объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-83-280

Е.А.Иванов, С.О.Кривонос

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ КАК НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ СИММЕТРИЙ. УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ

Направлено в "Letters in Mathematical Physics"

1983

1. При описании вполне интегрируемых систем в рамках метода обратной задачи рассеяния /МОЗР/ [1] наибольшую трудность представляет отыскание подходящей L–M пары. Частичная конкретизация структуры L–M пары в подходе AKNS [2] позволила единым образом описать большинство известных двумерных вполне интегрируемых нелинейных уравнений. Однако такой подход не дает каких-либо однозначных /с точностью до калибровочных преобразований/ рецептов выбора вида формы Ω_0, для которой строится представление нулевой кривизны

$$d^{ext}\,\Omega_0 = i\Omega_0 \wedge \Omega_0 \qquad /1/$$

/d^{ext} и $\wedge$ - символы внешнего дифференцирования и умножения/.

В настоящей работе мы показываем на простейшем примере уравнения Лиувилля, что путем вложения алгебры $\mathcal{G}_0$, на которой задана форма Ω_0, в более широкую бесконечномерную алгебру $\mathcal{G}$ удается получить необходимую параметризацию формы Ω_0. При этом поля, входящие в Ω_0 и удовлетворяющие данному уравнению, приобретают смысл координат определенного фактор-пространства группы G, отвечающей алгебре $\mathcal{G}$. Пока нам удалось описать на языке такого вложения только уравнение Лиувилля и его суперсимметричные обобщения [3], однако можно думать, что и другие интегрируемые системы допускают подобную интерпретацию. Предлагаемая конструкция полезна, на наш взгляд, главным образом тем, что открывает возможность свести проблему поиска новых уравнений, обладающих представлением нулевой кривизны, к классификационной задаче подбора подходящих /супер/ алгебр $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}_0$.

2. Уравнение Лиувилля записывается в виде

$$u_{+-} = m^2 e^{-2u}, \qquad /2/$$

где $u_{+-} \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^+ \partial x^-}$, $x^{\pm} = x^0 \pm x^1$ - световые координаты двумерного пространства Минковского, $[m^2] = \text{см}^{-2}$. Хорошо известно, что оно обладает представлением нулевой кривизны на алгебре $s\ell(2,R)$ [4], т.е. в данном случае $\mathcal{G}_0 = s\ell(2,R)$. В качестве алгебры $\mathcal{G}$ выберем прямую сумму двух контактных алгебр $K^{\pm}(1)$* с образующими $L^n_{\pm}$ /n = -1, 0, 1,.../, подчиненными коммутационным соотношениям:

* Мы придерживаемся терминологии работ [5].

$$i[L^n_\pm, L^m_\pm] = (n-m)L^{n+m}_\pm, \quad i[L^n_+, L^m_-] = 0. \qquad /3/$$

Отметим, что алгебра $\mathcal{G} = K^+(1) \oplus K^-(1)$ изоморфна алгебре конформной группы двумерия.

Отождествим с $\mathcal{G}_0$ подалгебру $s\ell(2,R)$ алгебры $\mathcal{G}$, образованную следующими комбинациями генераторов $L^n_\pm$:

$$R_+ = L^{-1}_+ + m^2 L^1_-, \quad R_- = L^{-1}_- + m^2 L^1_+, \quad U = L^0_+ - L^0_-, \qquad /4/$$

$$i[R_+, R_-] = -2m^2 U, \quad i[R_\pm, U] = \mp R_\pm. \qquad /5/$$

В пределе $m^2 = 0$ алгебра /5/ переходит в алгебру группы Пуанкаре двумерия: $L^{-1}_\pm$ - генераторы трансляций, а U - генератор двумерной группы Лоренца.

Рассмотрим теперь нелинейную реализацию группы G, построенной по алгебре $\mathcal{G}$, в фактор-пространстве G/H, где $H = SO(1,1)$ -группа Лоренца с генератором U. Элемент смежных классов G/H может быть параметризован в виде

$$g \equiv G/H = e^{ix^\pm L^{-1}_\pm} e^{iz^\pm_1(x) L^1_\pm} e^{iz^\pm_2(x) L^2_\pm} \ldots e^{iu(x)(L^0_+ + L^0_-)}. \qquad /6/$$

Здесь $u(x)$, $z^\pm_1(x)$, $z^\pm_2(x)$, ... - бесконечный набор координат-полей, и по повторяющимся индексам $\pm$ идет суммирование. Группа G реализована на /6/ левыми сдвигами.

Геометрия фактор-пространства G/H задается дифференциальными формами Картана [6]:

$$g^{-1}dg = i \sum_{n=-1}^{+\infty} \omega^\pm_n L^n_\pm = i\Omega = i(\Omega_0 + \Omega_1). \qquad /7/$$

Формы Ω_0 и Ω_1 определены так, что Ω_0 принадлежит алгебре $s\ell(2,R)$ /4/, а Ω_1 - ее ортогональному дополнению в $\mathcal{G}$.

Приведем явный вид нескольких первых форм:

$$\begin{cases} \omega^\pm_{-1} = e^{-u} dx^\pm \\ \omega^\pm_0 = du - 2z^\pm_1 dx^\pm \\ \omega^\pm_1 = e^u (dz^\pm_1 + (z^\pm_1)^2 dx^\pm - 3z^\pm_2 dx^\pm) \\ \omega^\pm_2 = e^{2u}(dz^\pm_2 + 4z^\pm_1 z^\pm_2 dx^\pm - 4z^\pm_3 dx^\pm). \end{cases} \qquad /8/$$

В силу своего определения форма Ω /7/ удовлетворяет уравнению Маурера-Картана:

$$d^{ext}\Omega = i\Omega \wedge \Omega, \qquad /9/$$

которое на данном этапе выполняется автоматически и не имеет какого-либо динамического содержания. Динамика возникает при ковариантной редукции фактор-пространства G/H к подпространству $SL(2,R)/H$, осуществляемой путем наложения следующих связей:

$$\Omega_1 = 0, \qquad /10/$$

или, эквивалентно, для форм $\omega^\pm_n$:

$$\begin{cases} \omega^\pm_1 = m^2 \omega^\mp_{-1} \\ \omega^+_0 + \omega^-_0 = 0 \\ \omega^\pm_n = 0 \quad (n \geq 2). \end{cases} \qquad /11/$$

Условия /11/ представляют собой вариант связей обратного эффекта Хиггса [7]. Решая их, можно выразить все высшие параметры-поля $z^\pm_n(x)$ в /6/ через одно существенное поле - дилатон $u(x)$:

$$\begin{cases} z^\pm_1(x) = \partial_\pm u(x) \\ z^\pm_2(x) = \frac{1}{3}\{\partial^2_\pm u(x) + [\partial_\pm u(x)]^2\} \\ \text{и т.д.} \end{cases} \qquad /12/$$

Поле $u(x)$ в силу тех же условий /11/ подчиняется уравнению Лиувилля /2/. Легко видеть, что для этого уравнения в данной схеме автоматически возникает представление нулевой кривизны на $s\ell(2,R)$. После наложения связей /10/, /11/ форма Ω сводится к форме Ω^{Red}_0, принадлежащей $s\ell(2,R)$ и зависящей от одного поля $u(x)$:

$$\Omega^{Red} = \Omega^{Red}_0 = e^{-u}(dx^+ R_+ + dx^- R_-) + (u_- dx^- - u_+ dx^+)U. \qquad /13/$$

Из исходного уравнения Маурера-Картана /9/ и связей /10/ сразу следует, что Ω^{Red}_0 удовлетворяет условию нулевой кривизны:

$$d^{ext}\Omega^{Red}_0 = i\Omega^{Red}_0 \wedge \Omega^{Red}_0, \qquad /14/$$

которое, как нетрудно проверить, эквивалентно уравнению /2/.

Зная конкретную структуру Ω^{Red}_0, можно, разумеется, написать и линейную задачу, для которой /14/ будет условием совместности:

$$\partial_+ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_+}{2} & m\eta e^{-u} \\ 0 & -\frac{u_+}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}; \quad \partial_- \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{u_-}{2} & 0 \\ -\frac{m}{\eta} e^{-u} & \frac{u_-}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \qquad /15/$$

Спектральный параметр η вводится правым константным лоренцевским поворотом элемента смежных классов /6/.

Таким образом, вложив $SL(2,R)$ в бесконечнопараметрическую группу G с алгеброй /3/ и осуществив ковариантную редукцию фактор-пространства $G/SO(1,1)$ к $SL(2,R)/SO(1,1)$, мы в качестве одного из условий этой редукции получили динамическое уравнение Лиувилля /2/ на единственное существенное поле теории - $u(x)$.

Заметим, что весь исходный набор предположений, приводящих к уравнению Лиувилля, состоял лишь в выборе группы G, ее подгруппы G_0 и подгруппы стабильности H /в данном случае $G_0 = SL(2,R)$, $H = SO(1,1)$ /. Если вместо $SL(2,R)$ в качестве G_0 выбрать группу Пуанкаре двумерия /т.е. положить в /11/ $m^2 = 0$ /, поле $u(x)$ будет удовлетворять свободному уравнению:

$$u_{+-} = 0. \qquad /16/$$

3. Покажем теперь, как в нашем подходе построить общее решение уравнения /2/. В данном случае мы получим известный результат, однако идея построения не связана с конкретной системой,[3,9] и уже для $N = 1$ и $N = 2$ суперсимметричных уравнений Лиувилля приводит к нетривиальным результатам. Состоит она в следующем. Поскольку форма $i\Omega_0^{Red} = g^{-1}dg$ принадлежит алгебре $\mathcal{G}_0$ и удовлетворяет условию нулевой кривизны на этой алгебре, она представима в виде

$$i\Omega_0^{Red} = g_0^{-1}\, dg_0, \qquad /17/$$

где g_0 - элемент группы, соответствующей $\mathcal{G}_0$, в рассматриваемом случае - группы $SL(2,R)$. Параметризовав g_0 тремя произвольными функциями $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$:

$$g_0 = e^{i\alpha(x)R_+}\, e^{i\beta(x)R_-}\, e^{i\gamma(x)U} \qquad /18/$$

и потребовав, чтобы форма

$$g_0^{-1}dg_0 = i(\omega_0^{R_+}R_+ + \omega_0^{R_-}R_- + \omega_0^{U}U), \qquad /19/$$

где

$$\begin{cases} \omega_0^{R_+} = e^{-\gamma}\, d\alpha \\ \omega_0^{R_-} = e^{\gamma}(d\beta + m^2\beta^2 d\alpha) \\ \omega_0^{U} = d\gamma - 2m^2\beta d\alpha , \end{cases} \qquad /20/$$

совпадала с формой /13/, мы придем к уравнениям, выражающим поле $u(x)$ через две произвольные функции $\phi(x^-)$ и $\psi(x^+)$, связанные с α, β и γ следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha = \psi(x^+) \\ \beta = (m^2\psi(x^+) + \phi(x^-))^{-1} \\ \gamma = u + \ln\psi_+(x^+) \end{cases} \qquad /21/$$

$$e^{-2u} = -\frac{\phi_-(x^-)\psi_+(x^+)}{(m^2\psi(x^+) + \phi(x^-))^2}. \qquad /22/$$

Подчеркнем, что закрепление зависимости от координат в функциях α, β и γ и уменьшение числа произвольных функций с трех до двух является следствием требования совпадения форм /20/ и /13/.

4. Перейдем к рассмотрению преобразований Бэклунда, знание которых оказывается достаточным для нахождения бесконечных серий сохраняющихся токов [10], построения соответствующих преобразований симметрии [11] и т.п.

В нашем подходе преобразования Бэклунда реализуются как правые калибровочные преобразования элемента смежных классов /6/:

$$\tilde{g} = g\, e^{imb^{\pm}(x)L^1_{\pm}}\, e^{ia(x)(L^0_+ + L^0_-)} \qquad /23/$$

с дополнительным требованием сохранения условия редукции /10/:

$$\tilde{\Omega}_1 = 0, \qquad /24/$$

где

$$\tilde{\Omega}_1 = -i(\tilde{g}^{-1}dg - i\tilde{\Omega}_0) = \tilde{\Omega} - \tilde{\Omega}_0 . \qquad /25/$$

Учитывая, что преобразованное поле $\tilde{u}$ связано с u как

$$\tilde{u} = u + a,$$

получим, разрешая уравнения /24/:

$$\begin{cases} \tilde{u}_+ + u_+ = 2\eta m\, \mathrm{sh}(\tilde{u} - u) \\ \tilde{u}_- - u_- = \dfrac{m}{\eta}\, e^{-(\tilde{u}+u)}. \end{cases} \qquad /26/$$

Эти уравнения есть искомые преобразования Бэклунда, т.к. условием совместности /26/ является уравнение Лиувилля на $\tilde{u}(x)$:

$$\tilde{u}_{+-} = m^2 \exp(-2\tilde{u}). \qquad /27/$$

Если вместо /24/ на форму $\tilde{\Omega}$ наложить условия, выделяющие алгебру группы Пуанкаре, т.е.

$$\tilde{\omega}_0^+ + \tilde{\omega}_0^- = 0, \quad \tilde{\omega}_n^{\pm} = 0 \quad (n \geq 1), \qquad /28/$$

то вместо /26/ получим

$$\begin{cases} \tilde{u}_+ + u_+ = \eta m e^{(\tilde{u} - u)} \\ \tilde{u}_- - u_- = \dfrac{m}{\eta} e^{-(\tilde{u} + u)} \end{cases} . \qquad /29/$$

Поле $\tilde{u}$ удовлетворяет теперь свободному уравнению $\tilde{u}_{+-} = 0$, которое служит условием совместности системы /29/. Таким образом, соотношения /29/ являются преобразованиями Бэклунда от решений уравнения Лиувилля к решениям свободного уравнения.

Заметим, что преобразование /23/ - наиболее общий правый калибровочный сдвиг, не затрагивающий координат $x^{\pm}$, не меняющий параметризации элементов фактор-пространства /6/ и согласованный с условиями /24/ или /28/. Первым двум требованиям удовлетворяют и сдвиги с генераторами $L_{\pm}^{n}$ $(n \geq 2)$, однако можно показать, что условия /24/ или /28/ приводят к обращению в нуль соответствующих калибровочных параметров.

5. Мы показали, что простейшая интегрируемая система - уравнение Лиувилля - имеет адекватное описание на языке нелинейных реализаций и форм Картана. Преобразования Бэклунда и представление нулевой кривизны возникают естественным образом и допускают прозрачное теоретико-групповое истолкование. Это позволяет надеяться, что и другие свойства, связанные с полной интегрируемостью, получат простое объяснение в данном подходе.

В заключение укажем некоторые направления дальнейших исследований. Наиболее интересной задачей, на наш взгляд, является распространение изложенной конструкции на другие вполне интегрируемые системы*. На этом пути можно надеяться получить своеобразную классификацию интегрируемых уравнений по их бесконечномерным алгебрам.

---

*Утверждение о том, что любая интегрируемая система связана с нелинейной реализацией некоторой бесконечнопараметрической симметрии, было сформулировано в виде теоремы существования в работе [12].

Интересно также проинтерпретировать в подобном духе самодуальный сектор теории Янга-Миллса. В этой связи отметим, что теория Янга-Миллса, аналогично уравнению Лиувилля, представляет собой нелинейную реализацию бесконечномерной симметрии [13]. В свете возможной интегрируемости калибровочных теорий эта аналогия кажется заслуживающей внимания.

Мы искренне признательны П.П.Кулишу, Д.А.Лейтесу и В.И.Огиевецкому за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Scott A.C., Chu F.Y.F., McLaughlin D.W. Proc. IEEE, 1973, v. 61, p. 1443.
2. Ablowitz M.J. et al. Phys.Rev.Lett., 1967, 19, p. 1095.
3. Ivanov E.A., Krivonos S.O. JINR, E2-83-104, Dubna, 1983.
4. Chaichian M., Kulish P.P. Phys.Lett., 1978, 78B, p. 413.
5. Kac V.G. Comm.Math.Phys., 1977, 53, p. 31; Adv.Math., 1977, 26, p. 8.
6. Coleman S., Wess J., Zumino B. Phys.Rev., 1969, 177, p.2239; Callan C.L. et al. ibid 2247;
   Волков Д.В. ЭЧАЯ, 1973, 4, с. 3.
7. Иванов Е.А., Огиевецкий В.И. ТМФ, 1975, 25, с. 164.
8. Eisenhart L.P. A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, Dover, N.-Y., 1960.
9. Leznov A.N., Saveliev M.V., Leites D.A. Phys.Lett., 1980, 96B, p. 97.
10. Wadati M. et al. Prog.Theor.Phys., 1975, 53, p. 419.
11. Kumei S. J.Math.Phys., 1975, 16, p. 2461.
12. Konopelchenko B.G. Lett. Math. Phys., 1979, 3, p. 67.
13. Иванов Е.А., Огиевецкий В.И. Письма в ЖЭТФ, 1967, 23, с. 661.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 апреля 1983 года.

Иванов Е.А., Кривонос С.О.

Р2-83-280

Интегрируемые системы как нелинейные реализации бесконечномерных симметрий. Уравнение Лиувилля

Показано, что уравнение Лиувилля имеет естественное описание на языке нелинейной реализации бесконечнопараметрической конформной группы двумерия. Соответствующие преобразования Бэклунда и представление нулевой кривизны допускают в таком подходе простое истолкование. Предлагаемая конструкция может быть, по-видимому, обобщена на другие вполне интегрируемые системы.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Ivanov E.A., Krivonos S.O.

P2-83-280

Integrable Systems as Nonlinear Realizations of Infinite Dimensional Symmetries. The Liouville Equation

The Liouville equation is shown to have a natural interpretation in terms of the nonlinear realization of infinite parameter conformal group in 1+1-dimensions. The relevant zero-curvature representation and Backlund transformations get a simple treatment in this approach. The proposed construction can hopefully be generalized to other integrable systems.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой.