



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

У103/83

P2-83-340

15/8-83

А.Б.Пестов

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И СПИН

Направлено на Рабочее совещание по проблемам  
излучения и детектирования гравитационных  
волн. Дубна, 7-9 июня 1983 года.

1983



В настоящем сообщении ставится и решается задача введения спина в общую теорию относительности.

1. Основные исходные положения относятся к пространству-времени и группе симметрии. Пространство-время есть точечное множество, топологически эквивалентное 4-мерному евклидову пространству. Группа симметрии пространства-времени есть группа взаимно однозначных и взаимно непрерывных отображений пространства-времени на себя. Обозначим ее через  $G_4$ .

2. Трудность с введением спина в общую теорию относительности связана с тем, что спиноры не образуют базиса точной реализации группы Эйнштейна. Поэтому мы начинаем с предположения о том, что волновая функция  $\Psi$  образует базис точной реализации группы  $G_4$ . Исходным пунктом на пути к установлению явного вида волновой функции и волнового уравнения послужил для нас следующий математический результат.  $G_4$  - инвариантная линейная дифференциальная операция первого порядка единственна - это внешнее дифференцирование  $p$ -форм <sup>1/</sup>. Далее мы широко использовали аналогию с уравнениями Максвелла, и в результате пришли к следующему волновому уравнению

$$D^\sigma \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p} - p D_{[a_1} \psi_{\alpha_2 \dots \alpha_p]} = \frac{mc}{\hbar} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p},$$

$$p = 0, 1, 2, 3, 4,$$

которое представляет собой нераспадающуюся систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Структура волнового уравнения полностью определяется оператором внешнего дифференцирования, симметричным тензорным полем  $g_{\alpha\beta}(x)$  с определителем  $g < 0$  и тензорным полем кручения  $K_{\mu\nu}^\sigma(x) = -K_{\nu\mu}^\sigma(x)$ . Для удобства мы используем операцию ковариантного дифференцирования, которая строится с помощью коэффициентов аффинной связности

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \} + K_{\alpha\beta}^\mu + g^{\mu\sigma} (K_{\sigma\alpha}^\nu g_{\nu\beta} + K_{\sigma\beta}^\nu g_{\nu\alpha})$$

по известным правилам и обозначается здесь символом  $\nabla_\alpha$ . Тогда в волновом уравнении  $D^\sigma = g^{\sigma r} D_r$ ,  $D_r = \nabla_r - K_r$ , где  $K_r = K_{\sigma r}^\sigma$  - ковектор кручения. Волновая функция  $\Psi$  содержит в себе антисимметричные тензорные поля или  $p$ -векторы. Подчеркнем, что волновое уравнение может быть записано и в интегральной форме.



3. Взяв вместо  $g_{\alpha\beta}$ ,  $K_{\mu\nu}^\sigma$  другие поля  $'g_{\alpha\beta}$ ,  $'K_{\mu\nu}^\sigma$ , получим волновое уравнение, равносильное первоначальному, если  $g_{\alpha\beta}$  эквивалентно  $'g_{\alpha\beta}$ ,  $K_{\mu\nu}^\sigma$  эквивалентно  $'K_{\mu\nu}^\sigma$  по признаку эквивалентности, устанавливаемому группой  $G_4$ . Можно сказать, что волновое уравнение  $G_4$ -ковариантно. Чтобы дополнить волновое уравнение до  $G_4$ -инвариантного закона, аналогичного уравнениям Эйнштейна-Максвелла, воспользуемся следующими обстоятельствами. На решениях волнового уравнения для тензора

$$S^{\mu\nu} = \sum_{p=0}^4 \frac{(-1)^{p+1}}{p!} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \psi_{a_1 \dots a_p} \bar{\psi}^{a_1 \dots a_p} + \psi^{\mu a_1 \dots a_p} \bar{\psi}^{a_1 \dots a_p} + \psi^{\mu \tau a_1 \dots a_p} \bar{\psi}_{a_1 \dots a_p \tau} \right) + \text{к.с.}$$

