объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-83-302

М.Бордаг, Э.Вицорек, Д.Робашик

РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ К ЭФФЕКТУ КАЗИМИРА

Направлено в журнал "Письма в ЖЭТФ"

1983

Экспериментально проверенный эффект Казимира [1,2], состоящий в том, что две незаряженные металлические пластинки притягиваются друг к другу, объясняется зависимостью от расстояния a энергии вакуумного состояния электромагнитного поля. Цель данной работы - вычислить радиационные поправки к силе Казимира. Для этого воспользуемся идеализированной моделью, когда две бесконечно большие тонкие сверхпроводящие пластинки расположены перпендикулярно оси x_3 и пересекают ее в точках $x_3 = a_0$ и $x_3 = a_1$. Пластинки не влияют на электроны. Задача состоит в том, чтобы

- дать формулировку квантовой электродинамики /КЭД/ с граничными условиями в ковариантной калибровке и
- вычислить вакуумные петли тензора энергии-импульса /ТЭИ/ в нулевом и в первом порядках теории возмущений при условии, что ТЭИ находится в Sym-порядке.

Такая задача представляет самостоятельный интерес, так как выходит за рамки стандартной теории возмущений.

Рассмотрим производящий функционал полных функций Грина

$$Z(j,\bar{\eta},\eta) = \int DAD\bar{\psi}D\psi \prod_{i=0}^{1} \delta(n^{\mu} F^{*}_{\mu\nu}|_{x_3 = a_i}) \times \times \exp i \int d^4x [L(x) + j_{\mu} A^{\mu} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta], \qquad /1/$$

где

$$L(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_{\mu} A^{\mu})^2 + \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m + e\hat{A})\psi,$$

$$F^{*}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad n^{\mu} = (0,0,0,1).$$

Здесь использованы обозначения, стандартные для КЭД [3], n^{μ} - единичный вектор, перпендикулярный пластинкам.

В выражении /1/ δ-функции обеспечивают интегрирование по тем полям, которые подчиняются граничным условиям на пластинках. δ-функции удобно представить в виде интеграла

$$\prod_{i=0}^{1} \delta(n^{\mu} F^{*}_{\mu\nu}|_{x_3 = a_i}) = \int DB \exp[i\int d^3x d^4z\, B^{i\alpha}(x) H^{i}_{\alpha\nu}(x,z) A^{\nu}(z) +$$

$$+\frac{i}{2\beta}\int d^3x\, d^3y\, B^{i\alpha}(x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial y^\beta}D^c(x_a - y_a)B^{i\beta}(y)], \qquad /2/$$

где

$$H^i_{\alpha\nu}(x,z) = \epsilon_{3\alpha\nu\gamma}\frac{\partial}{\partial z^\gamma}\delta^3(x_a - z_a)\delta(a_i - z_3).$$

Вспомогательные поля $B^{i\alpha}$ /"живущие на зеркалах"/ трехкомпонентны. Поскольку независимых граничных условий лишь два, имеется калибровочная свобода $B^{i\alpha}(x) \to B^{i\alpha}(x) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\phi(x)$. Поэтому в /2/ введен квадратичный по $B^{i\alpha}$ член, фиксирующий калибровку. Подставим выражение /2/ в /1/. Сдвиг переменной интегрирования в /1/

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \int D^c_{\mu\nu}(x-z)\, H^i_{\alpha\nu}(y,z) B^{i\alpha}(y)\, d^4z\, d^3y$$

уничтожает там член, линейный по $B^{i\alpha}$. Это приведет к появлению квадратичного по $B^{i\alpha}$ члена вида $\frac{i}{2}\int B^{i\alpha}(x)\tilde{K}^{ij}_{\alpha\beta}(x,y)B^{j\beta}(y)\, d^3x\, d^3y$, где

$$\tilde{K}^{ij}_{\alpha\beta}(x,y) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-ip_\alpha(x-y)^\alpha}\frac{-i\Gamma}{2}\{(g_{\alpha\beta} - \frac{p_\alpha p_\beta}{\Gamma^2})h_{ij} + \frac{1}{\beta}\frac{p_\alpha p_\beta}{\Gamma^2}\delta_{ij}\}, \qquad /3/$$

$$h^{ij} = \exp i\Gamma|a_i - a_j|, \qquad \Gamma = +\sqrt{p_\alpha p^\alpha}.$$

В полученном таким образом выражении можно переходить стандартным путем к теории возмущений. При этом пропагаторы полей A_μ и $B^{i\alpha}$ можно объединить. В результате получаем стандартную теорию возмущений КЭД с новым фотонным пропагатором

$$^sD^c_{\mu\nu}(x,y) = D^c_{\mu\nu}(x-y) + \tilde{D}^c_{\mu\nu}(x,y), \qquad /4/$$

где

$$\tilde{D}^c_{\mu\nu}(x,y) = $$

$$= \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{-i}{2\Gamma}(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{\Gamma^2})e^{-iq_\alpha(x-y)^\alpha}e^{i\Gamma|x_3 - a_i|}h^{-1}_{ij}e^{i\Gamma|y_3 - a_j|} - \qquad /5/$$

вклад зеркал $(\mu, \nu = 0,1,2)$.

Сила Казимира F определяется соотношением $F = \frac{\partial}{\partial a}E_0$, где E_0 - плотность энергии основного состояния на единицу площади

зеркал. Она связана с ТЭИ соотношением $E_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_3 \langle 0|T_{00}|0\rangle$, где

$$\langle 0|T_{00}|0\rangle = [-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\rho}\frac{\partial}{\partial y_\rho}g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{a})\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}]\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle|_{x=y} \qquad /6/$$

$$- i\gamma^0_{\alpha\beta}(\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial y^0})\langle 0|\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(y)|0\rangle|_{x=y}.$$

В однопетлевом приближении имеем

$$\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = i\, {}^sD^c_{\mu\nu}(x,y) - i\int d^4z\, d^4z'\, {}^sD^c_{\mu\mu'}(x,z)\, \Pi^{\mu'\nu'}(z-z')\, {}^sD^c_{\nu'\nu}(z',y),$$

$$\langle 0|\bar{\psi}(x)\psi(y)|0\rangle = \frac{1}{i}\hat{S}(x-y) - i\int d^4z\, d^4z'\, {}^sD^c_{\mu\nu}(z,z')T_{00\rho\lambda}(x-z,x-z'), \qquad /8/$$

где

$$T_{\mu\nu\rho\lambda}(x-z, x-z') = -ie^2\, Sp\{\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu}\hat{S}(x-z)\gamma_\rho\hat{S}(z-z')\gamma_\lambda\hat{S}(z'-x)\}. \qquad /9/$$

В этих формулах $\hat{S}$ и $\Pi^{\mu\nu}$ обозначают соответственно стандартный спинорный пропагатор и поляризационный оператор [3].

В плотность энергии входит не сама величина $T_{\mu\nu\rho\lambda}$ /9/, а

$$r_{\rho\lambda}(\xi) = \int d^4\eta\, T_{00\rho\lambda}(-\xi-\eta, -\eta),$$

для которой из соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}T_{\mu\nu\rho\lambda}(x-z,x-z') = -\frac{1}{2}\Pi_{\rho\lambda}(x-z)\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta(x-z') - \frac{1}{2}\Pi_{\rho\lambda}(x-z')\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta(x-z)$$

получаем

$$r_{\rho\lambda}(\xi) = \frac{1}{2}g_{\rho\lambda}\{\frac{\partial}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial}{\partial\xi_\mu}\tilde{\Pi}(\xi^2) + \frac{\partial}{\partial\xi_\rho}\frac{\partial}{\partial\xi\rho}\frac{\partial^2}{\partial\xi_0^2}\xi^2\tilde{\Pi}(\xi^2)\}.$$

Выражение для силы в однопетлевом приближении имеет вид

$$F = \frac{-\partial}{\partial a}\{ i\int d^4\xi \{ [\delta(\xi) + \tilde{\Pi}(\xi^2)] \frac{\partial}{\partial \xi_\rho} \frac{\partial}{\partial \xi_\rho} - i[\frac{\partial}{\partial \xi_\rho} \frac{\partial}{\partial \xi^\rho} \xi^2 \tilde{\Pi}(\xi^2)] \frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2} \}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \tilde{D}^c(\xi_\alpha ; \xi_3 + x_3, x_3) + i\int d^4\xi \tilde{\Pi}(\xi^2) \frac{\partial}{\partial \eta_\rho} \frac{\partial}{\partial \eta_\rho} \qquad /10/$$

$$\times \int d^4 z \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \tilde{D}^c(z_\alpha ; z_3, x_3) \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \tilde{D}^c(\xi_\alpha + \eta_\alpha + z_\alpha ; \xi_3 + z_3, x_3 + \eta_3) | \} \Big|_{\eta=0} .$$

Нетрудно убедиться в том, что это выражение не содержит расходимостей /они либо не зависят от a , либо скомпенсировались/.
В нулевом приближении выражение имеет вид

$$F = \frac{-\partial}{\partial a} i \frac{\partial}{\partial \xi_\rho} \frac{\partial}{\partial \xi_\rho} \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \tilde{D}^c(\xi_\alpha ; \xi_3 + x_3, x_3) \Big|_{\xi=0} = -\frac{hc\pi^2}{240 a^4} \qquad /11/$$

в соответствии с ранее полученным результатом. Радиационная поправка дается формулой /11/. В пределе больших расстояний между зеркалами, который является физически разумным, поправка имеет вид

$$\Delta F = + \frac{hc\pi^2}{240 a^4} \left(\frac{3}{64\pi} \frac{e^2}{a m_e} \right). \qquad /12/$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Casimir H.B.G. Proc. Kon Nederl. Akad. Wet., 1948, 51,p.793.
2. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.С. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях, Атомиздат, Москва, 1980.
3. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей, "Наука", Москва, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 мая 1983 года.

Бордаг М., Вицорек Э., Робашик Д.

P2-83-302

Радиационные поправки к эффекту Казимира

В отличие от предыдущих работ /2/ с помощью функционального интеграла выводится замкнутая формулировка КЭД с граничными условиями, которая позволяет вычислить высшие петли, и доказывается отсутствие ультрафиолетовых расходимостей в выражении для силы Казимира. В пределе больших расстояний вычислена сила Казимира.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Bordag M., Wieczorek E., Robaschik D.

P2-83-302

Radiative Corrections for the Casimir Effect

Unlike foregoing papers we derive with the help of the path integral a closed formulation of the QED with boundary conditions, that allows the calculation of higher loop contributions and the proof of the absence of uv- divergences of the Casimir force. The Casimir force is calculated in the limit of large distances.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод авторов.