объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-83-352

В.Ш.Гогохия

"ПАДЕНИЕ НА ЦЕНТР" В КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Направлено в журнал
"Теоретическая и математическая физика"

1983

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование сингулярных потенциалов притяжения в нерелятивистской квантовой механике связано с рядом серьезных трудностей [1–5]. Во-первых, это - проблема "падения на центр", заключающаяся в отсутствии конечного основного состояния рассматриваемой связанной системы, что является неприемлемым с физической точки зрения. А во-вторых - зависимость физических величин, например дискретных уровней энергии, от произвольной постоянной. Эти две проблемы тесно связаны, и, как будет показано в данной работе, правильное решение одной из них автоматически решает и другую.

С математической точки зрения уравнение Шредингера с регулярными потенциалами существенно отличается от уравнения Шредингера с сингулярными потенциалами [6,7]. В первом случае оператор Шредингера, являясь эрмитовым и одновременно самосопряженным, приводит к полному набору квадратично интегрируемых собственных функций. Во втором же случае оператор Шредингера, формально заданный как эрмитовый, уже не является самосопряженным. Собственные функции образуют сверхполный набор. Для получения полного набора надо фиксировать фазу, то есть асимптотическое поведение волновой функции вблизи особой точки /или, как говорят математики, расширить оператор до самосопряженного/, что связано с граничным условием в нуле, выбор которого неоднозначен [1,4,6,7].

Доопределяя, таким образом, уравнение Шредингера с сингулярным потенциалом граничным условием в нуле, получаем решения, характеризуемые, как уже говорилось выше, рядом нефизических особенностей.

Эти трудности пытались решить путем обрезания сингулярного в нуле потенциала на малых расстояниях. Действительно, сингулярность такого рода потенциалов вплоть до очень малых расстояний является идеализацией. Во всех реальных случаях потенциалы со степенной особенностью в нуле тем или иным способом модифицируются при $r \to 0$. Но в то время, как для регулярных потенциалов решения не зависят от того, каким способом данные потенциалы модифицируются на малых расстояниях, обрезание сингулярного потенциала существенно влияет на полученные решения. Все физические величины в этом случае зависят не только от радиуса обрезания, но и от того, каким способом он устремляется к нулю [1,4,6].

Решение проблемы сингулярных потенциалов следует искать в рамках обобщения потенциальной теории, каковым является квазипотенциальный подход в квантовой теории поля [8–11]. Как будет показано в данной работе, релятивистский характер квазипотенциальных уравнений позволяет естественным образом учитывать изменение поведения сингулярных потенциалов на малых расстояниях /без каких-либо дополнительных предположений/. Квазипотенциальные решения поэтому не зависят от произвольной постоянной, а в выражении для дискретного спектра отсутствует проблема "падения на центр".

В отличие от работ[1,4], в которых проблема "падения на центр" подробно исследовалась в координатном пространстве, в данной работе с самого начала предлагается использовать импульсное представление. Как оказалось, рассмотрение задачи в импульсном представлении обладает рядом преимуществ по сравнению с координатным представлением. Одним из них является наличие в явном виде граничных условий в нуле и на бесконечности, которым должны удовлетворять решения соответствующих уравнений, в то время как в координатном пространстве граничные условия заданы в неявном виде.

Необходимо отметить также, что проблема сингулярных потенциалов в квантовой механике ни в коей мере не является академической /хотя и академические проблемы требуют своего решения/, так как многие конкретные задачи физики твердого тела, атомной и ядерной физики сводятся к решению соответствующих уравнений с сингулярными, вплоть до достаточно малых расстояний, потенциалами[12].

Настоящая работа построена следующим образом. В разделе 2 проблема "падения на центр" сформулирована в импульсном представлении в случае сингулярного потенциала притяжения $U(r)=-\lambda r^{-2}$. В разделе 3 для того же сингулярного потенциала притяжения получена квазипотенциальная задача Штурма-Лиувилля в импульсном пространстве. В разделе 4 для решения квазипотенциального уравнения применяется асимптотический обобщенный ВКБ-метод /метод эталонного уравнения/. С его помощью получен дискретный спектр при любых энергиях связи. В пятом разделе изучены ультрарелятивистский и нерелятивистский пределы квазипотенциальных уравнений и их решений, а также проводится обсуждение полученных результатов.

2. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ "ПАДЕНИЯ НА ЦЕНТР" В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Сформулируем проблему "падения на центр" в импульсном представлении. Для этого рассмотрим уравнение Липпмана-Швингера для полной амплитуды рассеяния двух скалярных частиц одинаковой массы m, заданной вне энергетической поверхности:

$$T(\vec{p},\vec{p}\,') = U[(\vec{p}-\vec{p}\,')^2] + \int d^3q \frac{U[(\vec{p}-\vec{q}\,)^2]\,T(\vec{q},\vec{p}\,')}{k^2-q^2}, \qquad /1/$$

где $\vec{p},\vec{p}\,'$ - соответственно начальный и конечный импульсы в системе центра масс. Энергетическая поверхность определяется условием $p^2=p'^2=k^2$. Потенциал $U[(p-p')^2]$ с самого начала выбран локальным, то есть зависящим только от разности $(p-p')^2$; k^2 - энергетический параметр /импульс на энергетической поверхности/, причем подразумевается, что к k^2 добавлена бесконечно малая мнимая величина, то есть $k^2\to k^2+i0$.

Функция $U[(\vec{p}-\vec{p}\,')^2]$ является фурье-преобразованием потенциальной функции $U(r)$:

$$U[(\vec{p}-\vec{p}\,')^2] = \int \frac{d^3r}{(2\pi)^3} U(r)\, e^{-i(\vec{p}-\vec{p}\,')\vec{r}}. \qquad /2/$$

Разлагая далее амплитуду и потенциал по парциальным волнам

$$T(\vec{p},\vec{p}\,') = \frac{1}{4\pi pp'}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\, f_\ell(p,p')\, P_\ell(\hat{p}\hat{p}'),$$
$$U[(\vec{p}-\vec{p}\,')^2] = \frac{1}{4\pi pp'}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\, U_\ell(p,p')\, P_\ell(\hat{p}\hat{p}'), \qquad /3/$$

где $\hat{p}\equiv\vec{p}/|\vec{p}|$, получим для парциальных амплитуд следующее уравнение:

$$f_\ell(p,p') = U_\ell(p,p') + \int_0^\infty dq \frac{U_\ell(p,q)\, f_\ell(q,p')}{k^2-q^2}, \qquad /4/$$

в котором

$$U_\ell(p,p') = \sqrt{pp'}\int_0^\infty dr\, r\, U(r)\, J_{\ell+1/2}(rp) J_{\ell+1/2}(rp'). \qquad /5/$$

Для сингулярного в нуле потенциала $U(r)=\lambda r^{-2}$ соотношение /5/ можно представить в виде[14]

$$U_\ell(p,p') = \frac{\lambda}{2\ell+1}\left\{\theta(p-p')\frac{p'^{\ell+1}}{p^\ell} + \theta(p'-p)\frac{p^{\ell+1}}{p'^\ell}\right\}, \quad \mathrm{Re}\,\ell > -\frac{1}{3}. \qquad /6/$$

В этом случае интегральное уравнение /4/ путем двухкратного дифференцирования можно заменить на эквивалентную ему задачу Штурма-Лиувилля.

Задача о связанных состояниях $(\lambda\to-\lambda,\ k^2\to k^2\equiv-\kappa^2<0)$ сводится к отбрасыванию неоднородного члена в /4/. Перепишем полученное таким способом дифференциальное уравнение с соответствующими граничными условиями в безразмерных импульсных переменных $x=pm^{-1}$, $f_\ell(p)\equiv f_\ell(x)$, а также с безразмерным энергетическим параметром $E^2=\kappa^2/m^2$ /безразмерный импульс на энергетической поверхности/:

$$\frac{d^2 f_\ell(x)}{dx^2} + \{ -\frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \frac{\lambda}{(x^2+E^2)} \} f_\ell(x) = 0, \qquad /7/$$

$$f_\ell(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{\ell+1}; \qquad f_\ell(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^{-\ell}. \qquad /8/$$

Таким образом, исходное интегральное уравнение /4/, описывающее взаимодействие двух скалярных частиц одинаковой массы m, когда потенциал в координатном представлении равен $U(r) = -\lambda r^{-2}$, сводится к дифференциальному уравнению /7/ с соответствующими граничными условиями /8/.

Относительно уравнения /7/ заметим, что оно совпадает, как этого и следовало ожидать, с одномерным уравнением Шредингера в импульсном представлении для потенциала, имеющего в координатном представлении вид $U(r) = -\lambda r^{-2}$. Напомним также, что λ - безразмерная константа связи.

Легко показать, что два линейно независимых решения уравнения /7/ выражаются через гипергеометрические функции, причем одно из них удовлетворяет граничному условию в нуле, но для того, чтобы задача /7/-/8/ имела решение, необходимо доопределить граничное условие на бесконечности /в координатном пространстве в нуле/, что, естественно, является неоднозначной процедурой. Дело в том, что асимптотика точного решения уравнения /7/ в пределах малых x определяется центробежным членом, поэтому из двух линейно независимых решений в окрестности нуля всегда можно однозначным образом выбрать решение, соответствующее выписанному граничному условию в нуле /8/. Совсем по-другому обстоит дело с граничным условием на бесконечности. В этом случае оба решения дают одинаковый вклад в асимптотику точного решения:

$$f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^{-1/2} \sin\{ \sqrt{\lambda - (\ell+1/2)^2}\, \ell n\, x + B_\ell \}, \qquad /9/$$

где B_ℓ - произвольный параметр, не зависящий от x. Асимптотика /9/ явно отличается от асимптотики на бесконечности /8/. Она может быть использована в качестве нового граничного условия. Наличие в /9/ произвольного фактора B_ℓ и обусловливает зависимость физических величин /например уровней энергии/ от произвольной постоянной. Если теперь в качестве этой произвольной постоянной выбрать один из уровней дискретного спектра, например нулевой, то решение задачи /7/-/8/ можно выразить формулой

$$E_{n\ell} = E_{0\ell} \exp\{ \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda - (\ell+1/2)^2}} \}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \qquad /10/$$

которая, в свою очередь, характеризуется следующими особенностями: во-первых, как это уже указывалось выше, наличием произвольной постоянной $E_{0\ell}$, во-вторых, неаналитической зависимостью уровней энергии от константы связи λ /существенная особенность при $\lambda \to (\ell+1/2)^2$ /, в-третьих, наличием последовательности уровней с $n > 0$, уходящей на бесконечность /"падение на центр"/, то есть отсутствием конечного основного состояния, и, наконец, в-четвертых, в пределе $E \to 0$ происходит сгущение энергетических уровней, что, как известно, связано со слишком медленным спаданием потенциала на больших расстояниях.

Следовательно, само по себе нерелятивистское уравнение Липпмана-Швингера /или уравнение Шредингера/ не приспособлено для исследования сингулярных потенциалов, в частности потенциала $U(r) = -\lambda r^{-2}$, без каких-либо дополнительных предположений. Как уже отмечалось, сингулярность такого рода потенциалов в нуле является идеализацией и не имеет места в реальном мире. Если же каким-либо способом учесть изменение поведения сингулярного потенциала на малых расстояниях, например ввести в теорию безразмерный обрезающий фактор $(m r_0)$, то в выражении для дискретных уровней энергии появляется основное состояние системы, энергия которого конечна, но при этом существенно зависит от $(m r_0)$ [1,4,15].

Таким образом, введение в теорию обрезающего фактора не решит проблемы, так как все физические величины существенно зависят не только от его величины, но и от того, каким способом он устремляется к нулю.

3. "ПАДЕНИЕ НА ЦЕНТР" В КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ

Квазипотенциальное уравнение Логунова-Тавхелидзе для полной амплитуды рассеяния двух скалярных частиц одинаковой массы m, записанное вне энергетической поверхности, имеет вид [8-10,13,14]

$$T(\vec p, \vec p\,') = V[(\vec p - \vec p\,')^2] + \int \frac{d\,q}{\sqrt{q^2+m^2}} \frac{V[(\vec p - \vec q)^2]\, T(\vec q, \vec p\,')}{k^2 - q^2}, \qquad /11/$$

$$V[(\vec p - \vec p\,')^2] = \int \frac{d^3 r}{(2\pi)^3} V(r)\, e^{-i(\vec p - \vec p\,')\vec r}. \qquad /12/$$

Здесь $\vec p$, $\vec p\,'$ - соответственно начальный и конечный импульсы в системе центра масс, энергетическая поверхность определяется условием $p^2 = p'^2 = k^2$, а энергия в системе центра масс теперь равна $W = \sqrt{k^2 + m^2}$.

Квазипотенциальное уравнение /11/ отличается от уравнения Липпмана-Швингера /1/ наличием релятивистского корня $\sqrt{q^2+m^2}$ в подынтегральном выражении, что является следствием релятивистского характера квазипотенциального уравнения. Квазипотенциал $V[(\vec{p}-\vec{p}')^2]$, как и потенциал в /2/, выбран локальным. Здесь же следует отметить, что ввиду различного выбора фурье-преобразований в /12/ и в работах[13,14,16] квазипотенциалу $V(r) = gr^{-2}$ из /14/ соответствует эквивалентный ему квазипотенциал "кулоновского вида" $V(r) = gr^{-1}$ работ[16,14,17].

Разлагая далее амплитуду и квазипотенциал по парциальным волнам аналогично /3/, получим для парциальных амплитуд следующее уравнение:

$$f_\ell(p,p') = V_\ell(p,p') + \int_0^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2+m^2}} \frac{V_\ell(p,q)\, f_\ell(q,p')}{k^2-q^2}, \qquad /13/$$

в котором

$$V_\ell(p,p') = \sqrt{pp'} \int_0^\infty dr\, r\, V(r)\, J_{\ell+1/2}(rp)\, J_{\ell+1/2}(rp'). \qquad /14/$$

Рассмотрим теперь сингулярный в нуле квазипотенциал $V(r) = gr^{-2}$. Из-за наличия релятивистского корня в квазипотенциальном уравнении /13/ константа связи g в данном случае имеет размерность массы m, в отличие от нерелятивистской безразмерной константы связи λ. В нерелятивистском пределе, как это будет показано ниже, g переходит в $\lambda = gm^{-1}$.

Подставляя далее $V(r) = gr^{-2}$ в /14/, получим представление /6/ с заменой λ на g. Поэтому исходное интегральное уравнение /13/ заменяется на эквивалентную ему задачу Штурма-Лиувилля, аналогично тому, как это было в случае уравнения Липпмана-Швингера.

Задача о связанных состояниях ($g \to -g$, $k^2 \to k^2 \equiv -\kappa^2 < 0$) в безразмерных импульсных переменных $x = pm^{-1}$, $f_\ell(p) = f_\ell(x)$ с безразмерными параметрами $\lambda = gm^{-1}$, $E^2 = \kappa^2/m^2$ выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2 f_\ell(x)}{dx^2} + \left\{ -\frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \frac{\lambda}{(1+x)^{1/2}(x^2+E^2)} \right\} f_\ell(x) = 0, \qquad /15/$$

$$f_\ell(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{\ell+1}, \qquad f_\ell(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^{-\ell}. \qquad /16/$$

Здесь энергетический параметр /безразмерный импульс на энергетической поверхности/ $E^2 \in [0,1]$, то есть изменяется от нуля до единицы, в отличие от нерелятивистского случая, когда он изменяется подобно безразмерной импульсной переменной x от нуля до бесконечности. Полная энергия теперь имеет вид $W = 2m\sqrt{1-E^2}$, а энергия связи

$$W_{CB} = W - 2m = 2m\{\sqrt{1-E^2} - 1\}. \qquad /17/$$

Таким образом, квазипотенциальное уравнение /15/, дополненное соответствующими граничными условиями /16/, аналогично нерелятивистскому уравнению /7/ описывает задачу о связанных состояниях на сингулярном потенциале притяжения $U(r) = -\lambda r^{-2}$. Поэтому возникает интересная задача сравнения спектра задач Штурма-Лиувилля /7/-/8/ с /15/-/16/.

Прежде чем переходить к решению уравнения /15/, уместно сделать следующее эвристическое замечание. Как уже отмечалось, данное уравнение отличается от соответствующего ему уравнения Липпмана-Швингера наличием релятивистского корня $\sqrt{1+x^2}$, вследствие чего асимптотика этого уравнения в нуле и на бесконечности, в отличие от уравнения Липпмана-Швингера /7/, определяется только центробежным членом и соответствует обоим граничным условиям /16/. Поэтому квазипотенциальные решения не должны зависеть от произвольной постоянной.

4. РЕШЕНИЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Квазипотенциальное уравнение /15/, соответствующее сингулярному потенциалу притяжения $U(r) = -\lambda r^{-2}$, не поддается точному решению. Поэтому в целях приближенного решения данного уравнения применим асимптотический по своей природе обобщенный ВКБ-метод /метод эталонного уравнения/. Его основная идея заключается в сравнении двух приблизительно одинаковых уравнений, решения одного из них /эталонного уравнения/ известны точно, а решения исходного уравнения определенным образом выражаются через решения выбранного эталонного. Квазипотенциальное уравнение /15/ для S-волны исследовалось в[14,16] на основе различных эталонных уравнений в рамках обобщенного ВКБ-метода. В данной работе в целях полноты рассмотрения кратко повторим основные этапы исследования квазипотенциального уравнения /15/ в рамках обобщенного ВКБ-метода на основе эталонного уравнения, предложенного в[17].

Для этого выпишем квазипотенциальную краевую задачу /15/-/16/ в виде

$$\frac{d^2 f_\ell(x)}{dx^2} + \left\{ -\frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \lambda\,\gamma(x) \right\} f_\ell(x) = 0 \qquad /18/$$

с прежними граничными условиями /16/, где

$$\gamma(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}(x^2+E^2)}. \qquad /19/$$

В соответствии с общей схемой обобщенного ВКБ-метода в качестве эталонного по отношению к исходному квазипотенциальному уравнению /18/ выберем уравнение следующего вида:

$$\frac{d^2\mathcal{C}(\sigma)}{d\sigma^2} + \{ -\frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2} + \lambda\Gamma(\sigma) \} \mathcal{C}(\sigma) = 0, \qquad /20/$$

где

$$\Gamma(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2(1+\sigma)}. \qquad /21/$$

Эталонные функции $Q(\sigma) = \ell(\ell+1)\sigma^{-2}$ и $\Gamma(\sigma)$ приблизительно так же зависят от σ, как $q(x) = \ell(\ell+1)x^{-2}$ и $\gamma(x)$ зависят от x. Единственное отличие заключается в том, что $\Gamma(\sigma)$ обладает регулярной особенностью в нуле $(\sigma = 0)$, в то время как $\gamma(x)$ обладает регулярной особенностью в нуле $(x = 0)$ только при $E^2 = 0$, что и предопределяет, как будет показано ниже, хорошую точность обобщенных ВКБ-приближений с эталонной функцией /21/ в пределе малых E^2 /нерелятивистский предел/.

Решение /18/ можно следующим образом выразить через решение эталонного уравнения [17]:

$$f_\ell(x) = (\frac{d\sigma}{dx})^{-1/2}\, \mathcal{C}(\sigma), \qquad \sigma \equiv \sigma(x). \qquad /22/$$

Далее необходимо найти явный вид зависимости σ от x. В нулевом приближении уравнение для определения этой зависимости сводится к квадратурам [17]:

$$\int_{\sigma}^{\sigma_э} \Gamma^{1/2}(\tau)\, d\tau = \int_{x}^{x_э} \gamma^{1/2}(t)\, dt. \qquad /23/$$

Выбирая в качестве эквивалентных точек точки на бесконечности $x_э = \sigma(x_э) = \sigma_э = \infty$, получим окончательно

$$\sigma(x, E) = \mathrm{sh}^{-2}\{ \frac{1}{2}\Phi(x, E)\}, \qquad /24/$$

где

$$\Phi(x, E) = \int_{x}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{1/4}\,(t^2+E^2)^{1/2}}, \qquad /25/$$

откуда следует, что $\sigma(0, E) = \mathrm{const}$, $\sigma(x, E) \underset{x\to\infty}{\to} x +$ к.ч. Таким образом, σ на бесконечности аналогична x, и поэтому асимптотики $\Gamma(\sigma(x))$ и $\gamma(x)$ в этом пределе совпадают.

Два линейно независимых решения эталонного уравнения /20/ выражаются через гипергеометрические функции [18]. Поэтому, учитывая /22/, получим

$$f_1(x) = (\frac{d\sigma}{dx})^{-1/2}\, \sigma^a\, F(\ell+a, -\ell-a^*; 2a; -\sigma), \qquad /26/$$

где $\sigma \equiv \sigma(x, E)$ и определяется /29/-/30/,

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{\lambda - (\ell+1/2)^2}. \qquad /27/$$

Очевидно, что второе решение получается из первого в результате замены $a \to a^*$.

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$f(x) = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x). \qquad /28/$$

Подставляя данное решение в граничное условие в нуле /16/, получим

$$A_1 f_1(0) + A_2 f_2(0) = 0. \qquad /29/$$

Для того чтобы удовлетворить граничному условию на бесконечности, необходимо выполнить аналитическое продолжение гипергеометрических рядов /26/ в область больших x, так как $\sigma(x) \underset{k\to\infty}{\sim} x +$ к.ч.

Ввиду того, что параметры гипергеометрических рядов различаются на целые числа, аналитическое продолжение можно осуществить с помощью хорошо известных рядов [18]. Подставляя далее таким способом аналитически продолженное, общее решение /28/ в граничное условие на бесконечности /16/, получим второе уравнение для коэффициентов A_1 и A_2:

$$A_1 M(a) + A_2 M(a^*) = 0, \qquad /30/$$

где введено следующее обозначение:

$$M(a) = \Gamma(2a)\,\Gamma(2\ell+1)\,/\,\Gamma(\ell+a)\,\Gamma(\ell+1+a). \qquad /31/$$

Комбинируя два соотношения /29/ и /30/, получим окончательно спектр исходной квазипотенциальной краевой задачи /16/-/16/:

$$\begin{aligned} &M(a)\, \mathrm{sh}^{-2a^*}\{\frac{1}{2}\Phi(0,E)\}\, F(\ell+a^*, -\ell-a; 2a^*; -\mathrm{sh}^{-2}\{\frac{1}{2}\Phi(0,E)\}) = \\ &= M(a^*)\, \mathrm{sh}^{-2a}\{\frac{1}{2}\Phi(0,E)\}\, F(\ell+a, -\ell-a^*; 2a; -\mathrm{sh}^{-2}\{\frac{1}{2}\Phi(0,E)\}), \end{aligned} \qquad /32/$$

где $M(a)$ и a задаются соотношениями /31/ и /27/ соответственно, а $\Phi(0, E)$ определяется соотношением /25/ в точке

$$\Phi(0, E) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{1/4}\,(t^2+E^2)^{1/2}} = \frac{1}{2}\, B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})\, F(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1-E^2). \qquad /33/$$

5. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ И УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПРЕДЕЛЫ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С учетом выбора эталонной функции $\Gamma(\sigma) = \sigma^{-2}(1+\sigma)^{-1}$ очевидно, что спектр /32/ исходной краевой задачи /15/-/16/ пригоден и для рассмотрения ультрарелятивистского предела ($E^2 = 1$). Другой способ получения ультрарелятивистского предела заключается в том, чтобы с самого начала в исходном квазипотенциальном уравнении /15/-/16/ положить $E^2 = 1$ и, далее, таким способом полученному исходному уравнению подобрать соответствующее ему эталонное уравнение. Этим замечанием можно закончить обсуждение ультрарелятивистского предела полученного спектра /32/.

Рассмотрим теперь более важный вопрос о нерелятивистском пределе ($E^2 \to 0$) спектрального условия /33/ /слабосвязанные состояния/. В этом пределе гипергеометрический ряд /33/ расходится, и поэтому для аналитического продолжения следует воспользоваться следующей формулой/18/:

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; 1-E^2\right) = \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)\Gamma(1/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n (1/4)_n}{(n!)^2} [\eta_n - \ln E^2] E^{2n}, \qquad /34/$$

где $\eta_n = 2\psi(n+1) - \psi(n+1/2) - \psi(n+1/4)$/19/. Оставляя далее в этом выражении только логарифмически возрастающие члены, получим для $\Phi(0,E)$ асимптотическое представление

$$\Phi(0,E) = -\ln E + \text{к.ч.}, \quad E \to 0. \qquad /35/$$

Подставляя затем данное представление /35/ в выражение для аргумента гипергеометрических рядов, входящих в /32/, получим

$$\mathrm{sh}^{-2}\left\{\frac{1}{2}\Phi(0,E)\right\} = 4E + O(E^2), \quad E \to 0. \qquad /36/$$

Вследствие этого, пренебрегая в спектральном условии /32/ гипергеометрическими рядами /полагая их равными единице в пределе $E \to 0$/, получим окончательно, что обобщенный ВКБ-спектр /32/ в нерелятивистском пределе ($E \to 0$) имеет вид

$$E_{n\ell} = E_{0\ell} \exp\left\{-\frac{n\pi}{\sqrt{\lambda - (\ell+1/2)^2}}\right\}, \qquad /37/$$

$$n = 0,1,2,\ldots,$$

$$E_{0\ell} = \exp\left\{\frac{M(a)}{\sqrt{\lambda - (\ell+1/2)^2}}\right\}, \qquad /38/$$

где a и $M(a)$ определяются формулами /27/ и /31/ соответственно.

Нерелятивистский спектр /37/-/38/ в двух важных пунктах отличается от соответствующего ему спектра /10/. Во-первых, в этом спектре нет зависимости от произвольной постоянной, так как нулевой уровень в данном случае имеет вполне конкретное значение /38/, в то время как в спектре /10/ он произволен. Во-вторых, отсутствием в /37/ последовательности уровней с $n<0$*, уходящей на бесконечность, что является следствием справедливости нерелятивистского приближения ($E^2 \to 0$). Поэтому спектр /37/-/38/, в отличие от спектра /10/, характеризуется наличием конечного "основного" состояния $E_{0\ell}$ /38/, то есть в нем отсутствует проблема "падения на центр".

С другой стороны, спектр /37/-/38/ так же, как и спектральное условие /10/, характеризуется неаналитической зависимостью уровней энергии от константы связи, а также сгущением энергетических уровней в пределе $E \to 0$, что и следовало ожидать.

Из вышесказанного вытекает, что нерелятивистский предел /37/-/38/ квазипотенциального спектра /32/ существенно отличается от нерелятивистского спектра /10/. Объяснение этому можно найти, анализируя поведение квазипотенциала на малых и больших расстояниях/20,21/.

Соответствие между квазипотенциалом $V(r)$ и потенциалом в уравнении Шредингера $U(r)$ проще всего можно установить с помощью квазипотенциального уравнения для парциальной волновой функции $u_\ell(r)$ в координатном пространстве:

$$\frac{d^2 u_\ell(r)}{dr^2} + \left\{k - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right\} u_\ell(r) = V(r)\int_0^\infty dr' K_\ell(r,r')\, u_\ell(r'), \qquad /39/$$

где

$$K_\ell(r,r') = \sqrt{rr'}\int_0^\infty \frac{q\,dq}{\sqrt{q^2+m^2}} J_{\ell+1/3}(qr)\, J_{\ell+1/2}(qr'). \qquad /40/$$

В результате нерелятивистского перехода $m \to \infty$ / $E \to 0$, большие расстояния/ получаем

$$K_\ell(r,r') = m^{-1}\delta(r-r') + O(m^{-3}), \quad m \to \infty, \qquad /41/$$

а уравнение /39/ переходит в уравнение Шредингера

---

*Последовательность уровней с $n<0$ соответствует последовательности уровней с $n>0$ в спектре /10/ из-за знака минус в экспоненте /37/ по сравнению с экспонентой /10/. Дело в том, что знак минус можно было бы написать и в экспоненте /10/, тогда последовательности уровней, уходящих на бесконечность, соответствовали бы отрицательные n ($n<0$).

$$\frac{d^2u_\ell(r)}{dr^2}+\{k^2-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\}u_\ell(r)=m^{-1}V(r)u_\ell(r) \qquad /42/$$

с потенциалом, имеющим в координатном представлении вид

$$U(r)=m^{-1}V(r)=-\lambda r^{-2}, \qquad \lambda=gm^{-1}. \qquad /43/$$

Соотношение /43/ устанавливает соответствие между потенциалом, стоящим в квазипотенциальном уравнении /квазипотенциалом/ $V(r)= = -gr^{-2}$, и потенциалом в уравнении Шредингера $U(r)$.

Таким образом, в результате перехода к нерелятивистскому пределу происходит только "конечная перенормировка" исходной константы связи g /переход от $g\to\lambda=gm^{-1}$/, а в безразмерных величинах имеется полное соответствие между квазипотенциалом $V(r)$ и потенциалом $U(r)$ на больших расстояниях.

Совсем по-другому обстоит дело с поведением квазипотенциала на малых расстояниях. Из квазипотенциальной теории известно, что квазипотенциальные уравнения "размазывают" волновую функцию в области малых расстояний. Если, например, в формуле /40/ перейти к пределу малых расстояний $(m\to 0)$*, то получим / r и r' конечны/

$$K_\ell(r,r')\approx \ell n\left|\frac{r+r'}{r-r'}\right|, \qquad /44/$$

откуда видно, что это ядро действительно "размазывает" волновую функцию в квазипотенциальном уравнении /39/ по области радиусом порядка комптоновской длины волны частицы $(\sim m^{-1})$.

Очевидно, что "размазывание" волновой функции по области малых расстояний происходит из-за наличия в квазипотенциальных уравнениях, например в уравнении для полной волновой функции $u_{\vec k}(\vec r)$:

$$(\Delta+k^2)\,u_{\vec k}(\vec r)=(m^2-\Delta)^{-1/2}[V(r)\,u_{\vec k}(\vec r)], \qquad /45/$$

$$V(r)=\int d^3q\,V(q^2)\,e^{i\vec q\vec r},$$

интегрального оператора $(m^2-\Delta)^{-1/2}$, определяющего релятивистское шредингеровское "дрожание" частицы /22/, характерное для всех релятивистских уравнений, допускающих обычную интерпретацию волновой функции.

Такое "размазывание" волновой функции изменяет поведение потенциала в пределе малых расстояний, что эквивалентно его регуляризации на малых расстояниях. Как известно, сингулярные вплоть до нуля потенциалы являются идеализацией и не имеют места

---

*Для простоты достаточно ограничиться S-волной.

в реальном мире. В конкретных задачах такого рода потенциалы должны быть модифицированы в пределе малых расстояний. К сожалению, как уже отмечалось ранее, регуляризация сингулярного потенциала, рассмотренного в данной работе, в нерелятивистской теории не решает проблемы, так как все физические величины зависят не только от радиуса обрезания, но и от способа устремления его к нулю, то есть проблема сингулярных потенциалов притяжения в нерелятивистской теории не имеет решения.

В случае же использования релятивистского уравнения для сингулярных потенциалов притяжения само квазипотенциальное уравнение модифицирует поведение потенциалов на малых расстояниях. Можно сказать, что происходит "регуляризация посредством релятивизации" исследования сингулярных потенциалов притяжения в рамках квазипотенциального подхода.

С другой стороны, релятивистский корень $\sqrt{1+x^2}$ в квазипотенциальном уравнении /15/ изменяет асимптотику точных решений в соответствии с граничными условиями /16/, в то время как асимптотика нерелятивистского уравнения /7/ противоречила граничному условию /16/ на бесконечности /или в нуле в координатном пространстве/. В нерелятивистском случае необходимо учитывать оба линейно независимых решения в окрестности бесконечности. Поэтому оператор Липпмана-Швингера /7/ является не самосопряженным /индекс дефекта $n=1$/, и в результате расширения оператора до самосопряженного в решениях появляется зависимость от произвольной постоянной. В релятивистском же случае соответствие граничных условий асимптотикам точного решения позволяет однозначно выбрать решения, регулярные в нуле, а главное - на бесконечности. Поэтому квазипотенциальный оператор /15/ с самого начала является самосопряженным /индекс дефекта $n=0$/, и, как следствие, квазипотенциальные решения не зависят от произвольных постоянных /см. /37/-/38//.

Автор выражает благодарность А.Н.Тавхелидзе, А.Т.Филиппову, В.Г.Кадышевскому, В.А.Матвееву, А.А.Хелашвили и Н.Б.Скачкову за интерес к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Case K.M. Phys.Rev., 1950, 80, No.5, p.797-806.
2. Де Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяние. "Мир", М., 1966.
3. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. "Мир", М., 1969.
4. Переломов А.М., Попов В.С. ТМФ, 1970, 4, № 1, с.48-65.
5. Филиппов А.Т. ЭЧАЯ, 1979, 10, № 3, с.501-538.
6. Meetz K. Nuovo Cim., 1964, 34, No.3, p.690-708.
7. Behncke H. Nuovo Cim., 1968, 55A, No.4, p.780-785.

8. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cimento, 1963, 29, No.2., p.380-399.
9. Тавхелидзе А.Н. Труды Международной зимней школы по теоретической физике. ОИЯИ, Дубна, 1964, т.2, с.66-79.
10. Кадышевский В.Г., Тавхелидзе А.Н. В кн.: Проблемы теоретической физики. "Наука", М., 1969, с.261-277.
11. Фаустов Р.Н. ЭЧАЯ, 1975, 3, № 1, с.238-268.
12. Frank N.M., Land D.J., Spector R.M. Rev.Mod.Phys., 1971, 43, No.1, p.36-98.
13. Гогохия В.Ш., Филиппов А.Т. ТМФ, 1974, 21, № 1, с.37-48.
14. Гогохия В.Ш., Мавло Д.П., Филиппов А.Т. ТМФ, 1976, 27, № 3, с.323-336.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Физматгиз, М., 1963.
16. Гогохия В.Ш. ТМФ, 1981, 48, № 1, с.80-88.
17. Гогохия В.Ш. ОИЯИ, Р2-82-186, Дубна, 1982.
18. Бейтмен Г., Эрдейи Ф. Высшие трансцендентные функции. "Наука", М., 1965.
19. Дэвис Ф. Гамма-функция и родственные ей функции. Справочник по специальным функциям. "Наука", М., 1979, с.80-118.
20. Филиппов А.Т. Труды Международной зимней школы по теоретической физике. ОИЯИ, Дубна, 1964, т.2, с.80-107.
21. Гогохия В.Ш. Сообщения АН ГрССР, 1978, 90, № 2, с.333-336.
22. Шредингер Э. О свободном движении в релятивистской квантовой механике. Избранные труды по квантовой механике. "Наука", М., 1976, с.218-228.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 мая 1983 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Гогохия В.Ш. Р2-83-352

"Падение на центр" в квазипотенциальной теории

Исследуется квазипотенциальное уравнение для волновой функции в импульсном пространстве в случае сингулярного потенциала притяжения $U(r) = -\lambda r^{-2}$. Показано, что дискретный спектр в нерелятивистском пределе не зависит от произвольной постоянной и в нем отсутствует проблема "падения на центр". Эти результаты являются следствием самосопряженности квазипотенциального оператора /индекс дефекта $n = 0$/, в отличие от оператора Липпмана-Швингера /индекс дефекта $n = 1$/.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Gogokhiya V.Sh. P2-83-352

"Collapse onto Scattering Centre" in Quasipotential Theory

Quasipotential equation for the wave function in the momentum representation is investigated for the case of singular attractive potential $U(r) = -\lambda r^{-2}$. It is shown, that discrete energy spectrum in the nonrelativistic limit do not depend on an arbitrary constant and there appears no collapse onto scattering centre. These results are a consequence of self-adjointness of quasipotential operator in the momentum representation /"deficiency-index" $n = 0$ / in the comparison with Lippman-Swinger operator /"deficiency-index" $n = 1$ /.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983