выполняется соотношение

$$\nabla_\mu S^{\mu\nu} = 2K_\mu S^{\mu\nu}. \quad /1/$$

Положим, учитывая четность

$$A^{\mu\nu\gamma} = c_1 K^{\mu\nu\gamma} + c_2 (g^{\mu\gamma} K^\nu - g^{\nu\gamma} K^\mu) + c_3 (K^{\mu\gamma\nu} - K^{\nu\gamma\mu}),$$

$$E^{\mu\nu} = \nabla_\nu A^{\mu\nu} - 2K_\nu A^{\mu\nu} + K_{\alpha\beta}^\mu A^{\alpha\beta\nu},$$

где  $K^{\mu\nu\gamma} = g^{\mu\gamma} g^{\nu\sigma} K_{\tau\sigma}^\gamma$ ,  $c_1, c_2, c_3$  - константы. Из тождества Эйнштейна /2/ следует, что тензор  $E^{\mu\nu}$  тождественно удовлетворяет уравнению

$$\nabla_\mu E^{\mu\nu} = 2K_\mu E^{\mu\nu}. \quad /2/$$

Таким образом, из /1/, /2/ следует, что уравнения общей теории относительности для материи со спином выражаются совместной  $G_4$ -инвариантной системой дифференциальных уравнений

$$D^\sigma \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p} - p D[\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}] = \frac{mc}{\hbar} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}, \quad /3/$$

$$E^{\mu\nu} = \ell S^{\mu\nu}, \quad /4/$$

где  $\ell$  - константа размерности длины. Естественно предположить, что она совпадает с планковской длиной.

В заключение отметим, что уравнение Дирака может быть выведено из уравнения /3/ при наложении дополнительных,  $G_4$  - неинвариантных условий на волновую функцию.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллов А.А. В кн.: "Итоги науки и техники", серия "Современные проблемы математики". Изд.-во ВИНТИ, АН СССР, М., 1980, т. 16, с. 3-27.
2. Эйнштейн А. Собрание научных трудов, М., "Наука", 1965, т. II, с. 342-343.

Рукопись поступила в издательский отдел  
26 мая 1983 года.



### НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

|               |   |            |
|---------------|---|------------|
| ДЗ-11787      | Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.   | 3 р. 00 к. |
| Д13-11807     | Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.  | 6 р. 00 к. |
|               | Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/   | 7 р. 40 к. |
| Д1,2-12036    | Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978  | 5 р. 00 к. |
| Д1,2-12450    | Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.   | 3 р. 00 к. |
|               | Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/  | 8 р. 00 к. |
| Д11-80-13     | Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979            | 3 р. 50 к. |
| Д4-80-271     | Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.  | 3 р. 00 к. |
| Д4-80-385     | Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.  | 5 р. 00 к. |
| Д2-81-543     | Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981  | 2 р. 50 к. |
| Д10,11-81-622 | Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980                      | 2 р. 50 к. |
| Д1,2-81-728   | Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.  | 3 р. 60 к. |
| Д17-81-758    | Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.   | 5 р. 40 к. |
| Д1,2-82-27    | Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.  | 3 р. 20 к. |
| Р18-82-117    | Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981. | 3 р. 80 к. |
| Д2-82-568     | Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.  | 1 р. 75 к. |
| Д9-82-664     | Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.   | 3 р. 30 к. |
| ДЗ,4-82-704   | Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.   | 5 р. 00 к. |

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:  
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79  
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Пестов А.Б. P2-83-340

Общая теория относительности и спин

Предложены уравнения, описывающие взаимодействие гравитационного поля и материи со спином.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Pestov A.B. P2-83-340

General Relativity Theory and Spin

Equations describing the interaction of the gravitational field and matter with spin are proposed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой.