объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна



P2-83-231

Н.С.Шавохина

# О КРУГОВОМ РЕЛЯТИВИСТСКОМ ДВИЖЕНИИ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ ТЕЛ

Направлено в сборник
"Проблемы теории гравитации
и элементарных частиц"

1983

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Релятивистская задача двух одинаковых тел, притягивающихся друг к другу с постоянной по модулю силой, может быть представлена[1] как задача о двумерной минимальной поверхности в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве $E^4_{(1,3)}$, задаваемой двумя функциями, $\xi(t)$ и $\vec{k}(t)$. Ось времени $t$ считаем осью симметрии минимальной поверхности, так что если ее задать в виде

$$\vec{r} = \vec{y}(\eta, t), \qquad /1/$$

то функция $\vec{y}$ нечетна относительно первого аргумента. Параметр $\eta$ меняется в пределах

$$-\xi(t) \le \eta \le \xi(t),$$

где $\xi(t)$ - упомянутая выше функция.

Граничные линии $\eta = -\xi(t)$ и $\eta = \xi(t)$ поверхности /1/ рассматриваем как мировые траектории первого и второго тел. Мировая траектория второго тела записывается также в виде

$$\vec{r} = \vec{x}(t) = \vec{y}(\xi(t), t),$$

а мировая траектория первого тела - в виде

$$\vec{r} = -\vec{x}(t) = \vec{y}(-\xi(t), t).$$

Если импульс второго тела равен $\vec{p}(t)$, то импульс первого тела равен $-\vec{p}(t)$. Импульс $\vec{p}(t)$ вычисляется по формулам релятивистской механики материальной точки:

$$\vec{p}(t) = p^{\circ}(t)\,\dot{\vec{x}}(t), \qquad /2/$$

где

$$p^{\circ}(t) = m\left[1 - \left\{\frac{\dot{\vec{x}}(t)}{c}\right\}^2\right]^{-1/2}, \qquad /3/$$

$m$ - масса покоя тела, $c$ - скорость света. В качестве краевого условия для минимальной поверхности принимаем

$$p^{\circ}(t) + \frac{F}{c^2}\xi(t) = \epsilon, \qquad /4/$$

где $F$ - константа взаимодействия тел, $\epsilon$ - константа, равная половине энергии системы.

Что касается функции $\vec{k}(t)$, то она равна

$$\vec{k}(t) = p^{\circ}(t)\,\vec{x}(t) + \frac{F}{c^2}\int_0^{\xi(t)} \vec{y}(\eta, t)\,d\eta . \qquad /5/$$

Предполагается, что она имеет непрерывную производную $\dddot{\vec{k}}(t)$ третьего порядка и что модуль ее второй производной равен константе взаимодействия, то есть

$$|\ddot{\vec{k}}(t)| = F . \qquad /6/$$

С другой стороны, полагаем

$$\vec{y}(\eta, t) = -\frac{c}{2F}\left[\dot{\vec{k}}\left(t+\frac{\eta}{c}\right) - \dot{\vec{k}}\left(t-\frac{\eta}{c}\right)\right], \qquad /7/$$

так что

$$\vec{x}(t) = -\frac{c}{2F}\left[\dot{\vec{k}}(u(t)) - \dot{\vec{k}}(v(t))\right], \qquad /8/$$

где

$$u(t) = t + \frac{\xi(t)}{c}, \qquad v(t) = t - \frac{\xi(t)}{c} . \qquad /9/$$

Первая квадратичная форма поверхности /1/ равна

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{y}^2 = \cos^2\Delta(\eta, t)[c^2dt^2 - d\eta^2],$$

где

$$F^2\cos 2\Delta(\eta, t) = \ddot{\vec{k}}\left(t+\frac{\eta}{c}\right)\ddot{\vec{k}}\left(t-\frac{\eta}{c}\right).$$

