+2}}{a_{2s}}\sim c_0+\frac{c_1}{s}+\dots \quad . \qquad /3.8/$$

Тогда при таких же s

$$\frac{a_{2s}}{a_{2s-2}}\sim c_0+\frac{c_1}{s-1}+\dots=c_0+\frac{c_1}{s}+O(\frac{1}{s^2}). \qquad /3.9/$$

Поделим рекуррентное соотношение /3.6/ на $a_{2s-2}$ и воспользуемся /3.8/ и /3.9/. Ограничиваясь первыми двумя главными членами по s, получим уравнения

$$c_0(c_0-1)=0,$$

$$c_0(2c_1+\frac{3}{2}c_0)-(c_1+\omega c_0)+\omega=0,$$

корни которых есть

а/ $c_0=0$, $c_1=\omega$,

б/ $c_0=1$, $c_1=-3/2$.

В случае "а"

$$Z(\zeta)\sim e^{\lambda R}e^{\frac{\lambda R}{2}\cos\zeta},$$

и при $\zeta\to i\infty$ это решение не будет конечным.

В случае "б"

$$Z(\zeta)>e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-\lambda R)\cos\zeta}.$$

и, следовательно, это решение при $\zeta\to i\infty$ не при всех $\lambda R$ стремится к нулю. Аналогичный анализ рекуррентного соотношения /3.7/ также обнаруживает наличие двух случаев: а/ $c_0=0$, $c_1=\omega$; б/ $c_0=1$, $c_1=-1/2$,из которых новым является последний. При этом

$$W(\zeta)\sim\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\cos\zeta/2)^{2s}}{s^{1/2}},$$

то есть $W(\zeta)$ расходится при $\zeta=0$ и при $\zeta=2\pi$.



Из приведенного анализа следует, что ряды /3.4/ и /3.5/ будут конечными во всей физической области лишь в том случае, если они обрываются.

Пусть $a_{2N}$ и $a_{2N'+1}$ - последние отличные от нуля коэффициенты в /3.4/ и /3.5/. Тогда из рекуррентных соотношений /3.6/ и /3.7/, если взять в них $s=N+1$ и $s=N'+1$ соответственно, следует, что $N=N'$ и спектр энергий имеет вид

$$E_N=-\frac{1}{2(N+1/2)^2}, \qquad /3.10/$$

где N = 0,1,..., то есть совпадает с известным результатом[9].

Запишем рекуррентные соотношения /3.6/ и /3.7/ так, чтобы условия обрезания рядов /3.4/ и /3.5/ выполнялись автоматически:

$$\alpha_{2s}a_{2s+2}+\beta_{2s}a_{2s}+R\gamma_{2s}a_{2s-2}=0, \qquad /3.11/$$

$$\alpha_{2s}=(s+1/2)(s+1),$$

$$\beta_{2s}=-s(2\lambda R+s)+\frac{\lambda^2R^2}{4}+R-\frac{\lambda R}{2}-A(R), \qquad /3.11a/$$

$$\gamma_{2s}=2\lambda(s-N-1),$$

$$\alpha_{2s+1}a_{2s+3}+\beta_{2s+1}a_{2s+1}+R\gamma_{2s+1}a_{2s-1}=0, \qquad /3.12/$$

$$\alpha_{2s+1}=(s+3/2)(s+1),$$

$$\beta_{2s+1}=-s(2\lambda R+s)+\frac{\lambda^2R^2}{4}+R-\frac{3\lambda R}{2}-1-2s-A(R), \qquad /3.12a/$$

$$\gamma_{2s+1}=2\lambda(s-N).$$

К этим соотношениям следует добавить условия $a_0=a_1=1, a_{-1}=a_{-2}=0$. Каждое из рекуррентных соотношений /3.11/ и /3.12/ - это система однородных уравнений, совместных лишь при условии равенства нулю соответствующих детерминантов:

$$\mathfrak{D}^{(+)}_{2N}(A)=\begin{vmatrix}\beta_0 & \alpha_0 & & \cdot & & \\ R\gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 & \cdot & & \\ & R\gamma_4 & \beta_4 & \alpha_4\cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ & & & R\gamma_{2N-2} & \beta_{2N-2} & \alpha_{2N-2} \\ & & & & R\gamma_{2N} & \alpha_{2N}\end{vmatrix}=0, \qquad /3.13/$$

$$\mathfrak{L}^{(-)}_{2N+1}(A) = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & & \cdot & & \\ R\gamma_3 & \beta_3 & \alpha_3 & \cdot & & \\ & R\gamma_5 & \beta_5 & \alpha_5 \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & R\gamma_{2N-1} & \beta_{2N-1} & \alpha_{2N-1} \\ & & & \cdot & & R\gamma_{2N+1} & \beta_{2N+1} \end{vmatrix} = 0 . \qquad /3.14/$$

Корни уравнений /3.13/ и /3.14/ дают собственные значения $A^{(\pm)}_N(R)$ константы разделения. Относительно детерминантов такого типа известно [5], что они имеют вещественные и различные корни. Это значит, что собственные значения эллиптической константы разделения вещественны и могут быть пронумерованы целыми индексами $q$ и $q'$, а именно: $A^{(+)}_N(R) \to A^{(+)}_{Nq}(R)$ ; $A^{(-)}_N(R) \to A^{(-)}_{Nq'}(R)$, причем $0 \le q \le N$, $1 \le q' \le N$. Кратность вырождения $N$-го энергетического уровня равна, как и должно быть, $2N+1$.

Полиномиальные решения уравнения /3.2/ принято обозначать через $C^q_N(U,R)$ и $S^q_N(U,R)$, а функции /3.1/ - через $hc^q_N(U,R)$ и $hs^q_N(U,R)$. На языке этих обозначений физически допустимые решения уравнения /3.2/ имеют вид

$$C^q_N(U,R) = \sum_{s=0}^{N} a^{N,q}_{2s}(R)\left(\frac{1+\cos\zeta}{2}\right)^s ,$$

$$S^{q'}_N(U,R) = \frac{\sin\zeta}{2}\sum_{s=0}^{N-1} a^{N,q'}_{2s+1}\left(\frac{1+\cos\zeta}{2}\right)^s ,$$

а соответствующие им решения уравнения /2.5/ есть

$$hc^q_N(U,R) = e^{-\frac{\lambda R}{2}\cos\zeta}\, C^q_N(U,R), \qquad /3.15/$$

$$hs^{q'}_N(U,R) = e^{-\frac{\lambda R}{2}\cos\zeta}\, S^{q'}_N(U,R). \qquad /3.16/$$

В работе [8] показано, что при соответствующей нумерации индексы $q$ и $q'$ дают число нулей полиномов $C^q_N(U,R)$ и $S^q_N(U,R)$.

При $\zeta = i\xi$ решения /3.15/ и /3.16/ дают радиальные, а при $\zeta = \eta$ - угловые волновые функции. В качестве радиальных волновых функций удобно выбирать не $hc^q_N(U,R)$ и $hs^{q'}_N(U,R)$, а $hc^{q_1}_N(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2},-R)$ и $hs^{q_2}_N(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2},-R)$, которые, как показано в [8], отличаются от предыдущих лишь фазовым множителем. Коэффициенты $a_{2s}(-R)$ и $a_{2s+1}(-R)$ вычисляются из рекуррентных соотношений, отличающихся от /3.11/ и /3.12/ заменой $R \to -R$.

Волновые функции /2.2/ разбиваются на два класса, каждому из которых соответствует свое число нулей $q_1$, $q_2$ и $q'_1$, $q'_2$ $(q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2 = N)$, причем

$$A^{(+)}_{Nq_1}(R) = A^{(+)}_{Nq_2}(-R), \qquad /3.17/$$

$$A^{(-)}_{Nq'_1}(R) = A^{(-)}_{Nq'_2}(-R). \qquad /3.18/$$

Итак, число $q_1$ при данном $N$ определяет число $q_2$, а эллиптические базисы есть

$$\psi^{(+)}_{Nq_1q_2}(\xi,\eta,R) = C^{(+)}_{Nq_1q_2}(R)\, hc^{q_1}_N\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2},-R\right) hc^{q_2}_N\left(\frac{\eta}{2},R\right), \qquad /3.19/$$

$$\psi^{(-)}_{Nq'_1q'_2}(\xi,\eta,R) = C^{(-)}_{Nq'_1q'_2}(R)\, hs^{q'_1}_N\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2},-R\right) hs^{q'_2}_N\left(\frac{\eta}{2},R\right). \qquad /3.20/$$

В приложении приведены эти базисы для низших квантовых чисел.

## 4. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ

Выберем нормировочные константы $C^{(\pm)}_{Nq_1q_2}(R)$ так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{R^2}{4}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} \overset{*}{\psi}{}^{(\pm)}_{Nq_1q_2}(\xi,\eta,R)\,\psi^{(\pm)}_{Nq_1q_2}(\xi,\eta,R)(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta)\,d\xi d\eta = 1 . \qquad /4.1/$$

Из условия периодичности /2.6/ и нечетности функций /3.16/ по $\eta$ следует, что базисы /3.19/ и /3.20/ взаимно ортогональны при всех $N$, $q_1$, $q_2$ и $q'_1$, $q'_2$. Это, в свою очередь, означает, что каждый из этих базисов сам по себе не является полным.

Элементы каждого из базисов /3.19/ и /3.20/, будучи собственными функциями гамильтониана, являются ортогональными по $N$, то есть при $N \ne N'$

$$\int \overset{*}{\psi}{}^{(\pm)}_{Nq_1q_2}(\xi,\eta,R)\,\psi^{(\pm)}_{N'q_1q_2}(\xi,\eta,R)\,dv=0. \qquad /4.2/$$

Имеются еще два добавочных условия ортогональности, являющиеся следствием вырожденности энергетического спектра по квантовым числам $q$. Действительно, из уравнений /2.3/ и /2.4/ при $q_1\neq q_2$ и $q_1'\neq q_2'$ с помощью хорошо известного в задаче Штурма-Лиувилля приема[10] получим

$$\int_0^\infty \overset{*}{hc}{}_N^{q_1}\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2},-R\right)hc_N^{q_2}\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2},-R\right)d\xi=0,$$

$$\int_0^\infty \overset{*}{hs}{}_N^{q_1'}\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2},-R\right)hs_N^{q_2'}\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2},-R\right)d\xi=0,$$

$$\int_0^{2\pi} \overset{*}{hc}{}_N^{q_2}\left(\frac{\eta}{2},R\right)hc_N^{q_2'}\left(\frac{\eta}{2},R\right)d\eta=0,$$

$$\int_0^{2\pi} \overset{*}{hs}{}_N^{q_1}\left(\frac{\eta}{2},R\right)hs_N^{q_1'}\left(\frac{\eta}{2},R\right)d\eta=0.$$

Пользуясь этими формулами, легко показать, что при $q\neq q'$

$$\int \overset{*}{\psi}{}^{(\pm)}_{Nq_1q_2}(\xi,\eta,R)\,\psi^{(\pm)}_{Nq_1'q_2'}(\xi,\eta,R)\,dv=0. \qquad /4.3/$$

Наконец, подчеркнем, что у нас функции $C_N^q$ и $S_N^q$ отличаются от общепринятых полиномов Айнса[8] нормировкой /4.1/ и требованием, чтобы при $R\to0$ и $R\to\infty$ эллиптический базис переходил в полярный и параболический соответственно.

## 5. ПРЕДЕЛ $R\to0$

Покажем, что при $R\to0$ эллиптический базис переходит в полярный. Рассмотрим сначала рекуррентное соотношение /3.11/. При $R\to0$ в /3.13/ можно выбросить элементы $R\gamma_{2s}$, после чего детерминант переходит в произведение диагональных элементов. Обозначив номер равного нуля диагонального элемента через $m$, получим $\beta_{2m}=0$, то есть $A^{(+)}_{Nq_1}(0)=A^{(+)}_{Nq_2}(0)=-m^2$. Отсюда следует, что в пределе $R\to0$ квантовые числа $q_1$ и $q_2$ стремятся соответственно к значениям $m$ и $N-m$, а

$$\beta_{2s}(\pm R)\xrightarrow{R\to0}\bar\beta_{2s}=-s^2+m^2. \qquad /5.1/$$

Выписывая теперь рекуррентные соотношения /3.11/ последовательно для $s=0,1,\dots,m-1$ и помня, что $a_{-2}=0$, легко убедиться, что при $R\to0$ /3.11/ переходит в

$$\alpha_{2s}a_{2s+2}(\pm R)+\bar\beta_{2s}a_{2s}(\pm R)=0, \qquad /5.2/$$

если $0\le s\le m-1$.

Аналогично начиная рассмотрение "сверху", то есть исходя из условия $a_{2N+2}=0$, приходим к выводу, что при $R\to0$ и $m+1\le s\le N$ /3.11/ заменяется на

$$\bar\beta_{2s}a_{2s}(\pm R)\pm R\gamma_{2s}a_{2s-2}(\pm R)=0. \qquad /5.3/$$

При $s=m$, разлагая $A(R)$ в ряд Тейлора, получим

$$\beta_{2m}\xrightarrow{R\to0}\epsilon_{2m}\cdot R+O(R^2),$$

где

$$\epsilon_{2m}=-\left(\frac{dA^{(+)}_{Nm}}{dR}\right)_{R=0}+\frac{N-2m}{N+1/2},$$

и потому /3.11/ принимает при $s=m$ вид

$$\alpha_{2m}a_{2m+2}+R\epsilon_{2m}a_{2m}+R\gamma_{2m}a_{2m-2}=0. \qquad /5.4/$$

Согласно /5.2/ и /5.3/

$$a_{2m+2}=-\frac{R\gamma_{2m+2}}{\bar\beta_{2m+2}}a_{2m},\qquad a_{2m-2}=-\frac{\alpha_{2m-2}}{\bar\beta_{2m-2}}a_{2m},$$

и, подставляя это выражение в /5.4/, имеем

$$\left(\frac{dA^{(+)}_{N,m}}{dR}\right)_{R=0}=0.$$

Полученная формула является тем ограничением, при котором условия обрезания $s=-1$ и $s=N+1$ согласованы.

Аналогичный анализ рекуррентных соотношений /3.12/ приводит к следующим рекуррентным соотношениям:

$$\alpha_{2s+1}a_{2s+3}(\pm R)+\bar\beta_{2s+1}a_{2s+1}(\pm R)=0,\qquad 0\le s\le m-2, \qquad /5.5/$$

$$\bar\beta_{2s+1}a_{2s+1}(\pm R)\pm R\gamma_{2s+1}a_{2s-1}(\pm R)=0,\qquad m<s<N-1, \qquad /5.6/$$

в которых

$$\bar\beta_{2s+1}=-(s+1)^2+m^2,$$

и к условию

$$\left(\frac{dA^{(-)}_{N,m-1}}{dR}\right)_{R=0} = 0.$$

Теперь, обращаясь к двучленным рекуррентным соотношениям /5.2/ и /5.3/, получим

$$a_{2s}(\pm R) \xrightarrow{R\to 0} (-1)^s \frac{\bar\beta_0 \bar\beta_2 \dots \bar\beta_{2s-2}}{\alpha_0 \alpha_2 \dots \alpha_{2s-2}} = \frac{(m)_s (-m)_s}{(1/2)_s\, s!} \qquad /5.7/$$

при $1 \le s \le m$ и

$$a_{2s+2m}(\pm R) \xrightarrow{R\to 0} (-1)^m (\pm 2\lambda R)^s \frac{(-N+m)_s}{(2m+1)_s} \frac{a_{2m}(\pm R)}{s!} \qquad /5.8/$$

при $1 \le s \le N-m$. Здесь $(n)_s = \Gamma(n+s)/\Gamma(n)$.

Согласно /1.2/

$$C^q_N(\frac{\eta}{2}, R) \xrightarrow{R\to 0} \sum_{s=0}^{N} a_{2s}(R)\left(\frac{1+\cos\phi}{2}\right)^s ,$$

$$C^q_N(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2}, -R) \xrightarrow{R\to 0} \sum_{s=0}^{N} \frac{a_{2s}(-R)}{R^s}(-r)^s .$$

Подставляя сюда /5.7/ и /5.8/, видим, что многочлены приобретают вид

$$C^q_N(\frac{\eta}{2}, R) \xrightarrow{R\to 0} F(m, -m, \frac{1}{2}, \frac{1+\cos\phi}{2}) = (-1)^m \cos m\phi ,$$

$$C^q_N(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2}, -R) \xrightarrow{R\to 0} (-1)^m a_{2m}(-R)\left(\frac{r}{R}\right)^m F(-N+m, 2m+1, 2\lambda r).$$

Описанная схема рассуждений применима и к функциям $S^q_N(\frac{\eta}{2}, R)$ и $S^q_N(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2}, -R)$.Приведем результат:



$$S^q_N(\frac{\eta}{2}, R) \xrightarrow{R\to 0} \frac{\sin\phi}{2} F(1-m, 1+m, \frac{3}{2}, \frac{1+\cos\phi}{2}) = -(-1)^m \frac{\sin m\phi}{2m} ,$$

$$S^q_N(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2}, -R) \xrightarrow{R\to 0} i\, a_{2m-1}(-R)\left(-\frac{r}{R}\right)^m F(-N+m, 2m+1, 2\lambda r).$$

Легко убедиться, что

$$a_{2m}(-R) \xrightarrow{R\to 0} (-1)^m 2^{2m-1} , \quad a_{2m-1}(-R) \xrightarrow{R\to 0} (-1)^{m-1} \frac{4^{m-1}}{m} ,$$

и получить

$$\psi^{(+)}_{Nq_1q_2}(\xi, \eta, R) \xrightarrow{R\to 0} C^{(+)}_{Nq_1q_2}(R)\, 2^{m-1} e^{-\lambda r}\left(\frac{2r}{R}\right)^m F(-N+m, 2m+1, 2\lambda r)\cos m\phi ,$$

$$\psi^{(-)}_{Nq_1q_2}(\xi, \eta, R) \xrightarrow{R\to 0} iC^{(-)}_{Nq_1q_2}(R)\frac{(-1)^m}{2m^2} 2^{m-2} e^{-\lambda r}\left(\frac{2r}{R}\right)^m F(-N+m, 2m+1, 2\lambda r)\sin m\phi$$

Нами ниже будет доказано, что

$$|C^{(+)}_{Nq_1q_2}(R)| \xrightarrow{R\to 0} \left(\frac{8\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\lambda R}{2}\right)^m \sqrt{\frac{(N+m)!}{(N-m)!}} \frac{1}{(2m)!} , \qquad /5.9/$$

$$|C^{(-)}_{Nq_1q_2}(R)| \xrightarrow{R\to 0} \left(\frac{8\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\lambda R}{2}\right)^m \frac{4m^2}{(2m)!} \sqrt{\frac{(N+m)!}{(N-m)!}} . \qquad /5.10/$$

Пользуясь этими предельными выражениями, имеем

$$\psi^{(\pm)}_{Nq_1q_2}(\xi, \eta, R) \xrightarrow{R\to 0} \sqrt{2}\, \psi^{(\pm)}_{Nm}(r, \phi),$$

где в правой части знакам /+/ и /-/ соответствуют полярные волновые функции с определенной четностью относительно инверсии $\phi \to -\phi$.

## 6. ПРЕДЕЛ $R \to \infty$

Исследуем теперь параболический предел. При $R \to \infty$ в /3.13/ можно пренебречь конечными членами и свести детерминант к произведению диагональных членов. Обозначая через $n_1$ номер равного нулю диагонального элемента, имеем $\beta_{n_1} = 0$, и потому

$$A^{(+)}_{Nq_1}(R) \xrightarrow{R\to\infty} A^{(+)}_{Nn_1} = \frac{R}{N+1/2}(N-n_1) + \frac{R^2}{(2N+1)^2} . \qquad /6.1/$$

Здесь $n_1 = 0,2,\ldots$ Рассуждая аналогично по отношению к рекуррентному соотношению для $a_{2s}(-R)$, получим

$$A^{(+)}_{Nq_2}(-R) \xrightarrow{R\to\infty} A^{(+)}_{Nn_2} = -\frac{R}{N+1/2}(N-n_2) + \frac{R^2}{(2N+1)^2} \qquad /6.2/$$

с $n_2 = 0,2,\ldots$ Из условия /3.17/ следует, что

$$\frac{n_1+n_2}{2} = N , \qquad /6.3/$$

то есть $n_1$ и $n_2$ - суть параболические квантовые числа.
Точно так же из /3.14/ и /3.12/ находим

$$A^{(-)}_{Nq'_1}(R) \xrightarrow{R\to\infty} \frac{R}{N+1/2}(N-n'_1) + \frac{R^2}{(2N+1)^2} , \qquad /6.4/$$

$$A^{(-)}_{Nq'_2}(-R) \xrightarrow{R\to\infty} -\frac{R}{N+1/2}(N-n'_2) + \frac{R^2}{(2N+1)^2} , \qquad /6.5/$$

где $n'_1 + n'_2 = 2N$ и $n'_1 = 1,3,\ldots,\ n'_2 = 1,3,\ldots$ .

Из /6.1/, /6.2/ и /3.11а/ получаем, что при $n_1 \neq 2s$ и $n_2 \neq 2s$

$$\beta_{2s}(R) \xrightarrow{R\to\infty} R\beta^{(1)}_{2s} , \qquad /6.6/$$

$$\beta_{2s}(-R) \xrightarrow{R\to\infty} R\beta^{(2)}_{2s} , \qquad /6.7/$$



где величины $\beta^{(1)}_{2s}$ и $\beta^{(2)}_{2s}$ не зависят от $R$ и имеют вид

$$\beta^{(1)}_{2s} = \frac{n_1 - 2s}{N+1/2} , \qquad /6.8/$$

$$\beta^{(2)}_{2s} = \frac{2s - n_2}{N+1/2} . \qquad /6.9/$$

Эти формулы вместе с условием обрезания $a_{-2} = 0$ показывают, что в пределе $R \to \infty$ трехчленные рекуррентные соотношения /3.11/ переходят в следующие двухчленные:

$$\alpha_{2s} a_{2s+2}(R) + R\beta^{(1)}_{2s} a_{2s}(R) = 0, \quad 0 \le s \le \frac{n_1}{2} - 1 , \qquad /6.10/$$

$$\alpha_{2s} a_{2s+2}(-R) + R\beta^{(2)}_{2s} a_{2s}(-R) = 0, \quad 0 \le s \le \frac{n_2}{2} - 1 . \qquad /6.11/$$

Аналогично, используя условия обрезания $a_{2N+2} = 0$, имеем

$$\beta^{(1)}_{2s} a_{2s}(R) + \gamma_{2s} a_{2s-2}(R) = 0, \quad \frac{n_1}{2} \le s \le N , \qquad /6.12/$$

$$\beta^{(2)}_{2s} a_{2s}(-R) - \gamma_{2s} a_{2s-2}(-R) = 0, \quad \frac{n_2}{2} \le s \le N . \qquad /6.13/$$

Рассмотрим теперь случай $n_1 = 2s$ , $n_2 = 2s$. Тогда вместо /6.1/ и /6.2/ следует писать

$$A^{(+)}_{Nq_1}(R) \xrightarrow{R\to\infty} A^{(+)}_0 + \frac{R}{N+1/2}(N-n_1) + \frac{R^2}{(2N+1)^2} ,$$

$$A^{(+)}_{Nq_2}(-R) \xrightarrow{R\to\infty} A^{(+)}_0 - \frac{R}{N+1/2}(N-n_2) + \frac{R^2}{(2N+1)^2} ,$$

откуда

$$\beta_{n_1} = -\frac{n_1^2}{4} - A_0^{(+)}\ , \ \beta_{n_2} = -\frac{n_2^2}{4} - A_0^{(+)}\ .$$

Постоянная $A_0^{(+)}$ может быть получена из /3.11/ при $s = \frac{n_1}{2}$, если в него поставить выражения

$$a_{n_1-2} = -\frac{1}{R}\ \frac{\alpha_{n_1-2}}{\beta^{(1)}_{n_1-2}} a_{n_1}\ ,\ a_{n_1+2} = -\frac{\gamma_{n_1+2}}{\beta^{(1)}_{n_1+2}} a_{n_1}\ ,$$

являющиеся следствием соотношений /6.10/ и /6.12/. Результат таков:

$$A_0^{(+)} = \frac{n_1^2}{2} - N(n_1 + \frac{1}{2}).$$

Аналогичным образом исследуется предел $R \to \infty$ в рекуррентных соотношениях /3.12/. Имеем

$$A^{(-)}_{Nq_1'}(R) \xrightarrow{R\to\infty} \frac{R}{N+1/2}(N-n_1') + \frac{R^2}{(2N+1)^2}\ , \qquad /6.14/$$

$$A^{(-)}_{Nq_2'}(-R) \xrightarrow{R\to\infty} -\frac{R}{N+1/2}(N-n_2') + \frac{R^2}{(2N+1)^2} \qquad /6.15/$$

с $n_1' = 1,3,\ldots$ , $n_2' = 1,3,\ldots$ . Согласно /3.18/ $(n_1' + n_2')/2 = N$. Из /6.14/, /6.15/ и /3.12а/ следует, что при $n_1' \neq 2s+1, n_2' \neq 2s+1$

$$\beta_{2s+1}(R) \xrightarrow{R\to\infty} R\beta^{(1)}_{2s+1}\ ,\quad \beta_{2s+1}(-R) \xrightarrow{R\to\infty} R\beta^{(2)}_{2s+1}\ ,$$

где

$$\beta^{(1)}_{2s+1} = \frac{n_1' - 2s - 1}{N+1/2},\quad \beta^{(2)}_{2s+1} = -\frac{n_2' - 2s - 1}{N+1/2}\ . \qquad /6.16/$$

Эти формулы вместе с условием обрезания $a_{-1} = 0$ дают

$$\alpha_{2s+1} a_{2s+3}(R) + R\beta^{(1)}_{2s+1} a_{2s+1}(R) = 0,\quad 0 \le s \le \frac{n_1' - 3}{2}, \qquad /6.17/$$



$$\alpha_{2s+1} a_{2s+3}(-R) + R\beta^{(2)}_{2s+1} a_{2s+1}(-R) = 0,\ 0 \le s \le \frac{n_2' - 3}{2}, \qquad /6.18/$$

с условием обрезания $a_{2N+1} = 0$:

$$\beta^{(1)}_{2s+1} a_{2s+1}(R) + \gamma_{2s+1} a_{2s-1}(R) = 0,\quad \frac{n_1'+1}{2} \le s \le N-1, \qquad /6.19/$$

$$\beta^{(2)}_{2s+1} a_{2s+1}(-R) - \gamma_{2s+1} a_{2s-1}(-R) = 0,\quad \frac{n_2'+1}{2} \le s \le N-1. \qquad /6.20/$$

Рассмотрим случай, когда $n_1' = 2s+1$ , $n_2' = 2s+1$. При $R \to \infty$ имеем

$$A^{(-)}_{Nq_1'}(R) \xrightarrow{R\to\infty} A_0^{(-)} + \frac{R}{N+1/2}(N-n_1') + \frac{R^2}{(2N+1)^2},$$

$$A^{(-)}_{Nq_2'}(-R) \xrightarrow{R\to\infty} A_0^{(-)} - \frac{R}{N+1/2}(N-n_2') + \frac{R^2}{(2N+1)^2}\ ,$$

откуда

$$\beta_{n_1'} = -\frac{(n_1'-1)^2}{4} - n_1' - A_0^{(-)}\ ,\quad \beta_{n_2'} = -\frac{(n_2'-1)^2}{4} - n_2' - A_0^{(-)}\ .$$

Постоянная $A_0^{(-)}$ определяется из /3.12/ при $s = n_1'$ и равна

$$A_0^{(-)} = \frac{(n_1')^2}{2} - N(n_1' + \frac{1}{2}).$$

Приступим теперь к исследованию предела $R \to \infty$ в волновых функциях. Функции $C_N^q(\frac{\eta}{2}, R)$ и $C_N^q(i\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}, -R)$ при $R \to \infty$ согласно /1.3/ ведут себя следующим образом:

$$C_N^q(\frac{\eta}{2}, R) \xrightarrow{R\to\infty} \sum_{s=0}^{N} \frac{a_{2s}(R)}{R^s}(\frac{u^2}{2})^s\ , \qquad /6.21/$$

$$C_N^q\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2},-R\right)\xrightarrow{R\to\infty}\sum_{s=0}^{N}\frac{a_{2s}(-R)}{R^s}\left(-\frac{v^2}{2}\right)^s . \qquad /6.22/$$

Из двухчленных рекуррентных соотношений /6.10/ - /6.13/ получаем

$$a_{2s}(R)\xrightarrow{R\to\infty}(-R)^s\frac{\beta_0^{(1)}\beta_2^{(1)}\dots\beta_{2s-2}^{(1)}}{\alpha_0\alpha_2\dots\alpha_{2s-2}},\quad 1\le s\le\frac{n_1}{2}, \qquad /6.23а/$$

$$a_{2s}(-R)\xrightarrow{R\to\infty}(-R)^s\frac{\beta_0^{(2)}\beta_2^{(2)}\dots\beta_{2s-2}^{(2)}}{\alpha_0\alpha_2\dots\alpha_{2s-2}},\quad 1\le s\le\frac{n_2}{2}, \qquad /6.23б/$$

$$a_{2s}(R)\xrightarrow{R\to\infty}(-1)^{s-\frac{n_1}{2}}\frac{\gamma_{n_1+2}\gamma_{n_1+4}\dots\gamma_{2s}}{\beta_{n_1+2}^{(1)}\beta_{n_1+4}^{(1)}\dots\beta_{2s}^{(1)}},\quad \frac{n_1}{2}+1\le s\le N, \qquad /6.23в/$$

$$a_{2s}(-R)\xrightarrow{R\to\infty}\frac{\gamma_{n_2+2}\gamma_{n_2+4}\dots\gamma_{2s}}{\beta_{n_2+2}^{(2)}\beta_{n_2+4}^{(2)}\dots\beta_{2s}^{(2)}},\quad \frac{n_2}{2}+1\le s\le N, \qquad /6.23г/$$

и потому функции $C_N^q(\frac{\eta}{2},R)$ и $C_N^q(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2},-R)$ при $R\to\infty$ переходят в полиномы степени $n_1/2$ и $n_2/2$. Согласно /6.23а/, /6.23б/, /3.11а/ и /6.8/, /6.9/

$$a_{2s}(R)\xrightarrow{R\to\infty}\frac{(-\frac{n_1}{2})_s}{(1/2)_s}\cdot\frac{(2\lambda R)^s}{s!},\quad 1\le s\le\frac{n_1}{2},$$

$$a_{2s}(-R)\xrightarrow{R\to\infty}\frac{(-\frac{n_2}{2})_s}{(1/2)_s}\,\frac{(-2\lambda R)^s}{s!},\quad 1\le s\le\frac{n_2}{2}$$

и, следовательно,

$$C_N^q\left(\frac{\eta}{2},R\right)\xrightarrow{R\to\infty}F\left(-\frac{n_1}{2},\frac{1}{2},\lambda u^2\right),$$



$$C_N^q\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2},R\right)\xrightarrow{R\to\infty}F\left(-\frac{n_2}{2},\frac{1}{2},\lambda v^2\right).$$

Функции $S_N^q(\frac{\eta}{2},R)$ и $S_N^q(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2},-R)$ при $R\to\infty$ есть

$$S_N^q\left(\frac{\eta}{2},R\right)\xrightarrow{R\to\infty}\frac{u}{\sqrt{2R}}\sum_{s=0}^{N-1}\frac{a_{2s+1}(R)}{R^s}\left(\frac{u^2}{2}\right)^s,$$

$$S_N^q\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2},-R\right)\xrightarrow{k\to\infty}-i\frac{v}{\sqrt{2R}}\sum_{s=0}^{N-1}\frac{a_{2s+1}(-R)}{R^s}\left(-\frac{v^2}{2}\right)^s .$$

Из двухчленных рекуррентных соотношений /6.17/ - /6.20/ следует, что

$$a_{2s+1}(R)\xrightarrow{R\to\infty}(-R)^s\frac{\beta_1^{(1)}\beta_3^{(1)}\dots\beta_{2s-1}^{(1)}}{\alpha_1\alpha_3\dots\alpha_{2s-1}},\quad 1\le s\le\frac{n'_1-1}{2},$$

$$a_{2s+1}(-R)\xrightarrow{R\to\infty}(-R)^s\frac{\beta_1^{(2)}\beta_3^{(2)}\dots\beta_{2s-1}^{(2)}}{\alpha_1\alpha_3\dots\alpha_{2s-1}},\quad 1< s\le\frac{n'_2-1}{2},$$

$$a_{2s+1}(R)\xrightarrow{R\to\infty}(-1)^{s-\frac{n'_1-1}{2}}\frac{\gamma_{n'_1+1}\gamma_{n'_1+3}\dots\gamma_{2s+1}}{\beta_{n'_1+1}^{(1)}\beta_{n'_1+3}^{(1)}\dots\beta_{2s+1}^{(1)}}a_{n'_1},\quad \frac{n'_1+1}{2}\le s\le N-1,$$

$$a_{2s+1}(-R)\xrightarrow{R\to\infty}\frac{\gamma_{n'_2+1}\gamma_{n'_2+3}\dots\gamma_{2s+1}}{\beta_{n'_2+1}^{(2)}\beta_{n'_2+3}^{(2)}\dots\beta_{2s+1}^{(2)}}a_{n'_2},\quad \frac{n'_2+1}{2}\le s\le N-1,$$

и поэтому функции $S_N^q(\frac{\eta}{2},R)$ и $S_N^q(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2},-R)$ переходят в полиномы степени $(n'_1-1)/2$ и $(n'_2-1)/2$. Согласно этим формулам, а также /6.16/ и /3.12а/ имеем

$$a_{2s+1}(R)\xrightarrow{R\to\infty}\frac{(-\frac{n'_1-1}{2})_s}{(3/2)_s}\,\frac{(2\lambda R)^s}{s!},\quad 1\le s\le\frac{n'_1-1}{2},$$

$$a_{2s+1}(-R) \xrightarrow{R\to\infty} \frac{\left(-\frac{n_2'-1}{2}\right)_s}{(3/2)_s} \frac{(2\lambda R)^s}{s!}, \quad 1 \le s \le \frac{n_2'-1}{2}$$

и, следовательно,

$$S_N^2\left(\frac{\eta}{2}, R\right) \xrightarrow{R\to\infty} \frac{u}{\sqrt{2R}} F\left(-\frac{n_1'-1}{2}, \frac{3}{2}, \lambda u^2\right),$$

$$S_N^2\left(i\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}, -R\right) \xrightarrow{R\to\infty} -i\frac{v}{\sqrt{2R}} F\left(-\frac{n_2'-1}{2}, \frac{3}{2}, \lambda v^2\right).$$

Если теперь учесть, что

$$H_{2m}(x) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} F\left(-m, \frac{1}{2}, x^2\right),$$

$$H_{2m+1}(x) = (-1)^m \frac{(2m+1)!}{m!} 2xF\left(-m, \frac{3}{2}, x^2\right),$$

то легко показать, что

$$\psi^{(+)}_{Nq_1q_2}(\xi,\eta,R) \xrightarrow{R\to\infty} (-1)^{\frac{n_1+n_2}{2}} C^{(+)}_{Nq_1q_2}(R) \frac{\left(\frac{n_1}{2}\right)!\left(\frac{n_2}{2}\right)!}{(n_1)!(n_2)!} e^{-\frac{\lambda}{2}(u^2+v^2)} \times$$

$$\times H_{n_1}(\sqrt{\lambda}u) H_{n_2}(\sqrt{\lambda}v),$$

$$\psi^{(-)}_{Nq_1'q_2'}(\xi,\eta,R) \xrightarrow{R\to\infty} i(-1)^{\frac{n_1'+n_2'}{2}} C^{(-)}_{Nq_1'q_2'}(R) \frac{\left(\frac{n_1'-1}{2}\right)!\left(\frac{n_2'-1}{2}\right)!}{(n_1')!(n_2')!} e^{-\frac{\lambda}{2}(u^2+v^2)} \times$$

$$\times H_{n_1'}(\sqrt{\lambda}u) H_{n_2'}(\sqrt{\lambda}v),$$

где $n_1$ и $n_2$ четны, $n_1'$ и $n_2'$ нечетны.

Ниже будет показано, что

$$|C^{(+)}_{Nq_1q_2}(R)| \xrightarrow{R\to\infty} \left(\frac{\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{(n_1)!(n_2)!}}{2^N\left(\frac{n_1}{2}\right)!\left(\frac{n_2}{2}\right)!}, \qquad /6.24/$$



$$|C^{(-)}_{Nq_1'q_2'}(R)| \xrightarrow{R\to\infty} \left(\frac{\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{(n_1')!(n_2')!}}{\left(\frac{n_1'-1}{2}\right)!\left(\frac{n_2'-1}{2}\right)!} \frac{8\lambda R}{2^N}. \qquad /6.25/$$

Пользуясь этими выражениями, получаем

$$\psi^{(+)}_{Nq_1q_2}(\xi,\eta,R) \xrightarrow{R\to\infty} \psi^{(+)}_{n_1n_2}(u,v),$$

$$\psi^{(-)}_{Nq_1'q_2'}(\xi,\eta,R) \xrightarrow{R\to\infty} \psi^{(-)}_{n_1'n_2'}(u,v),$$

где $n_1$ и $n_2$ четны, $n_1'$ и $n_2'$ нечетны.

## 7. НОРМИРОВОЧНЫЕ ПОСТОЯННЫЕ

Обсудим теперь проблему нахождения эллиптических нормировочных констант $C^{(+)}_{Nq_1q_2}(R)$ и $C^{(-)}_{Nq_1'q_2'}(R)$. Из условий нормировки /4.1/ и явного вида функций $\psi^{(+)}_{Nq_1q_2}(\xi,\eta,R)$, $\psi^{(-)}_{Nq_1'q_2'}(\xi,\eta,R)$ следует, что

$$2R^2 |C^{(+)}_{Nq_1q_2}(R)|^2 \sum_{s,s',t,t'=0}^{N} (-1)^{t+t'} a_{2s}(R) a_{2s'}(R) a_{2t}(-R) a_{2t'}(-R) \times$$

$$\times \left\{ I^{1/2}_{ss'} J^{-1/2}_{tt'} + I^{-1/2}_{ss'} J^{1/2}_{tt'} \right\} = 1,$$

$$2R^2 |C^{(-)}_{Nq_1'q_2'}(R)|^2 \sum_{s,s',t,t'=0}^{N-1} (-1)^{t+t'} a_{2s+1}(R) a_{2s'+1}(R) a_{2t+1}(-R) \times$$

$$\times a_{2t'+1}(-R) \left\{ \tilde{I}^{1/2}_{ss'} \tilde{J}^{-1/2}_{tt'} + \tilde{I}^{-1/2}_{ss'} \tilde{J}^{1/2}_{tt'} \right\} = 1,$$

где $I^{\pm 1/2}_{ss'}$ и $J^{\pm 1/2}_{tt'}$ выражаются через вырожденные гипергеометрические функции /11/:

$$I^{\pm 1/2}_{ss'} = \frac{\Gamma(1 \pm 1/2)\Gamma(s+s'+1 \pm 1/2)}{\Gamma(s+s'+2 \pm 1)} F(s+s'+1 \pm 1/2,\ s+s'+2 \pm 1, -2\lambda R),$$

$$J_{tt}^{\pm 1/2} = \Gamma(t+t'+1 \pm 1/2)\,\psi(t+t'+1 \pm 1/2,\ t+t'+2 \pm 1,\ 2\lambda R)\ ,$$

$$\tilde{I}_{ss'}^{\pm 1/2} = \frac{\Gamma(2 \pm 1/2)\Gamma(s+s'+2 \pm 1/2)}{\Gamma(s+s'+4 \pm 1)} F(s+s'+2 \pm 1/2,\ s+s'+4 \pm 1,\ -2\lambda R),$$

$$\tilde{J}_{tt'}^{\pm 1/2} = \Gamma(t+t'+2 \pm 1/2)\,\psi(t+t'+2 \pm 1/2,\ t+t'+4 \pm 1,\ 2\lambda R)\ .$$

Используя асимптотики

$$\psi(a,n+1,x) \xrightarrow{x\to 0} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(a)}\left(\frac{1}{x}\right)^n\ , \quad F(a,c,x) \xrightarrow{x\to 0} 1\ ,$$

$$\psi(a,c,x) \xrightarrow{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^a\ , \quad F(a,c,x) \xrightarrow{x\to\infty} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-x)^{-a}\ ,$$

после довольно утомительных вычислений можно получить формулы /5.9/, /5.10/ и /6.24/, /6.25/, если считать, что фазы в нормировочных постоянных $C^{(\pm)}_{Nq_1q_2}(R)$ ведут себя как $\Phi^{(\pm)}_0 \to \pi m$ и $\Psi^{(-)}_\infty \to \frac{\pi}{2}(n_1+n_2-1)$, если $n_1$ и $n_2$ нечетны, и как $\Psi^{(+)}_\infty \to \frac{\pi}{2}(n_1+n_2)$, если $n_1$ и $n_2$ четны.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полный анализ двумерного атома водорода в эллиптических координатах должен включать в себя рассмотрение следующих вопросов: а/ нахождение сохраняющихся величин, определяющих эллиптический базис; б/ разложение эллиптического базиса по полярному и параболическому; в/ нахождение рекуррентных соотношений, определяющих коэффициенты межбазисных разложений; г/ расширение результатов на область непрерывного спектра. Эти вопросы мы намерены рассмотреть в последующих работах.

В заключение выражаем искреннюю признательность Г.С.Саакяну, Л.И.Пономареву, А.В.Матвеенко и С.И.Виницкому за полезные обсуждения.



## ПРИЛОЖЕНИЕ

Волновые функции двумерного атома водорода в полярной и параболической системе координат были вычислены в работах /9,12/ и имеют вид

$$\psi^{(+)}_{Nm}(r,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} R_{Nm}(r)\cos m\phi\ ,$$

$$\psi^{(-)}_{Nm}(r,\phi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} R_{Nm}(r)\sin m\phi\ ,$$

$$R_{Nm}(r) = C_{Nm}\frac{(2\lambda r)^m}{(2m)!}e^{-\lambda r}F(-N+m,\ 2m+1,\ 2\lambda r)\ ,$$

$$\psi^{(+)}_{n_1n_2}(u,v) = C_{n_1n_2}\, e^{-\frac{\lambda}{2}(u^2+v^2)} H_{n_1}(\sqrt{\lambda}\,u)H_{n_2}(\sqrt{\lambda}\,v)\ , \quad n_1, n_2 - \text{четны},$$

$$\psi^{(-)}_{n_1n_2}(u,v) = C_{n_1n_2}\, e^{-\frac{\lambda}{2}(u^2+v^2)} H_{n_1}(\sqrt{\lambda}\,u)H_{n_2}(\sqrt{\lambda}\,v)\ , \quad n_1, n_2 - \text{нечетны},$$

Волновые функции подчинены условиям нормировки:

$$\int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} d\phi\, \psi^{*(\pm)}_{Nm}(r,\phi)\psi^{(\pm)}_{Nm}(r,\phi) = \frac{1}{2}\ ,$$

$$\int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv(u^2+v^2)\,\psi^{*(\pm)}_{n_1n_2}(u,v)\,\psi^{(\pm)}_{n_1n_2}(u,v) = 1\ ,$$

которые соблюдаются, если

$$C_{Nm} = (2\lambda^3)^{1/2}\sqrt{\frac{(N+m)!}{(N-m)!}}\ ; \quad C_{n_1n_2} = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{2^{n_1+n_2}(n_1)!\,(n_2)!}}\ .$$

Отметим, что параболическая система координат выбрана в виде

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2}\ , \quad y = u\cdot v\ ,$$

$$0 \le u < \infty, \quad -\infty < v < \infty\ .$$

В табл. 1,2 и 3,4 приведен явный вид полярного и параболического базисов, а в табл. 5,6 - эллиптического базиса для низших квантовых состояний $\left(A^{(\pm)\prime} = A^{(\pm)} - \frac{R^2}{(2N+1)^2}\right)$.

Таблица 1

| N | m | $\psi^{(+)}_{Nm}\ (r,\varphi)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $\sqrt{\frac{8}{\pi}}\ e^{-2r}$ |
| 1 | 0 | $\sqrt{\frac{8}{27\pi}}\ e^{-\frac{2}{3}r}\,(1-\frac{4}{3}r)$ |
| 1 | 1 | $\frac{8}{9}\ \frac{e^{-\frac{2}{3}r}}{\sqrt{3\pi}}\, r\cos\varphi$ |
| 2 | 0 | $\sqrt{\frac{8}{125\pi}}\ e^{-\frac{2}{5}r}\,(1-\frac{8}{5}r+\frac{8}{25}r^2)$ |
| 2 | 1 | $\frac{8}{25}\sqrt{\frac{3}{5\pi}}\ e^{-\frac{2}{5}r}\ r\,(1-\frac{4}{15}r)\cos\varphi$ |
| 2 | 2 | $\frac{16}{125}\ \frac{e^{-2/3\,r}}{\sqrt{15\pi}}\, r^2\cos 2\varphi$ |

Таблица 2

| N | m | $\psi^{(-)}_{Nm}\ (r,\varphi)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $i\,\frac{8}{9}\ \frac{e^{-2/3\,r}}{\sqrt{3\pi}}\, r\sin\varphi$ |
| 2 | 1 | $i\,\frac{8}{25}\sqrt{\frac{3}{5\pi}}\ e^{-2/5\,r}\ r\,(1-\frac{4}{15}r)\sin\varphi$ |
| 2 | 2 | $i\,\frac{16}{125}\ \frac{e^{-2/5\,r}}{\sqrt{15\pi}}\ r^2\sin\varphi$ |



Таблица 3

| N | $n_1$ | $\psi^{(+)}_{n_1 n_2}\ (U,V)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $\sqrt{\frac{8}{\pi}}\ e^{-(U^2+V^2)}$ |
| 1 | 2 | $\frac{2}{3}\ \frac{1}{\sqrt{3\pi}}\, e^{-1/3(U^2+V^2)}\ (\frac{4}{3}U^2-1)$ |
| 1 | 0 | $\frac{2}{3}\ \frac{1}{\sqrt{3\pi}}\, e^{-1/3(U^2+V^2)}\ (\frac{4}{3}V^2-1)$ |
| 2 | 4 | $\frac{1}{5\sqrt{15\pi}}\, e^{-1/5(U^2+V^2)}\ (\frac{16}{25}U^4-\frac{24}{5}U^2+3)$ |
| 2 | 2 | $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{5\pi}}\ e^{-1/5(U^2+V^2)}\ (\frac{4}{5}U^2-1)(\frac{4}{5}V^2-1)$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{5\sqrt{15\pi}}\, e^{-1/5(U^2+V^2)}\ (\frac{16}{25}V^4-\frac{24}{5}V^2+3)$ |

Таблица 4

| N | $n_1$ | $\psi^{(-)}_{n_1 n_2}(U,V)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{8}{9}\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\ U\,V\,e^{-1/3(U^2+V^2)}$ |
| 2 | 3 | $\frac{8}{25\sqrt{15\pi}}\, e^{-1/5(U^2+V^2)}\ U\cdot V(\frac{4}{5}U^2-3)$ |
| 2 | 1 | $\frac{8}{25\sqrt{15\pi}}\, e^{-1/5(U^2+V^2)}\ U\cdot V(\frac{4}{5}V^2-3)$ |
| 3 | 5 | $\frac{4}{49}\ \frac{1}{\sqrt{105\pi}}\, e^{-1/7(U^2+V^2)}\ U\cdot V\,(\frac{16}{49}U^4-\frac{40}{7}U^2+15)$ |
| 3 | 3 | $\frac{4}{147}\sqrt{\frac{2}{7\pi}}\, e^{-1/7(U^2+V^2)}\ U\cdot V\,(\frac{4}{7}U^2-3)(\frac{4}{7}V^2-3)$ |
| 3 | 1 | $\frac{4}{49}\ \frac{1}{\sqrt{105\pi}}\, e^{-1/7(U^2+V^2)}\ U\cdot V\,(\frac{16}{49}V^4-\frac{40}{7}V^2+15)$ |

Таблица 5

| N | $\psi^{(+)}_{Nq}(\xi, \eta; F)$ | $A^{(+)'}$ |
|---|---|---|
| 0 | $\sqrt{\frac{8}{\pi}}\, e^{-R(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta)}$ | $A^{(+)'} = 0$ |
| 1 | $\left\{\frac{8(A^{(+)'}+1)}{27\pi(2A^{(+)'}+1)}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{R}{3}(\operatorname{ch}\xi+\cos\eta)} \left\{1-(A^{(+)'}+\frac{2R}{3})(\operatorname{ch}\xi-1)\right\} \times$ <br> $\times\left\{1+(A^{(+)'}-\frac{2R}{3})(1+\cos\eta)\right\}$ | $A^{(+)'}(A^{(+)'}+1) =$ <br> $= \frac{4}{9}R^2$ |
| 2 | $\frac{4}{5\sqrt{10\pi}} \left\{1+\frac{25}{12}(\frac{A^{(+)'}}{R})^2+\frac{1}{3}(\frac{A^{(+)'}}{A^{(+)'}+4})^2\right\}^{-1/2} e^{-R/5(\operatorname{ch}\xi+\cos\eta)} \times$ <br> $\times\left\{1-(A^{(+)'}+\frac{4R}{5})(\operatorname{ch}\xi-1)+\frac{A^{(+)'}}{6}(A^{(+)'}+1+\frac{4R}{5})(\operatorname{ch}\xi-1)^2\right\} \times$ <br> $\times\left\{1+(A^{(+)'}-\frac{4R}{5})(1+\cos\eta)+\frac{A^{(+)'}}{6}A^{(+)'}+1-\frac{4R}{5})(1+\cos\eta)^2\right\}$ | $A^{(+)'}(A^{(+)'}+1)\times$ <br> $\times(A^{(+)'}+4) =$ <br> $= \frac{16R^2}{25}(A^{(+)}+3)$ |

Таблица 6

| N | $\psi^{(-)}_{Nq}(\xi, \eta; R)$ | $A^{(-)'}$ |
|---|---|---|
| 1 | $-i\,\frac{4}{9}R\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\operatorname{sh}\xi\sin\eta\, e^{-R/3(\operatorname{ch}\xi+\cos\eta)}$ | $A^{(-)'} = -1$ |
| 2 | $-i\,\frac{24}{25}\frac{R}{\sqrt{30\pi}}(\frac{A^{(-)'}+4}{2A^{(-)'}+5})^{1/2}\operatorname{sh}\xi\sin\eta\, e^{-R/5(\operatorname{ch}\xi+\cos\eta)} \times$ <br> $\times\left\{1-\frac{1}{3}(A^{(-)'}+1+\frac{2R}{5})(\operatorname{ch}\xi-1)\right\}\left\{1+\frac{1}{3}A^{(-)'}+1-\frac{2R}{5})(1+\cos\eta)\right\}$ | $(A^{(-)'}+1)(A^{(-)'}+4) =$ <br> $= \frac{4}{25}R^2$ |
| 3 | $-i\,\frac{8R}{49}\sqrt{\frac{3}{7\pi}}\left\{1-\frac{49}{10}(\frac{A^{(-)'}+1}{R})+\frac{3}{5}(\frac{A^{(-)'}+1}{A^{(-)'}+9})^2\right\}^{-1/2} e^{-R/7(\operatorname{ch}\xi+\cos\eta)} \times$ <br> $\times\operatorname{sh}\xi\sin\eta\left\{1-\frac{1}{3}(A^{(-)'}+1+\frac{4R}{7})(\operatorname{ch}\xi-1)+\frac{A^{(-)'}+1}{30}(A^{(-)'}+4+\frac{4R}{7})(\operatorname{ch}\xi-1)\right\}\times$ <br> $\times\ 1+\frac{1}{3}(A^{(-)'}+1-\frac{4R}{7})(1+\cos\eta)+\frac{A^{(-)'}+1}{30}(A^{(-)'}+4-\frac{4R}{7})(1+\cos\eta)^2\}$ | $(A^{(-)'}+1)(A^{(-)'}+4)\times$ <br> $\times(A^{(-)'}+9) =$ <br> $= \frac{16}{49}R^2(A^{(-)'}+6)$ |

## ЛИТЕРАТУРА


1. London R. Am.J.Phys., 1959, 27, p. 649.
2. Shibuya T., Wufman C.E. Am.J.Phys., 1965, 33, p. 570.
3. Fock V.A. Z.Phys., 1935, 98, p. 145.
4. Eisenhart J.P. Phys.Rev., 1948, 74, p. 87.
5. Coulson C.A., Robinson P.D. Proc.Phys.Soc., 1958, 71, p. 815.
6. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. "Наука", М., 1976.
7. Mardoyan L.G. et al. J.Phys.A, 1983, 16, p. 711.
8. Arscott F.M. Proc.Roy.Soc.Edinburg, 1967, A67, p. 265.
9. Zaslow B., Zandler M.E. Am.J.Phys., 1967, 35, p. 1118.
10. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. ИИЛ, М., 1958.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. "Наука", М., 1973.
12. Cisneros A., McJntosh H.V. J.Math.Phys., 1968, 10, p. 277.



Рукопись поступила в издательский отдел
6 июля 1983 года.





Мардоян Л.Г. и др. P2-83-475

Двумерный атом водорода. Эллиптический базис


Работа посвящена анализу двумерного атома водорода в эллиптических координатах. Методом разделения переменных проблема сведена к решению уравнения Айнса в комплексной плоскости при определенных граничных условиях. Показано, что найденные решения переходят при $R \to 0$ и $R \to \infty$ / $R$ - параметр, задающий эллиптические координаты/ соответственно в полярный и параболический базисы. Приведен явный вид эллиптического базиса для низших квантовых состояний.



Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983



Mardoyan L.G. et al. P2-83-475

Two-Dimensional Hydrogen Atom. Elliptic Basis


The paper is devoted to analysis of a two-dimensional hydrogen atom in elliptic coordinates. By the method of separation of variables the problem is reduced to the solution of Ince equation in the complex plane under certain boundary conditions. It is shown that solutions obtained in the limits $R \to 0$ and $R \to \infty$ ( $R$ is a parameter defining the elliptic coordinates) change into the polar and parabolic bases, respectively. An explicit form of the elliptic basis is given for lowest quantum states.



The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод авторов