сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-83-377

О.К.Пашаев, С.А.Сергеенков

ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА U(p,q) НУШ С НЕТРИВИАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

1983

Векторное нелинейное уравнение Шредингера /НУШ/ возникает во многих задачах физики конденсированного состояния [1], нелинейной оптики и физики плазмы [2]. Например, многоподрешеточная магнитная цепочка со слабой связью между подрешетками редуцируется к НУШ с изогруппой $U(p, q)$ [1]. Обобщенная многоцветная модель Хаббарда в длинноволновом, непрерывном пределе описывается $U(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ НУШ для антиферромагнитного случая и $U(n, 0)$ НУШ для ферромагнитного случая [1]. Существуют обобщенные матричные НУШ [2,3], НУШ на симметрических пространствах [4] и даже на редуктивных однородных пространствах [5]. Примечательно, что они сохраняют свойство интегрируемости. Однако достаточно полное исследование таких систем проведено лишь при тривиальных граничных условиях, накладываемых на полевые переменные [6,7,2]: $\psi(x, t) \to 0$, $x \to \pm\infty$. В то же время физически наиболее разумно работать на унитарных представлениях изогруппы. Поэтому, если в случае компактной изогруппы $U(n, 0)$ можно использовать конечномерные представления и соответственно тривиальные граничные условия, в случае некомпактных групп $U(p, q)$ /и даже $U(0, q)$/ необходимо использовать бесконечномерные представления. Это приводит к системе с бесконечным числом взаимодействующих частиц и, соответственно, с нетривиальными граничными условиями $\psi(x, t) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \mathrm{const}$ *.

Однако при переходе к последнему случаю анализ системы значительно усложняется. За прошедшие 10 лет, начиная с работы Захарова и Шабата [8], посвященной скалярному $U(0, 1)$ НУШ, появилось еще несколько работ в этом направлении [9-11]. Однако совершенно неисследованным остался векторный вариант НУШ.

Недавно авторами совместно с Маханьковым В.Г. был выполнен ряд работ, посвященных этой проблеме [12,13]. В них подробно исследован случай $U(0, q)$ НУШ. Случай $U(p, q)$ НУШ, более сложный из-за несамосопряженности L оператора Лакса, находится в процессе изучения.

1. В настоящей работе мы изучим каноническую структуру $U(p, q)$ НУШ

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2((\bar{\psi}\psi) - \rho)\psi = 0 \qquad /1/$$

с константными граничными условиями $\psi(x, t) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \psi_\pm$.

---

*Мы ограничились псевдоунитарными изогруппами, так как только в этом случае гамильтониан системы остается эрмитовым [3].

Здесь

$$(\bar\psi\psi) = \sum_{a=1}^{p} |\psi^{(a)}|^2 - \sum_{a=p+1}^{n} |\psi^{(a)}|^2$$ – билинейная форма,

$$\rho = (\bar\psi_+\psi_+) = (\bar\psi_-\psi_-)$$ – бесконечно вырожденное

"вакуумное" состояние /конденсат/ с нулевой энергией;

$$\bar\psi = \psi^+\gamma_0, \quad \gamma_0 = \mathrm{diag}\,(\underbrace{+1,\ldots,+1}_{p}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{q}).$$

Система /1/ гамильтонова. Ее каноническая структура при тривиальных граничных условиях была исследована в [14]. В канонических переменных $\psi, \bar\psi$: $\{\psi^{(a)}(x), \bar\psi^{(b)}(y)\} = i\delta^{ab}\delta(x-y)$ гамильтониан есть $H = \int x[(\bar\psi_x\psi_x) - ((\bar\psi\psi)-\rho)^2]$.

Отображение переменных $\psi, \bar\psi$ в данные рассеяния осуществляется с помощью линейной задачи:

$$\phi_x = U\phi, \quad \phi_t = V\phi, \qquad /2/$$

явный вид матриц U, V приведен в работе [7]. Нам понадобится лишь первое из уравнений /2/, имеющее вид

$$\phi_x(x,\lambda) = -i\lambda\Sigma\phi(x,\lambda) + Q(x)\phi(x,\lambda),$$

где

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & -i\bar\psi(x) \\ -i\psi(x) & 0 \end{pmatrix}. \qquad /3/$$

Введем в рассмотрение матричные решения Йоста для спектральной задачи /3/, определяемые своими асимптотиками:

$$\Phi_\pm(x,\lambda) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} X_\pm(x,\lambda), \qquad /4/$$

где

$$X_\pm(x,\lambda) = \chi_\pm(\lambda)e^{i\Lambda x},$$

$$\chi_\pm(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+\zeta & a(\lambda) \\ \psi_\pm & G_\pm \end{pmatrix},$$

$$G_\pm = \begin{pmatrix} \psi_{\pm1} & \bar\psi_{\pm2} & -\bar\psi_{\pm3}/\bar\psi_{\pm1} & \ldots & -\bar\psi_{\pm n}/\bar\psi_{\pm1} \\ \psi_{\pm2} & -\bar\psi_{\pm1} & 0 & \ldots & 0 \\ \psi_{\pm3} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{\pm n} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

$$a(\lambda) = (\lambda-\zeta, 0, \ldots, 0),$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}(-\zeta, \zeta, \lambda, \ldots, \lambda), \quad \zeta^2 = \lambda^2 + \rho; \quad \det\chi_\pm = 2\zeta\rho.$$

Поскольку решения Йоста $\Phi_+(x,\lambda)$ и $\Phi_-(x,\lambda)$ образуют фундаментальную систему, то между ними существует линейная связь:

$$\Phi_-(x,\lambda) = \Phi_+(x,\lambda)S(\lambda), \qquad /5/$$

где матрица рассеяния $S(\lambda)$ удовлетворяет условиям псевдоунитарности:

$$\bar S S = I, \quad \bar S = \Gamma_0 S^+ \Gamma_0, \quad \Gamma_0 = \mathrm{diag}(1, \gamma_0), \qquad /6/$$

и унимодулярности:

$$\det S(\lambda) = 1. \qquad /7/$$

Перейдем от решений Йоста $\Phi_-(x,\lambda)$ к новым матричным функциям Z:

$$\Phi_-(x,\lambda) = X_+(x,\lambda)e^{-i\Lambda x}Z(x,\lambda), \qquad /8/$$

имеющим асимптотики /см. /4/ и /5//

$$\begin{cases} Z(x,\lambda) \xrightarrow[x\to-\infty]{} e^{i\Lambda x}X_+^{-1}(x,\lambda)X_-(x,\lambda), \\ Z(x,\lambda) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{i\Lambda x}S(\lambda) \end{cases} \qquad /9/$$

и удовлетворяющим уравнению

$$-2i\zeta Z_x(x,\lambda) = (W(x,\lambda) + 2\zeta\Lambda(\lambda))Z(x,\lambda), \qquad /10/$$

где

$$W(x,\lambda) = \chi_+^{-1}(\lambda) P_+(x) \chi_+(\lambda),\ P_+(x) = G(x) - Q_+ = \begin{pmatrix} 0 & -i\bar{p} \\ -ip & 0 \cdot I_n \end{pmatrix},$$

$$Q_{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} Q(x).$$

Раскрывая систему /10/ по первому столбцу матрицы Z, получим систему искомых уравнений:

$$\begin{cases} -2i\zeta\Phi_x = \alpha + [\beta + 2\lambda(\lambda-\zeta)(\bar{\psi}_+ p)/\rho] f_1 + (B \cdot \vec{f}), \\ -2i\zeta f_{1x} + [\beta + 2\lambda(\lambda-\zeta)(\psi_+ p)/\rho] f_1^2 + (B \cdot \vec{f}) f_1 + \\ \qquad + 2(\alpha - 2\zeta^2) f_1 = \bar{\beta} - 2\lambda(\lambda+\zeta)(\bar{\psi}_+ p)/\rho - (B \cdot \vec{f}), \\ -2i\zeta \vec{f}_x + [\beta + 2\lambda(\lambda-\zeta)(\bar{\psi}_+ p)/\rho] f_1 \vec{f} + (B \cdot \vec{f})\vec{f} + \\ \qquad + [\alpha + 2\rho - 2\lambda(\lambda+\zeta)]\vec{f} = A\{[2\rho - 2\lambda(\lambda+\zeta)] - [2\rho - 2\lambda(\lambda-\zeta)] f_1\}/\rho, \end{cases} \qquad /11/$$

где

$$z_{11} = e^{-i\zeta x + \Phi(x,\lambda)}, \quad f_1 = \frac{z_{21}}{z_{11}}, \quad \vec{f} = \frac{\vec{z}}{z_{11}},$$

$$A^T = (\gamma_2/\bar{\psi}_{+1}, \gamma_3, \dots, \gamma_n), \quad B = (c_2, c_3/\bar{\psi}_{+1}, \dots, c_n/\bar{\psi}_{+1}),$$

$$\alpha = (\bar{\psi}_+ p) + (\bar{p}\psi_+), \quad \beta = (\bar{p}\psi_+) - (\bar{\psi}_+ p),$$

$$c_n = (\bar{\psi}_{+1}\, \bar{p}_n) - (\bar{\psi}_{+n}\, \bar{p}_1), \quad \gamma_n = \rho p_n - \psi_{+n}(\bar{\psi}_+ p).$$

Заметим, что введенная выше функция $\Phi(x,\lambda)$ является квазиклассическим представлением для компоненты $z_{11}(x,\lambda)$. В силу /9/ она имеет асимптотики

$$\begin{cases} \Phi(-\infty,\lambda) = \ln Z_0(\lambda), \\ \Phi(+\infty,\lambda) = \ln S_{11}(\lambda), \end{cases} \qquad /12/$$

где

$$Z_0(\lambda) = (X_+^{-1} X_-)_{11} = \frac{1}{2\zeta}[(\lambda+\zeta) - \frac{(\psi_+\psi_-)}{\rho}(\lambda-\zeta)].$$

Производящая функция для локальных законов сохранения $\ln S_{11}(\lambda)$ связана с решением $\Phi(x,\lambda)$ следующим образом:

$$\ln S_{11}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Phi_x(x,\lambda) + \ln Z_0(\lambda). \qquad /13/$$

Для достижения поставленной цели необходимо найти асимптотические решения системы /11/ в виде рядов по обратным степеням λ и сравнить коэффициенты этих разложений с соответствующими коэффициентами разложения $\ln S_{11}(\lambda)$. Искомые ряды при больших λ имеют вид

$$\ln S_{11}(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{(2i\lambda)^n}, \quad \Phi_x(x,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{(2i\lambda)^n}, \qquad /14/$$

$$f_1(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(x)}{(2i\lambda)^n}, \quad \vec{f}(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{F}_n(x)}{(2i\lambda)^n}, \quad \ln Z_0(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{(2i\lambda)^n}.$$

В принципе, из системы /11/ можно получить рекуррентные формулы для коэффициентов $\Phi_n(x)$, $F_n(x)$ и $\vec{F}_n(x)$, которые связаны с интегралами движения I_n следующим образом:

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Phi_n(x) + y_n. \qquad /15/$$

Однако ввиду громоздкости этих соотношений мы их не приводим. А вместо этого приведем лишь первые три интеграла движения, имеющие прямой физический смысл.

Учитывая разложение $\zeta(\lambda)$ в ряд по $1/\lambda$ с необходимой нам точностью:

$$\zeta(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 + \rho} \simeq \lambda + \frac{i\rho}{2i\lambda} + \frac{i\rho^2}{(2i\lambda)^3} + O(1/\lambda^5),$$

для первых трех интегралов получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx[(\bar{\psi}\psi) - \rho](x,t), \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx(\bar{\psi}\psi_x)(x,t), \\ I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx[(\bar{\psi}\psi_{xx}) + (\bar{\psi}\psi)^2 - \rho^2](x,t). \end{aligned} \qquad /16/$$

Отметим, что первые два интеграла соответствуют локальным законам сохранения числа частиц и импульса в системе /1/. Третий интеграл имеет не столь очевидный физический смысл. Нетрудно, однако, убедиться, что I_3 входит в определение гамильтониана для системы /1/, который дается выражением

$$H = I_3 - 2\rho I_1 . \qquad /17/$$

2. Зная представление гамильтониана через коэффициенты разложения функции $\ell n\, S_{11}(\lambda)$ и используя скобки Пуассона между различными элементами S-матрицы, мы можем в явном виде вычислить временную эволюцию последней.

Ввиду того, что процедура получения скобок Пуассона является достаточно громоздкой, мы опускаем промежуточные выкладки. В полном объеме эти и другие вычисления будут опубликованы отдельно. Для скобок Пуассона между элементами $S_{11}(\lambda)$ и $S_{ij}(\mu)$, $i, j = 1,2\ldots, n+1$ /необходимых для определения временной эволюции S-матрицы/ имеем при $\lambda \neq \mu$, $\zeta(\lambda) \neq 0$, $\zeta(\mu) \neq 0$

$$\{S_{11}(\lambda),\ S_{ij}(\mu)\} = -\{S_{11}(\lambda),\ S_{ji}(\mu)\}, \qquad /18/$$

$$\{S_{11}(\lambda),\ S_{ii}(\mu)\} = 0, \quad i, j = 1,2,\ldots, n+1,$$

$$\{S_{11}(\lambda),\ S_{12}(\mu)\} = \frac{\lambda\mu + \rho}{2(\lambda - \mu)\zeta(\lambda)\,\zeta(\mu)}\, S_{11}(\lambda) S_{12}(\mu),$$

$$\{S_{11}(\lambda),\ S_{1k}(\mu)\} = \frac{\zeta(\lambda)\zeta(\mu) + (\lambda\mu + \rho)}{4(\lambda - \mu)\zeta(\lambda)\,\zeta(\mu)}\, S_{11}(\lambda) S_{1k}(\mu), \qquad /19/$$

$$\{S_{11}(\lambda),\ S_{2k}(\mu)\} = \frac{\zeta(\lambda)\zeta(\mu) - (\lambda\mu + \rho)}{4(\lambda - \mu)\zeta(\lambda)\zeta(\mu)}\, S_{11}(\lambda) S_{2k}(\mu),$$

$$\{S_{11}(\lambda),\ S_{ij}(\mu)\} = 0, \quad k, i, j = 3,4,\ldots, n+1.$$

Заметим, что из соотношений /18/ в силу /14/ вытекает, что все локальные интегралы движения I_n находятся в инволюции:

$$\{I_n, I_m\} = 0. \qquad /20/$$

Для получения искомой эволюции S-матрицы достаточно теперь разложить левые и правые части соотношений /19/ /предварительно разделив их на $S_{11}(\lambda)$/ по обратным степеням λ и воспользоваться канонической формой уравнений движения:

$$\{H, S_{ij}(\lambda, t)\} = \partial_t S_{ij}(\lambda, t). \qquad /21/$$

Учитывая формулы /14, 17, 19, 20/, получим

$$\partial_t S_{ii}(\lambda, t) = 0, \quad \partial_t S_{12}(\lambda, t) = -4i\lambda\zeta S_{12}(\lambda, t),$$

$$\partial_t S_{1k}(\lambda, t) = -i(\lambda + \zeta)^2 S_{1k}(\lambda, t), \quad \partial_t S_{2k}(\lambda, t) = -i(\lambda - \zeta)^2 S_{2k}(\lambda, t), \qquad /22/$$

$$\partial_t S_{kj}(\lambda, t) = 0, \quad \partial_t S_{\ell m}(\lambda, t) = -\partial_t S_{m\ell}(\lambda, t),$$

$$i, \ell, m = 1,2,\ldots, n+1; \quad k, j = 3,4,\ldots, n+1.$$

Соотношения /22/ можно записать в более компактной форме:

$$i S_t(\lambda, t) = [\Gamma(\lambda), S(\lambda, t)], \qquad /23/$$

где

$$\Gamma(\lambda) = \mathrm{diag}((\lambda + \zeta)^2, (\lambda - \zeta)^2, 0, \ldots, 0).$$

Из /22/ можно заключить, что элементы $S_{1\alpha}(\lambda)$ и $S_{2\alpha}(\lambda)$, $\alpha = 2,3, \ldots, n+1$, являются переменными углового типа и зависят от времени. При этом важно отметить появление двух различных частот $\omega_{1,2} = (\lambda \pm \zeta)^2$, что может привести к существованию осциллирующих связанных состояний /15/.

Легко видеть, что при $\rho \to 0$ результаты /22/ переходят в рассмотренные при тривиальных граничных условиях /14/.

Из вышеизложенного следует, что НУШ с некомпактной $U(p, q)$-изогруппой и нетривиальными граничными условиями /1/ сохраняет свойства полной интегрируемости /бесконечная серия локальных законов сохранения в инволюции и т.д./.

В заключение авторы выражают благодарность профессору В.Г.Маханькову за обсуждение постановки задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kundu A., Makhankov V.G., Pashaev O.K. JINR, E17-82-677, Dubna, 1982.
2. Кулиш П.П. Записки ЛОМИ. "Наука", Л., 1982, т. 115, с. 126.
3. Маханьков В.Г., Пашаев О.К. ТМФ, 1982, т. 53, с. 55.
4. Makhankov V.G., Pashaev O.K. Phys.Lett.,1983, 95A, p. 95.
5. Fordy A.P., Kulish P.P. Preprint UMIST, 1982.
6. Манаков С.В. ЖЭТФ, 1973, т. 65, №2, с. 505.
7. Makhankov V.G., Pashaev O.K. JINR, E2-81-264, E2-81-540, Dubna, 1981.
8. Захаров В.Е., Шабат А.Б. ЖЭТФ, 1973, т. 64, с. 1627.

9. Gerdjikov V.S., Kulish P.P. Bulg.J.Phys., 1978, v. 5, p. 337.
10. Kawata T., Inoue H. J.Phys.Soc.Jpn., 1979, v. 44, p. 1722.
11. Boiti M., Pempinelli F. Preprint Lecce, Italy, 1981.
12. Маханьков В.Г., Пашаев О.К., Сергеенков С.А. ОИЯИ, Р2-83-186, Дубна, 1982.
13. Makhankov V.G., Pashaev O.J., Sergeenkov S.A. JINR, E17-82-601, Dubna, 1982.
14. Makhankov V.G., Pashaev O.K. Phys.Lett., 1982, v. 83A, p. 218.
15. Makhankov V.G., Makhaldiani N.V., Pashaev O.K. Phys.Lett., 1981, v. 81A, p. 161.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 июня 1983 года.

Пашаев О.К., Сергеенков С.А. Р2-83-377
Гамильтонова структура $U(p, q)$ НУШ с нетривиальными граничными условиями

Изучается каноническая структура нелинейного уравнения Шредингера с некомпактной $U(p, q)$ изогруппой. Условие унитарности приводит к необходимости рассматривать задачу о взаимодействии бесконечного числа частиц или задачу с нетривиальными граничными условиями. Скобки Пуассона между элементами матрицы рассеяния вычислены в явном виде и установлена их эволюция во времени. Получена бесконечная серия локальных интегралов движения, находящихся в инволюции.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Pashaev O.K., Sergeenkov S.A. P2-83-377
Hamiltonian Structure $U(p, q)$ of Nonlinear Schrödinger Equation with Nonvanishing Boundary Equations

Canonical structure and integrability of Nonlinear Schrödinger Equation with noncompact $U(p, q)$ isogroup is investigated. Unitarity condition makes us to consider the interaction problem for infinite number of particles or the problem under nonvanishing boundary conditions. The Poisson brackets between the scattering matrix elements are calculated explicitly and the time evolution of the spectral data is given. The existence of infinite sets of local involutive conservation laws is established as well.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automations, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод авторов