Считая ее регулярной, полагаем

$$-\frac{\pi}{2} < \Delta(\eta, t) < \frac{\pi}{2} . \qquad /10/$$

Обозначая

$$\Delta(t) = \Delta(\xi(t), t),$$



находим

$$F^2\cos 2\Delta(t) = \ddot{\vec{k}}(u(t))\,\ddot{\vec{k}}(v(t)) .$$

В соответствии с /10/ полагаем

$$0 \le \Delta(t) < \frac{\pi}{2} . \qquad /11/$$

По формуле /3/ получаем

$$p^{\circ}(t) = \frac{m}{\sqrt{\dot{u}(t)\,\dot{v}(t)}\,\cos\Delta(t)} . \qquad /12/$$

Согласно /7/

$$\frac{F}{c^2}\vec{y}(\eta, t) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\vec{k}\left(t+\frac{\eta}{c}\right) + \vec{k}\left(t-\frac{\eta}{c}\right)\right]. \qquad /13/$$

Подставляя это в /5/, получаем

$$p^{\circ}(t)\,\vec{x}(t) = \frac{1}{2}\left[\vec{k}(u(t)) + \vec{k}(v(t))\right]. \qquad /14/$$

Дифференцируя /5/ в силу условия /4/ получаем

$$\dot{\vec{k}}(t) = \vec{p}(t) + \frac{F}{c^2}\int_0^{\xi(t)}\frac{\partial}{\partial t}\vec{y}(\eta, t)\,d\eta . \qquad /15/$$

Подставляя сюда /13/, находим

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{2}\left[\dot{\vec{k}}(u(t)) + \dot{\vec{k}}(v(t))\right]. \qquad /16/$$

Из /2/ и /3/ следует, что

$$p^{\circ}(t) = \sqrt{m^2 + \left[\frac{\vec{p}(t)}{c}\right]^2} .$$

Подставляя сюда /16/, наряду с /4/ и /12/ получаем еще одно выражение для $p^{\circ}(t)$.

Далее, из формулы /2/ следует, что

$$p^{\circ}(t)\,\ddot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{p}}(t) - \dot{\vec{x}}(t)\frac{d}{dt}p^{\circ}(t).$$

Подставляя сюда /4/, /8/ и /9/, находим

$$p^{\circ}(t)\,\ddot{\vec{x}}(t) = \frac{1}{2}\left[\ddot{\vec{k}}(u(t)) + \ddot{\vec{k}}(v(t))\right]\dot{u}(t)\,\dot{v}(t). \qquad /17/$$

где $F$ - константа взаимодействия тел, $\epsilon$ - константа, равная половине энергии системы.

Что касается функции $\vec{k}(t)$, то она равна

$$\vec{k}(t) = p^\circ(t)\,\vec{x}(t) + \frac{F}{c^2}\int_0^{\xi(t)} \vec{y}(\eta, t)\,d\eta . \qquad /5/$$

Предполагается, что она имеет непрерывную производную $\dddot{\vec{k}}(t)$ третьего порядка и что модуль ее второй производной равен константе взаимодействия, то есть

$$|\ddot{\vec{k}}(t)| = F . \qquad /6/$$

С другой стороны, полагаем

$$\vec{y}(\eta, t) = -\frac{c}{2F}\left[\dot{\vec{k}}\left(t+\frac{\eta}{c}\right) - \dot{\vec{k}}\left(t-\frac{\eta}{c}\right)\right] , \qquad /7/$$

так что

$$\vec{x}(t) = -\frac{c}{2F}\left[\dot{\vec{k}}(u(t)) - \dot{\vec{k}}(v(t))\right] , \qquad /8/$$

где

$$u(t) = t + \frac{\xi(t)}{c} , \qquad v(t) = t - \frac{\xi(t)}{c} . \qquad /9/$$

Первая квадратичная форма поверхности /1/ равна

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{y}^2 = \cos^2\Delta(\eta, t)[c^2dt^2 - d\eta^2] ,$$

где

$$F^2\cos 2\Delta(\eta, t) = \ddot{\vec{k}}\left(t+\frac{\eta}{c}\right)\ddot{\vec{k}}\left(t-\frac{\eta}{c}\right).$$

Считая ее регулярной, полагаем

$$-\frac{\pi}{2} < \Delta(\eta, t) < \frac{\pi}{2} . \qquad /10/$$

Обозначая

$$\Delta(t) = \Delta(\xi(t), t) ,$$



находим

$$F^2\cos 2\Delta(t) = \ddot{\vec{k}}(u(t))\,\ddot{\vec{k}}(v(t)) .$$

В соответствии с /10/ полагаем

$$0 \leq \Delta(t) < \frac{\pi}{2} . \qquad /11/$$

По формуле /3/ получаем

$$p^\circ(t) = \frac{m}{\sqrt{\dot{u}(t)\,\dot{v}(t)}\,\cos\Delta(t)} . \qquad /12/$$

Согласно /7/

$$\frac{F}{c^2}\,\vec{y}(\eta, t) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\vec{k}\left(t+\frac{\eta}{c}\right) + \vec{k}\left(t-\frac{\eta}{c}\right)\right] . \qquad /13/$$

Подставляя это в /5/, получаем

$$p^\circ(t)\,\vec{x}(t) = \frac{1}{2}\left[\vec{k}(u(t)) + \vec{k}(v(t))\right] . \qquad /14/$$

Дифференцируя /5/ в силу условия /4/ получаем

$$\dot{\vec{k}}(t) = \vec{p}(t) + \frac{F}{c^2}\int_0^{\xi(t)} \frac{\partial}{\partial t}\,\vec{y}(\eta, t)\,d\eta . \qquad /15/$$

Подставляя сюда /13/, находим

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{2}\left[\dot{\vec{k}}(u(t)) + \dot{\vec{k}}(v(t))\right] . \qquad /16/$$

Из /2/ и /3/ следует, что

$$p^\circ(t) = \sqrt{m^2 + \left[\frac{\vec{p}(t)}{c}\right]^2} .$$

Подставляя сюда /16/, наряду с /4/ и /12/ получаем еще одно выражение для $p^\circ(t)$.

Далее, из формулы /2/ следует, что

$$p^\circ(t)\,\ddot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{p}}(t) - \dot{\vec{x}}(t)\frac{d}{dt}p^\circ(t).$$

Подставляя сюда /4/, /8/ и /9/, находим

$$p^\circ(t)\,\ddot{\vec{x}}(t) = \frac{1}{2}\left[\ddot{\vec{k}}(u(t)) + \ddot{\vec{k}}(v(t))\right]\dot{u}(t)\,\dot{v}(t) . \qquad /17/$$

Эту же формулу можно получить, дифференцируя /15/ и учитывая равенства

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\vec{y}\,(\eta\,, t) = 0,$$

$$\ddot{\vec{k}}\,(t) = -F\frac{\partial}{\partial \eta}\,\vec{y}(\eta\,, t)\big|_{\eta=0}\,.$$

Квадрат модуля 4-силы, действующей на тело, равен

$$\left(\frac{p^\circ}{m}\right)^2\left[\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2 - c^2\left(\frac{dp^\circ}{dt}\right)^2\right] = F^2. \qquad /18/$$

В силу тождества

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\left\{(p^\circ)^2\left[\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2 - c^2\left(\frac{dp^\circ}{dt}\right)^2\right]\right\} = (p^\circ)\;\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}\,\frac{d^2\vec{p}}{dt^2}$$

из /18/ следует, что

$$\ddot{\vec{x}}\,(t)\,\ddot{\vec{p}}\,(t) = 0. \qquad /19/$$

Вторая производная функции /16/ равна

$$\vec{p}\,(t) = \frac{1}{2}\left[\dddot{\vec{k}}\,(u)\,\dot{u}^2 + \dddot{\vec{k}}\,(v)\,\dot{v}^2 + \ddot{\vec{k}}\,(u)\,\ddot{u} + \ddot{\vec{k}}\,(v)\,\ddot{v}\,\right].$$

Умножая ее на /17/, в силу /19/, /6/ и /9/ получаем

$$\ddot{\vec{k}}(u)\,\dddot{\vec{k}}\,(v)\,\dot{v}^{\,2} + \ddot{\vec{k}}\,(v)\,\dddot{\vec{k}}\,(u)\,\dot{u}^2 = 0. \qquad /20/$$

Заменяя в этой процедуре /17/ на вторую производную функции /8/, находим

$$|\,\dddot{\vec{k}}\,(u)|\;\dot{u}^{\,2} = |\,\dddot{\vec{k}}\,(v)|\;\dot{v}^{\,2}\,. \qquad /21/$$

Релятивистская задача двух одинаковых тел с постоянной по величине силой притяжения, равной $F$, сводится к тому, чтобы по приведенным выше формулам найти функции $\xi(t)$ и $\vec{k}(t)$.

Мы будем решать эту задачу при условии, что функция $\xi(t)$ не зависит от времени $t$. При этом условии согласно формулам /4/ и /12/ функции $p^\circ(t)$ и $\Delta(t)$ также не зависят от времени $t$, а сами формулы записываются в виде



$$p^\circ + \frac{F}{c^2}\,\xi = \epsilon, \qquad /22/$$

$$p^\circ = \frac{m}{\cos\,\Delta}\,. \qquad /23/$$

Из /8/ и /14/ следует, что при $\xi = \mathrm{const}$ функция $\vec{k}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{mc}{2\cos\Delta}\left[\,\dot{\vec{k}}\,\left(t + \frac{\xi}{c}\right) - \dot{\vec{k}}\,\left(t - \frac{\xi}{c}\right)\right] = -\frac{F}{2}\left[\,\vec{k}\left(t + \frac{\xi}{c}\right) + \vec{k}\left(t - \frac{\xi}{c}\right)\right]. \qquad /24/$$

Из формулы /8/ получаем

$$|\,\dot{\vec{x}}\,(t)| = c\,\sin\Delta, \qquad /25/$$

а из формулы /17/ следует, что

$$|\,\ddot{\vec{x}}\,(t)| = \frac{F}{m}\cos^2\Delta\,. \qquad /26/$$

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Согласно /24/ функция $\vec{k}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\vec{z}}\,(t - a) - \dot{\vec{z}}\,(t + a) = \lambda\left[\,\vec{z}\,(t - a) + \vec{z}\,(t + a)\right] \qquad /27/$$

с отклоняющимся аргументом. В этом уравнении $a$ и $\lambda$ - положительные константы, равные

$$a = \frac{\xi}{c}\,, \quad \lambda = \frac{F\cos\Delta}{mc}\,. \qquad /28/$$

Дифференцируя /27/ по $t$, находим, что такому же уравнению удовлетворяют первая и вторая производные $\dot{\vec{k}}(t)$ и $\ddot{\vec{k}}\,(t)$. Третий раз дифференцировать поначалу мы не имеем права, поскольку предположили, что существует непрерывная производная третьего порядка, а с четвертой производной никаких предположений не стали делать.

Будем считать, что в уравнении /27/ $\vec{z}(t) = \ddot{\vec{k}}\,(t)$. Поэтому в соответствии с /6/ к уравнению /27/ добавим условие

$$|\,\vec{z}(t)| = F, \qquad /29/$$

угол между векторами $\vec{z}(t - a)$ и $\vec{z}\,(t + a)$ обозначим $2\Delta$ и будем считать, что функция $\vec{z}(t)$ непрерывно дифференцируема.

Докажем, что только из /27/ и /29/ следует, что угол $\Delta$ не зависит от времени. Для этого введем функцию

$$\vec z_1(t) = \frac{1}{2}[\vec z(t-a) - \vec z(t+a)], \qquad /30/$$

связанную с функцией $\dot{\vec x}(t)$ простым соотношением $c\vec z_1(t) = F\dot{\vec x}(t)$. Согласно /27/ ее производная равна

$$\dot{\vec z}_1(t) = \frac{\lambda}{2}[\vec z(t-a) + \vec z(t+a)]. \qquad /31/$$

В силу условия /29/ модуль

$$|\vec z_1(t)| = F_1 \qquad /32/$$

не зависит от времени $t$. Действительно, умножая /30/ на /31/, получаем $F_1\dot F_1 = \vec z_1(t)\dot{\vec z}_1(t) = 0$, т.е. $F_1 = \mathrm{const}$. Так как согласно /29/ и /30/

$$F_1 = F\sin\Delta, \qquad /33/$$

то и угол $\Delta$ не зависит от времени $t$.

Модуль

$$|\dot{\vec z}_1(t)| = G_1 \qquad /34/$$

производной $\dot{\vec z}_1(t)$ также не зависит от времени $t$, поскольку из /29/ и /31/ следует, что

$$G_1 = \lambda F\cos\Delta. \qquad /35/$$

По существу формулы /33/ и /35/ эквивалентны формулам /25/ и /26/.

Заметим, что функция /30/ удовлетворяет уравнению /27/. Действительно, согласно /30/

$$\vec z_1(t-a) = \frac{1}{2}[\vec z(t-2a) - \vec z(t)],$$

$$\vec z_1(t+a) = \frac{1}{2}[\vec z(t) - \vec z(t+2a)],$$

а значит,

$$\vec z_1(t-a) + \vec z_1(t+a) = \frac{1}{2}[\vec z(t-2a) - \vec z(t+2a)]. \qquad /36/$$



С другой стороны, согласно /31/

$$\dot{\vec z}_1(t-a) = \frac{\lambda}{2}[\vec z(t-2a) + \vec z(t)],$$

$$\dot{\vec z}_1(t+a) = \frac{\lambda}{2}[\vec z(t) + \vec z(t+2a)],$$

а значит,

$$\dot{\vec z}_1(t-a) - \dot{\vec z}_1(t+a) = \frac{\lambda}{2}[\vec z(t-2a) - \vec z(t+2a)]. \qquad /37/$$

Сравнивая /36/ и /37/, заключаем, что функция /30/ удовлетворяет уравнению /27/.

Из /31/ следует, что функция $\vec z_1(t)$ имеет непрерывную производную второго порядка, поскольку функция $\vec z(t)$ непрерывно дифференцируема. Поэтому уравнению /27/ удовлетворяет не только функция /30/, но и ее производная

$$\dot{\vec z}_1(t) = \frac{1}{2}[\dot{\vec z}(t-a) - \dot{\vec z}(t+a)]. \qquad /38/$$

Шаг, сделанный от $\vec z(t)$ к $\vec z_1(t)$, можно повторить, введя функцию

$$\vec z_2(t) = \frac{1}{2}[\vec z_1(t-a) - \vec z_1(t+a)], \qquad /39/$$

имеющую непрерывную производную третьего порядка, поскольку

$$\dot{\vec z}_2(t) = \frac{\lambda}{2}[\vec z_1(t-a) + \vec z_1(t+a)]. \qquad /40/$$

Эта функция и ее производные первых двух порядков удовлетворяют уравнению /27/.

Из формул /34/, /39/ и /40/ следует, что модули $F_2 = |\vec z_2(t)|$, $G_2 = |\dot{\vec z}_2(t)|$ и угол $2\Delta_1$ между векторами $\vec z_1(t-a)$ и $\vec z_1(t+a)$ не зависят от времени $t$. Подобно /33/ и /35/

$$F_2 = F_1\sin\Delta_1, \quad G_2 = \lambda F_1\cos\Delta_1. \qquad /41/$$

Дифференцируя формулы /39/ и /40/, приходим к выводу, что модули $G_2 = |\dot{\vec z}_2(t)|$, $H_2 = |\ddot{\vec z}_2(t)|$ и угол $2\theta$ между векторами $\dot{\vec z}_1(t-a)$ и $\dot{\vec z}_1(t+a)$ не зависят от времени $t$. Подобно /33/ и /35/

$$G_2 = G_1\sin\theta, \quad H_2 = \lambda G_1\cos\theta. \qquad /42/$$

Сравнивая /33/, /35/, /41/ и /42/, находим

$$F_2 = F\sin\Delta\sin\Delta_1, \quad H_2 = \lambda^2 F\cos\Delta\cos\theta,$$
$$G_2 = \lambda F\sin\Delta\cos\Delta_1 = \lambda F\cos\Delta\sin\theta. \qquad /43/$$

Следовательно,

$$\sin\Delta\cos\Delta_1 = \cos\Delta\sin\theta. \qquad /44/$$

Далее, из /30/ и /31/ следует, что

$$а/ \quad \vec z(t) = \frac{1}{\lambda}\dot{\vec z}_1(t+a) + \vec z_1(t+a),$$
$$б/ \quad \vec z(t) = \frac{1}{\lambda}\dot{\vec z}_1(t-a) - \vec z_1(t-a). \qquad /45/$$

Равным образом

$$а/ \quad \vec z_1(t) = \frac{1}{\lambda}\vec z_2(t+a) + \vec z_2(t+a),$$
$$б/ \quad \vec z_1(t) = \frac{1}{\lambda}\vec z_2(t-a) - \vec z_2(t-a). \qquad /46/$$

Из этих формул следует, что при $F>0$, $\lambda>0$, $a>0$ модуль $H_2$ не равен нулю. Действительно, если $H_2=0$, то $\vec z_2(t)$ - линейная функция от времени $t$. В таком случае из уравнения /27/ /которому удовлетворяет функция $\vec z_2(t)$ / вытекает, что тождественно $\vec z_2(t)=0$, а значит, и $\vec z(t)=0$, что противоречит условию /29/ при $F>0$.

Равным образом отличны от нуля модули $G_2$, $F_2$, $G_1$, $F_1$, а, следовательно, углы $\Delta$, $\Delta_1$ и $\theta$ положительны и меньше чем $\pi/2$.

Рассмотрим теперь векторную функцию $\vec w(t)$, о которой, как и о $\vec z_2(t)$, известно, что она имеет непрерывную производную третьего порядка и что ее модуль и модули ее первой и второй производных постоянны, положительны и равны $f$, $g$, $h$ соответственно.

По условию имеем

$$\vec w\vec w = f^2, \quad \dot{\vec w}\dot{\vec w} = g^2, \quad \ddot{\vec w}\ddot{\vec w} = h^2,$$

$$\vec w\dot{\vec w} = 0, \quad \dot{\vec w}\ddot{\vec w} = 0, \quad \ddot{\vec w}\dddot{\vec w} = 0,$$

$$\vec w\ddot{\vec w} + g^2 = 0, \quad \dot{\vec w}\dddot{\vec w} + h^2 = 0,$$

$$\vec w\dddot{\vec w} = 0.$$



Отсюда следует, что векторы

$$\vec e_1 = \vec w, \quad \vec e_2 = \dot{\vec w}, \quad \vec e_3 = f^2\ddot{\vec w} + g^2\vec w, \quad \vec e_4 = g^2\dddot{\vec w} + h^2\dot{\vec w}$$

взаимно ортогональны. Скалярный квадрат вектора $\vec e_3$ не зависит от времени $t$, т.к.

$$\vec e_3\vec e_3 = f^2(f^2h^2 - g^4).$$

Следовательно /ввиду трехмерности пространства, т.е. трехкомпонентности вектора $w$ /, если $\vec e_3 \neq 0$, то $\vec e_4 = 0$. Однако $\vec e_4 = 0$ и в том случае, когда $\vec e_3 = 0$. Действительно, если $\vec e_3 = 0$, то $fh = g^2$ и $\vec e_4 = f^{-2}g^2\dot{\vec e}_3 = h^2g^{-2}\dot{\vec e}_3 = 0$. Таким образом, функция $\vec w(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^3\vec w}{dt^3} + \mu^2\frac{d\vec w}{dt} = 0, \quad \mu = \frac{h}{g},$$

а значит,

$$\vec w(t) = \vec w_0 + \dot{\vec w}_0\frac{\sin\mu t}{\mu} + \ddot{\vec w}_0\frac{1-\cos\mu t}{\mu^2},$$

где $\vec w_0$, $\dot{\vec w}_0$ и $\ddot{\vec w}_0$ - значения функции $\vec w(t)$ и ее первой и второй производных при $t=0$, удовлетворяющие условиям

$$\vec w_0\vec w_0 = f^2, \quad \dot{\vec w}_0\dot{\vec w}_0 = g^2, \quad \ddot{\vec w}_0\ddot{\vec w}_0 = h^2,$$

$$\vec w_0\dot{\vec w}_0 = 0, \quad \dot{\vec w}_0\ddot{\vec w}_0 = 0,$$

$$\vec w_0\ddot{\vec w}_0 + g^2 = 0.$$

Как нетрудно видеть, конец вектора $\vec w(t)$ находится в равномерном круговом движении с центром, лежащим в конце вектора $\vec q = \vec w(t) + \mu^{-2}\ddot{\vec w}(t) = \vec w_0 + \mu^{-2}\ddot{\vec w}_0$. Так как $h^2\vec q\vec q = f^{-2}\vec e_3\vec e_3$, то $\vec e_3 = 0$, если $\vec q = 0$, и $\vec q = 0$, если $\vec e_3 = 0$. В этом частном случае

$$\vec w(t) = \vec w_0\cos\mu t + \dot{\vec w}_0\frac{\sin\mu t}{\mu}.$$

Прилагая полученный результат к функции $\vec z_2(t)$, находим

$$\vec z_2(t) = \vec z_2(0) + \dot{\vec z}_2(0)\frac{\sin\omega t}{\omega} + \ddot{\vec z}_2(0)\frac{1-\cos\omega t}{\omega^2}, \qquad /47/$$

где

$$\omega = \frac{H_2}{G_2} .$$

Подставляя /47/ в /46/, видим, что согласно выражению а/ конец вектора $\vec{z}_1(t)$ описывает окружность с центром, лежащим в конце вектора $\vec{q}_2 = \vec{z}_2(0) + \omega^{-2}\ddot{\vec{z}}_2(0)$, а согласно выражению б/ - окружность с центром, лежащим в конце вектора - $\vec{q}_2$. Следовательно, $\vec{q}_2 = 0$, а значит,

$$\vec{z}_2(t) = \vec{z}_2(0)\cos\omega t + \dot{\vec{z}}_2(0)\frac{\sin\omega t}{\omega} , \qquad /48/$$

причем

$$\omega = \frac{H_2}{G_2} = \frac{G_2}{F_2} .$$

Подставляя в последнюю формулу модули /43/, находим

$$\theta = \Delta_1 = \Delta , \qquad /49/$$

причем

$$\omega = \lambda\frac{\cos\Delta}{\sin\Delta} . \qquad /50/$$

Теперь формулы /46/ принимают вид

а/ $$\vec{z}_1(t) = -\vec{z}_2(0)\frac{\sin(\omega t + \omega a - \Delta)}{\sin\Delta} + \dot{\vec{z}}_2(0)\frac{\cos(\omega t + \omega a - \Delta)}{\omega\sin\Delta} ,$$

б/ $$\vec{z}_1(t) = -\vec{z}_2(0)\frac{\sin(\omega t - \omega a + \Delta)}{\sin\Delta} + \dot{\vec{z}}_2(0)\frac{\cos(\omega t - \omega a + \Delta)}{\omega\sin\Delta} ,$$

откуда вытекает, что

$$\Delta = \omega a \qquad /51/$$

и что

$$\vec{z}_1(t) = -\vec{z}_2(0)\frac{\sin\omega t}{\sin\Delta} + \dot{\vec{z}}_2(0)\frac{\cos\omega t}{\omega\sin\Delta} . \qquad /52/$$



Подставляя /52/ в /45/, находим

$$\vec{z}(t) = -\frac{1}{\sin^2\Delta}\left[\vec{z}_2(0)\cos\omega t + \dot{\vec{z}}_2(0)\frac{\sin\omega t}{\omega}\right] . \qquad /53/$$

Итак,

$$\ddot{\vec{k}}(t) = \vec{z}(t) , \qquad /54/$$

причем

$$\omega = \frac{F}{mc}\frac{\cos^2\Delta}{\sin\Delta} . \qquad /55/$$

Согласно /51/ и /28/

$$\frac{F\xi}{mc^2} = \frac{\Delta\sin\Delta}{\cos^2\Delta} . \qquad /56/$$

Из /22/, /23/ и /56/ находим зависимость энергии $\epsilon$ от угла $\Delta$:

$$\frac{\epsilon}{m} = \frac{1}{\cos\Delta} + \frac{\Delta\sin\Delta}{\cos^2\Delta} . \qquad /57/$$

Далее, так как

$$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{c}{F}z_1(t), \qquad \dot{\vec{z}}(t) = -\frac{\omega}{\sin\Delta}\vec{z}_1(t),$$

то

$$\vec{p}(t) = \frac{mc}{F\cos\Delta}\vec{z}_1(t), \quad \vec{x}(t) = \vec{x}_{ц} - \frac{mc^2}{F^2}\mathrm{tg}^2\Delta\,\vec{z}(t),$$

где $\vec{x}_{ц}$ - постоянный вектор, указывающий центр окружности, по которой равномерно движется конец вектора $\vec{x}(t)$. Подставляя эти формулы в /8/ и /16/, получаем $\vec{x}_{ц} = 0$ и

$$\dot{\vec{k}}(t) = \frac{mc}{F\cos^2\Delta}\vec{z}_1(t) . \qquad /58/$$

Следовательно,

$$\vec{x}(t) = -\frac{mc^2}{F^2}\mathrm{tg}^2\Delta\,\ddot{\vec{k}}(t), \quad \vec{p}(t) = \cos\Delta\,\dot{\vec{k}}(t) . \qquad /59/$$

Располагая формулой /58/, нетрудно найти функцию /7/. Она равна

$$\vec{y}(\eta, t) = \frac{\sin\frac{\omega\eta}{c}}{\sin\Delta}\,\vec{x}(t). \qquad /60/$$

Таким образом, поверхность /1/ является геликоидом /2/, расположенным в трехмерной псевдоевклидовой гиперплоскости $E^3_{(1,2)}$, содержащей ось времени $t$ и начальные векторы $\vec{x}(0)$ и $\dot{\vec{x}}(0)$. Подставляя /60/ в /5/, находим, что

$$\ddot{\vec{k}}(t) + \omega^2\vec{k}(t) = 0. \qquad /61/$$

ЛИТЕРАТУРА


1. Шавохина Н.С. ДАН СССР, 1982, 265, № 1, с.852.
2. Норден А.П. Теория поверхностей. ГИТТЛ, М., 1956.



Рукопись поступила в издательский отдел
11 апреля 1983 года.




Шавохина Н.С.
Р2-83-231

О круговом релятивистском движении двух одинаковых тел


Предложенная автором система уравнений с отклоняющимся аргументом для двумерной минимальной поверхности в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве, описывающая релятивистское движение двух одинаковых тел, если они притягиваются друг к другу с постоянной по модулю силой, решена в случае постоянного отклонения аргумента. Полученное решение описывает равномерное круговое движение тел и задает в четырехмерном пространстве геликоид, целиком умещающийся в псевдоевклидовой гиперплоскости.



Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983


Shavokhina N.S.
P2-83-231

On Circular Relativistic Motion of Two Identical Bodies


A system found by the author of equations with a deviating argument for a two-dimensional minimal surface in the pseudo-Euclidean space which describes the relativistic motion of two identical bodies, if they attract with the force modulo constant, is solved in the case of a constant deviation of the argument. The solution derived defines the helicoid lying entirely in the pseudo-Euclidean hyperplane and describes a uniform circular motion of bodies.



The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой