

сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
Дубна

3313/83

27/6-83

P2-83-186

В.Г.Маханьков, О.К.Пашаев, С.А.Сергеенков

$U(p, q)$  нуш с нетривиальными  
граничными условиями

Скалярный случай  $U(0, 1)$

1983

## ВВЕДЕНИЕ

Среди нелинейных эволюционных уравнений, точно решаемых с помощью метода обратной задачи рассеяния /МОЗР/, особое место занимает нелинейное уравнение Шредингера /НУШ/. Это уравнение подробно исследовано в скалярном случае притяжения  $U(1,0)^{1/}$  и отталкивания  $U(0,1)^{2/}$ . Векторные варианты с компактной  $U(p,0)$  и некомпактной  $U(p,q)$  изогруппами при тривиальных граничных условиях были проинтегрированы в  $^{3/}$  и  $^{4/}$  соответственно. Однако специфика некомпактной группы  $U(p,q)$  /бесконечномерность унитарных представлений/ проявляется со всей полнотой лишь при нетривиальных граничных условиях  $^{5/}$ . Поэтому решение  $U(p,q)$  НУШ при нетривиальных граничных условиях является актуальной задачей.

В настоящей работе мы подробно рассмотрим скалярный случай  $U(0,1)$  НУШ, что необходимо по двум причинам. Во-первых, со времени выхода первой работы Захарова и Шабата  $^{2/}$  прошло 10 лет, и при всей своей красоте и глубине она содержит ряд неточностей и опечаток, а вывод бесконечной серии законов сохранения в ней вообще некорректен. Небольшое число работ, появившихся позже и посвященных той же теме, несмотря на ряд методических улучшений, также содержит отмеченную выше ошибку  $^{6/}$ . К тому же важный вопрос об устойчивости солитона /особенно в векторном случае/ не получил должного освещения, а он становится первоочередным в связи с исследованием солитонов в системах с некомпактной изогруппой  $^{7/}$ . Как известно  $^{8/}$ ,  $U(0,1)$  НУШ отталкивающегося типа калибровочно эквивалентно  $SU(1,1)/U(1)$  изотропному уравнению Ландау-Лифшица, в котором некомпактная группа реализована нелинейным образом.

Вторым мотивом, побудившим нас вернуться к этому уравнению, стала необходимость иметь формализм в виде, удобном для обобщения на векторный случай.

Последовательность изложения следующая. В разделе 1 рассматривается прямая задача рассеяния для ассоциированного  $2 \times 2$  оператора Дирака с нетривиальной асимптотикой потенциалов. Во втором разделе приводится вывод бесконечной серии интегралов движения. В разделе 3 построены уравнения обратной задачи рассеяния /уравнения Марченко/ и найдено односолитонное решение. Вопрос устойчивости полученного солитона относительно малых возмущений непрерывным фоном исследуется в разделе 4.

# 1. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим  $U(0;1)$  НУШ для комплексной функции  $q(x,t)$  на всей оси  $-\infty < x < +\infty$ :

$$iq_t + q_{xx} - 2|q|^2 q = 0. \quad /1.1/$$

На поле  $q$  будем накладывать константные граничные условия на бесконечности:

$$q(x,t) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} q_{\pm}. \quad /1.2/$$

Лишь в этом случае задача становится физически интересной. Действительно, как мы увидим далее, линейная задача, соответствующая системе /1.1/, принадлежит алгебре некомпактной группы  $SU(1,1)$ , унитарные представления которой соответствуют системам с бесконечным числом частиц /или, что то же самое, нетривиальным граничным условиям/.

В этом смысле постановка задачи /1.1/, /1.2/ является некорректной, и мы будем рассматривать "регуляризованную" задачу на всей оси  $-\infty < x < +\infty$ :

$$iq_t + q_{xx} - 2(|q|^2 - \rho)q = 0, \quad /1.3/$$

где плотность конденсата

$$\rho = |q_+|^2 = |q_-|^2. \quad /1.4/$$

Уравнение /1.3/ может быть представлено в виде условия "нулевой кривизны" /4/:

$$U_t - V_x + [U, V] = 0,$$

где

$$U(x,t;\lambda) = -i\lambda\sigma_3 + Q = \begin{pmatrix} -i\lambda & iq^* \\ -iq & i\lambda \end{pmatrix}, \quad /1.5/$$

$$V(x,t;\lambda) = \begin{pmatrix} 2i\lambda^2 + i(|q|^2 - \rho) & -2i\lambda q^* + q_x^* \\ 2i\lambda q + q_x & -2i\lambda^2 - i(|q|^2 - \rho) \end{pmatrix}.$$

При этом  $Sp U = 0 = Sp V$  и  $U, V \in su(1,1)$ . Для более полной аналогии с работой /2/ мы произвели в операторах  $U$  и  $V$  из работы /4/ для случая  $U(0,1)$  замену  $q \rightarrow qe^{i\pi} = -q$  /глобальный  $U(1)$ -поворот на угол  $\pi$ /. Линейная задача имеет стандартный вид:

$$2 \quad \phi_x = U\phi, \quad \phi_t = V\phi. \quad /1.6/$$

Рассмотрим спектральную задачу для оператора  $U$ . В компонентах столбца  $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$  она есть

$$\phi_{1x} + i\lambda\phi_1 = iq^*\phi_2, \quad /1.7/$$

$$\phi_{2x} - i\lambda\phi_2 = -iq\phi_1.$$

Из вида оператора  $U$  следует, что система /1.7/ самосопряжена и соответственно  $\lambda$  действительна. В самом деле, умножая уравнение

$$\phi_x - Q\phi = -i\lambda\sigma_3\phi \quad /1.8/$$

на  $i\sigma_3$ , получим, что

$$L\phi = [i\sigma_3 \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & q^* \\ q & 0 \end{pmatrix}]\phi = \lambda\phi, \quad /1.9/$$

где в левой части стоит самосопряженный оператор, собственные значения которого действительны.

Для системы /1.7/ введем в рассмотрение два набора решений Йоста, определяемых своими асимптотиками при  $x \rightarrow \pm\infty$ :

$$\begin{cases} \phi_1(x,\lambda) \longrightarrow X_{-1}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} q_-^* \\ \lambda - \zeta \end{pmatrix} e^{i\zeta x}, \\ \phi_2(x,\lambda) \longrightarrow X_{-2}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - \zeta \\ q_- \end{pmatrix} e^{i\zeta x}, \end{cases} \quad x \rightarrow -\infty,$$

$$\begin{cases} \psi_1(x,\lambda) \longrightarrow X_{+1}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} q_+^* \\ \lambda - \zeta \end{pmatrix} e^{-i\zeta x}, \\ \psi_2(x,\lambda) \longrightarrow X_{+2}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - \zeta \\ q_+ \end{pmatrix} e^{i\zeta x}, \end{cases} \quad x \rightarrow +\infty,$$

где  $\zeta(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \rho}$  - вещественная функция  $\lambda$ . Эти решения удобно объединить в матричные решения Йоста:

$$\Phi_- = (\phi_1, \phi_2) \quad \text{или} \quad (\Phi_-)_{ij} = \phi_j^{(i)},$$

$$\Phi_+ = (\psi_1, \psi_2) \quad \text{или} \quad (\Phi_+)_{ij} = \psi_j^{(i)}, \quad i, j = 1, 2. \quad /1.10/$$

с асимптотиками

$$\Phi_{\pm}(x, \lambda) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} X_{\pm}(x, \lambda),$$

в которых

$$X_{\pm}(x, \lambda) = X_{\pm}(\lambda) e^{i\Lambda x} = \begin{pmatrix} q_{\pm}^* & \lambda - \zeta \\ \lambda - \zeta & q_{\pm} \end{pmatrix} e^{-i\zeta \sigma_3 x}. \quad /1.11/$$

Существование решений Йоста и их аналитические свойства выводятся из линейной системы /1.7/ в интегральной форме при заданных асимптотиках:

$$\Phi_{\pm}(x, \lambda) = X_{\pm}(x, \lambda) + \int_{\pm\infty}^x dy X_{\pm}(x, \lambda) [X_{\pm}(y, \lambda)]^{-1} [Q(y) - Q_{\pm}] \Phi_{\pm}(y, \lambda). \quad /1.12/$$

Поскольку вронскианы, составленные из решений Йоста:

$$W(\phi_1, \phi_2) = W(\psi_1, \psi_2) = \det \Phi_{\pm}(\lambda) = \det X_{\pm}(\lambda) = 2\zeta(\lambda - \zeta). \quad /1.13/$$

отличны от нуля, то обе пары решений Йоста образуют фундаментальную систему. Линейная зависимость матричных решений Йоста определяется матрицей перехода S:

$$\Phi_{-}(x, \lambda) = \Phi_{+}(x, \lambda) S(\lambda). \quad /1.14/$$

Так как U, V - элементы алгебры su(1,1), то нормированные решения Йоста принадлежат группе SU(1,1), что сразу приводит к

$$\Phi_{-}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2^* \\ \phi_2 & \phi_1^* \end{pmatrix}. \quad /1.15/$$

Отсюда следует, что система /1.7/ обладает инволюцией: если

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  - решение системы /1.7/, то и  $\tilde{u} = \begin{pmatrix} u_2^* \\ u_1^* \end{pmatrix}$  есть ее решение.

Соотношение /1.14/ показывает, что  $S(\lambda) = \Phi_{+}^{-1} \Phi_{-}$  также принадлежит группе SU(1,1), имеет вид

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b^*(\lambda) \\ b(\lambda) & a^*(\lambda) \end{pmatrix} \quad /1.16/$$

и удовлетворяет условию псевдоунитарности:

$$\bar{S}S = \sigma_3 S^+ \sigma_3 S = I, \quad /1.17/$$

и унимодулярности:

$$\det S = |a|^2 - |b|^2 = 1. \quad /1.18/$$

Коэффициенты a(λ) и b(λ) можно выразить через вронскианы от решений Йоста:

$$a(\lambda) = \frac{W(\phi_1, \psi_2)}{W(\psi_1, \psi_2)}, \quad b(\lambda) = \frac{W(\psi_1, \phi_1)}{W(\psi_1, \psi_2)}. \quad /1.19/$$

Далее, следуя схеме Герджикова и Кулиша<sup>/66/</sup>, доопределим решения Йоста на случай комплексных значений λ и ζ.

Функция  $\zeta(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \rho}$  определена на двулистной римановой поверхности, листы которой соединяются по берегам разрезов:

$$(-\infty, -\sqrt{\rho}), (\sqrt{\rho}, +\infty).$$

Верхний лист римановой поверхности определен условиями  $\text{Im } \zeta > 0$ ,  $0 \leq \arg \lambda \leq 2\pi$  /соответственно нижний - как  $\text{Im } \zeta < 0$ /.

Считая, что потенциал  $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q^*(x) \\ q(x) & 0 \end{pmatrix}$  достаточно быстро стремится к своим асимптотикам, например, так, что

$$\int_{-\infty}^0 dx |x|^k |q(x) - q_{-}| + \int_0^{+\infty} dx |x|^k |q(x) - q_{+}| < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, n > 0,$$

и анализируя интегральные уравнения для решений Йоста, можно доказать, что функции  $\phi_1(x, \lambda, \zeta)$  и  $\psi_2(x, \lambda, \zeta)$  аналитичны в плоскости λ на верхнем листе ( $\text{Im } \zeta > 0$ ), а функции  $\phi_2(x, \lambda, \zeta)$  и  $\psi_1(x, \lambda, \zeta)$  - на нижнем листе ( $\text{Im } \zeta < 0$ ) римановой поверхности. На разрезах все четыре функции непрерывны и n-кратно дифференцируемы по λ. Кроме того, при больших |λ| функции Йоста имеют следующие асимптотики:

$$\begin{cases} \psi_1(x, \lambda, \zeta) \longrightarrow X_{+1}(x, \lambda, \zeta) [1 + O(1/|\lambda|)], \\ \phi_2(x, \lambda, \zeta) \longrightarrow X_{-2}(x, \lambda, \zeta) [1 + O(1/|\lambda|)], \end{cases} \quad \text{Im } \zeta > 0,$$

$$\begin{cases} \psi_2(x, \lambda, \zeta) \longrightarrow X_{+2}(x, \lambda, \zeta) [1 + O(1/|\lambda|)], \\ \phi_1(x, \lambda, \zeta) \longrightarrow X_{-1}(x, \lambda, \zeta) [1 + O(1/|\lambda|)], \end{cases} \quad \text{Im } \zeta < 0.$$

Таким образом, из /1.19/ следует, что  $a(\lambda, \zeta)$  аналитична в плоскости  $\lambda$  на верхнем листе и непрерывна на разрезах. Этим данным достаточно, чтобы построить резольвенту оператора  $L$ , который в силу /1.9/ есть

$$L = i\sigma_3 \partial_x + \tilde{Q}(x). \quad /1.20/$$

Нетрудно убедиться, что резольвента имеет вид

$$R_\lambda(x, y) = \frac{i}{2\zeta(\lambda - \zeta) a(\lambda, \zeta)} [\psi_2(x, \lambda) \phi_1^T(y, \lambda) \theta(x-y) + \phi_1(x, \lambda) \psi_2^T(y, \lambda) \theta(y-x)] \sigma_1, \quad /1.21/$$

причем

$$(L - \lambda) R_\lambda(x, y) = \delta(x-y).$$

Как известно, особенности резольвенты в плоскости  $\lambda$  определяют спектр оператора  $L$ .

Из самосопряженности оператора  $L$  следует, что дискретный спектр его сосредоточен в нулях функции  $a(\lambda, \zeta)$  на верхнем листе ( $\text{Im } \zeta > 0$ ) на отрезке  $(-\sqrt{\rho}, \sqrt{\rho})$ , а непрерывный является двукратно вырожденным и располагается на разрезах функции  $\zeta(\lambda)$ .

Из определения дискретного спектра следует существование линейной зависимости между решениями Йоста:

$$\phi_1(x, \lambda_n) = c_n \psi_2(x, \lambda_n), \quad a(\lambda_n, \zeta_n) = 0, \quad /1.22/$$

где  $c_n$  - нормировочные константы собственных функций  $\psi_2(x, \lambda_n)$ .

Таким образом, первая часть программы МОЗР выполнена: найден полный набор данных рассеяния для оператора  $L$  /1.20/ в виде  $\{a(\lambda, \zeta), b(\lambda, \zeta), c_n, \lambda_n; n = 1, 2, \dots, N\}$ . Теперь необходимо найти эволюцию этих данных во времени, для чего мы используем одно замечательное свойство скалярного НУШ. Легко видеть, что если эволюция во времени решений  $\Phi_\pm(t)$  определяется оператором  $V$  из /1.6/:

$$\Phi_{\pm t} = V \Phi_\pm, \quad /1.23/$$

то  $S_t = 0$  или

$$\Phi_-(t) = \Phi_+(t) S(\lambda, 0). \quad /1.24/$$

Для того чтобы перенести временную эволюцию потенциала  $q(t)$  на элементы  $S$ , необходимо зафиксировать асимптотики во времени. Пусть решение уравнения /1.23/ в асимптотической области

$$X_{\pm t} = V_\pm X_\pm, \quad \text{где } V_\pm = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} V, \quad /1.25/$$

имеет вид

$$X_\pm(t) = X_\pm(x, 0) T(t). \quad /1.26/$$

Введем новые решения Йоста:  $\tilde{\Phi}_\pm(t) = \Phi_\pm(t) T_\pm^{-1}(t)$ , асимптотики которых уже не зависят от времени:

$$\tilde{\Phi}_\pm(t) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} X_\pm(x, 0).$$

Тогда временную эволюцию  $S(\lambda, t)$  мы можем определить по формуле

$$\tilde{\Phi}_-(t) = \tilde{\Phi}_+(t) S(\lambda, t), \quad /1.27/$$

откуда, применяя /1.24/, получим

$$S(\lambda, t) = T_+(t) S(\lambda, 0) T_-^{-1}(t). \quad /1.28/$$

Используя тот факт, что  $V_\pm = -2\lambda U_\pm$ , где  $U_\pm = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} U$ , уравнение /1.25/ перепишем в виде

$$(X_\pm)_{t'} = U_\pm X_\pm, \quad \text{где } t' = -2\lambda t.$$

Это уравнение имеет вид первого из уравнений /1.6/ в асимптотической области, в котором  $x \rightarrow t'$ , что является атрибутом скалярного НУШ.

Отсюда сразу получаем

$$X_\pm(x, t) = X_\pm(x) e^{-i\zeta(\lambda)\sigma_3 t'}$$

или

$$T_+(t) = T_-(t) = e^{-i\zeta(\lambda)\sigma_3 t'} = e^{2i\lambda\zeta(\lambda)\sigma_3 t}.$$

Тем самым эволюция матрицы перехода  $S$  во времени определяется уравнением

$$S_t = 2i\lambda\zeta(\lambda) [\sigma_3, S],$$

а  $S$  имеет вид

$$S(\lambda, t) = e^{2i\lambda\zeta(\lambda)\sigma_3 t} S(\lambda, 0) e^{-2i\lambda\zeta(\lambda)\sigma_3 t}.$$

Для коэффициентов  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  получаем

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0),$$

$$b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) e^{-4i\lambda\zeta(\lambda)t}.$$

Таким образом,  $\lambda_n$  как нули функции  $a(\lambda, \zeta)$  не зависят от времени. Постоянство  $a(\lambda, \zeta)$  приводит к существованию бесконечного набора полиномиальных законов сохранения /см. раздел 2/. Если  $b(\lambda, \zeta)$  можно аналитически продолжить в окрестность точки  $\lambda_n$  /а мы будем рассматривать именно такой случай/, то

$$c_n = b(\lambda_n, \zeta_n).$$

Поэтому множитель  $c_n(\lambda_n, \zeta_n)$  также зависит от времени:

$$c_n(t) = c_n(0) e^{4\lambda_n \nu_n t},$$

где

$$\zeta_n = i \sqrt{\rho - \lambda_n^2} = i\nu_n.$$

## 2. ВЫВОД ЛОКАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Построим полиномиальные /локальные/ законы сохранения для модели  $U(0,1)$ НУШ.

Матричное решение Йоста  $\Phi_-(x, \lambda)$  для спектральной задачи /1.6/ имеет асимптотики:

$$\Phi_-(x, \lambda) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} X_-(x, \lambda),$$

/2.1/

$$\Phi_-(x, \lambda) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} X_+(x, \lambda) S(\lambda).$$

Перейдем к новым матричным функциям  $Y(x, \lambda)$ , связанным с решением  $\Phi_-(x, \lambda)$  соотношением

$$\Phi_-(x, \lambda) = X_+(x, \lambda) Y(x, \lambda) \quad /2.2/$$

и имеющим следующую асимптотику:

$$Y(x, \lambda) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} X_+^{-1}(x, \lambda) X_-(x, \lambda),$$

/2.3/

$$Y(x, \lambda) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} S(\lambda).$$

В силу /1.6/ новые матрицы  $Y(x, \lambda)$  удовлетворяют уравнению

$$Y_x(x, \lambda) = X_+^{-1}(x, \lambda) P_+(x) X_+(x, \lambda) Y(x, \lambda), \quad /2.4/$$

где

$$P_+(x) = Q(x) - Q_+ = \begin{pmatrix} 0 & ip_+^* \\ -ip_+ & 0 \end{pmatrix},$$

$$p_+(x) = q(x) - q_+.$$

Вычислим матрицу  $W(x, \lambda) = X_+^{-1}(x, \lambda) P_+(x) X_+(x, \lambda)$  в явном виде. Из определения решения Йоста  $X_+(x, \lambda)$  имеем

$$W(x, \lambda) = \frac{i}{2\zeta(\lambda - \zeta)} \begin{pmatrix} (\lambda - \zeta)(p_+ q_+^* + p_+^* q_+) \cdot e^{2i\zeta x} ((\lambda - \zeta)^2 p_+ + p_+^* q_+^2) \\ -e^{-2i\zeta x} ((\lambda - \zeta)^2 p_+^* + p_+ q_+^2), -(\lambda - \zeta)(p_+ q_+^* + p_+^* q_+) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, первый столбец системы /2.4/ теперь есть

$$-2i\zeta \begin{pmatrix} Y_{11x} \\ Y_{21x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha Y_{11} + \beta e^{2i\zeta x} Y_{21} \\ -\beta^* e^{-2i\zeta x} Y_{11} - \alpha Y_{21} \end{pmatrix}, \quad /2.5/$$

а

$$\alpha = p_+ q_+^* + p_+^* q_+,$$

$$\beta = \frac{1}{\lambda - \zeta} ((\lambda - \zeta)^2 p_+ + q_+^2 p_+^*).$$

После несложных преобразований систему /2.5/ можно привести к виду

$$2i\zeta \Phi_x(x, \lambda) = -(a + \beta f), \quad /2.6/$$

$$2i\zeta f_x - \beta f^2 - (2i\zeta)^2 f = 2\alpha f + \beta^*,$$

где

$$f(x, \lambda) = \frac{Y_{21}}{Y_{11}} e^{2i \zeta x}, \quad /2.7/$$

$$Y_{11}(x, \lambda) = Y_0 e^{\Phi(x, \lambda)}$$

Формула /2.7/ есть квазиклассическое выражение для первой компоненты матрицы  $Y$ . Введенная выше функция  $\Phi(x, \lambda)$  имеет в силу /2.3/ асимптотики:

$$\Phi(-\infty, \lambda) = 0, \quad /2.8/$$

$$\Phi(+\infty, \lambda) = \ln S_{11}(\lambda) + \ln Y_0(\lambda),$$

где  $Y_0(\lambda)$  - некоторая константа, определяемая нормировкой  $Y$  по формулам /2.3/.

Следовательно, производящая функция  $\Phi(x, \lambda)$  для полиномиальных законов сохранения следующим образом связана с  $\ln S_{11}(\lambda)$ :

$$\ln S_{11}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Phi_x(x, \lambda) + \ln Y_0(\lambda). \quad /2.9/$$

Искомые интегралы движения являются коэффициентами разложения  $\ln S_{11}(\lambda)$  в ряд по обратным степеням  $\lambda$ :

$$\ln S_{11}(\lambda) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{(2i\lambda)^n}. \quad /2.10/$$

Для определения  $I_n$  будем искать асимптотическое решение системы /2.6/ при больших  $\lambda$  в виде рядов:

$$f(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(x)}{(2i\lambda)^n}, \quad \ln Y_0(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{(2i\lambda)^n}, \quad /2.11/$$

$$\Phi_x(x, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{(2i\lambda)^n}.$$

Используя разложения для  $\zeta(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$ :

$$\zeta(\lambda) \approx i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(2i\lambda)^{2n-1}},$$

где

$$A_0 = -\frac{1}{2}, \quad A_1 = -\rho,$$

$$A_n = (-1)^n 2^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{n!} \rho^n, \quad n = 2, 3, \dots,$$

$$\beta(\lambda) = -i p_+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(2i\lambda)^{2n-1}} + \frac{q_+ p_+}{q_+^*} (2\lambda + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(2i\lambda)^{2n-1}}),$$

можно в принципе получить рекуррентные формулы для  $f_n(x)$  и  $\Phi_n(x)$ . Однако из-за их громоздкости мы их приводить не будем. А вместо этого выпишем несколько первых наиболее важных интегралов движения:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx (\rho - |q|^2) \approx N \quad (y_1 = 0),$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx (q_+^* - q_+) q_x + y_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx (-q^* q_x) \approx P,$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} dx [(q^* q)^2 - \rho^2 - (q^* - q_+^*) q_{xx}] \quad (y_3 = 0), \quad /2.12/$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} dx [(q^* - q_+^*) \left[ \frac{d}{dx} (q^* q^2 - q_{xx}) + 2q^* q q_x + q q_x q_+^* \right] - q_x q_+^* \rho] + y_4, \dots \quad (y_{2n-1} = 0).$$

Как видно, первые два интеграла движения соответствуют законам сохранения числа частиц и импульса. А вот третий интеграл  $I_3$  имеет не столь очевидный смысл: он не является гамильтонианом для системы /1.3/. Нетрудно убедиться, что правильный гамильтониан рассматриваемой модели имеет следующий вид:

$$H = I_3 + 2\rho I_1. \quad /2.13/$$

Как показано в работе /9/, все эти интегралы находятся в инволюции /для произвольных групп  $U(p, q)$  /.

### 3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

При выбранных для потенциала  $Q(x)$  условиях существуют треугольные представления для решений Йоста. Для функции  $\psi_1(x, \lambda)$ ,

например, оно имеет вид

$$\psi_1(x, \lambda) = X_{+1}(x, \lambda) - \int_x^\infty ds K(x, s) X_{+1}(s, \lambda). \quad /3.1/$$

Подставив это представление в систему /1.6/, для ядра  $K(x, y)$  получим дифференциальное уравнение

$$\sigma_3 K_x(x, y) + K_y(x, y) \sigma_3 = i \tilde{Q}(x) K(x, y) - i K(x, y) \tilde{Q}_+ \quad /3.2/$$

с граничными условиями:

$$[\sigma_3, K(x, x)] = i \tilde{P}(x), \quad \tilde{P}(x) \equiv \tilde{Q} - \tilde{Q}_+, \quad /3.3/$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} K(x, y) = 0. \quad /3.4/$$

Из /3.3/ следует связь решений задачи /1.3/ с элементами ядра  $K(x, y)$ :

$$q(x, t) = q + 2i K_{21}(x, x; t) = q + 2i K_{12}^*(x, x; t). \quad /3.5/$$

Кроме того, из уравнений /3.2/ следуют свойства симметрии для ядра  $K(x, y)$ :

$$K_{12}(x, y) = K_{21}^*(x, y), \quad K_{11}(x, y) = K_{22}^*(x, y).$$

Таким образом, чтобы найти решение исходной задачи /1.3/, необходимо определить явный вид матричных элементов ядра  $K(x, y; t)$ , которые в свою очередь удовлетворяют системе интегральных уравнений обратной задачи рассеяния /уравнения Марченко/, к выводу которых мы и приступаем.

Из определения  $S$ -матрицы /1.14/ следует соотношение

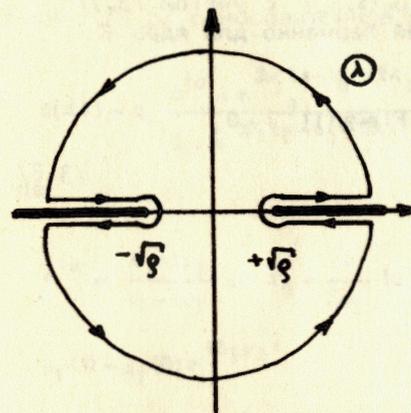
$$\phi_1 = a\psi_1 + b\psi_2.$$

Перепишем его в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\zeta} \left( \frac{1}{a} \phi_1(x, \lambda) - X_{+1}(x, \lambda) \right) e^{i\zeta y} = \\ = \frac{1}{2\pi\zeta} (\psi_1(x, \lambda) - X_{+1}(x, \lambda) + r\psi_2(x, \lambda)) e^{i\zeta y}, \end{aligned} \quad /3.6/$$

где

$$r(\lambda) \equiv \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}.$$



Контур интегрирования в плоскости  $\lambda$ .

Левая часть этого соотношения аналитична на верхнем листе ( $\text{Im } \zeta > 0$ ) при  $y > x$ , за исключением точек  $\lambda_n$ , в которых она имеет простые полюсы. При  $|\lambda| \rightarrow \infty$  левая часть /3.6/ имеет асимптотику  $e^{-i\text{Im } \zeta (y-x)} (1 + O(1/|\lambda|))$ . Проинтегрируем соотношение /3.6/ по контуру, изображенному на рисунке.

При интегрировании левой части контур можно замкнуть через бесконечность, так что соответствующий интеграл будет равен сумме вычетов в точках  $\lambda_n$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\lambda}{\zeta} e^{i\zeta y} \left[ \frac{1}{a(\lambda)} \phi_1(x, \lambda) - X_{+1}(x, \lambda) \right] = \\ = \sum_n \frac{c_n \psi_2(x, \lambda_n)}{\nu_n a'(\lambda_n, i\nu_n)} e^{-\nu_n y}. \end{aligned} \quad /3.7/$$

Интеграл от правой части /3.6/ берется по верхним берегам разрезов и приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\lambda}{\zeta} e^{i\zeta y} [\psi_1(x, \lambda) - X_{+1}(x, \lambda) + r(\lambda, \zeta) \psi_2(x, \lambda)] + K(x, y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} F_1^{(1)}(x+y) + iF_2^{(1)'}(x+y) \\ q_+ F_2^{(1)}(x+y) \end{pmatrix} - \int_x^\infty ds K(x, s) \begin{pmatrix} F_1^{(1)}(s+y) + iF_2^{(1)'}(s+y) \\ q_+ F_2^{(1)}(s+y) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$F_1^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi r_1(\xi) e^{i\xi z},$$

$$F_2^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi r_2(\xi) e^{i\xi z},$$

$$r_1(\xi) = \frac{1}{2} [r(\lambda, \xi) + r(-\lambda, \xi)],$$

$$r_2(\xi) = \frac{1}{2\lambda} [r(\lambda, \xi) - r(-\lambda, \xi)], \quad \xi = \text{Re } \zeta.$$

Из треугольного представления для  $\psi_2(x, \lambda_n)$  с учетом /3.7/ получим систему интегральных уравнений Марченко для ядра К:

$$K(x, y; t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + F(x+y; t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \int_x^\infty ds K(x, s; t) F(s+y; t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \\ F(x+y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x+y + iF_2'(x+y)) \\ q_+ F_2(x+y) \end{pmatrix}, \quad /3.8/$$

где

$$F_1(z) = F_1^{(1)}(z) + F_1^{(2)}(z),$$

$$F_2(z) = F_2^{(1)}(z) + F_2^{(2)}(z), \quad /3.8a/$$

$$F_1^{(2)}(z) = -\sum_n \mu_n \lambda_n e^{-\nu_n z},$$

$$F_2^{(2)}(z) = -\sum_n \mu_n e^{-\nu_n z}, \quad \mu_n(t) = \frac{c_n(t)}{\nu_n a'(\lambda_n, i\nu_n)}.$$

Система уравнений /3.8/ легко решается в частном случае безотражательных потенциалов, когда  $b(\lambda) \equiv 0$ . При этом  $F_{1,2}^{(1)}(z) \equiv 0$  и система /3.8/ вырождается в систему  $2N$  /где  $N$  - число собственных значений  $\lambda_n$  / алгебраических уравнений.

В этом случае будем искать решение уравнений /3.8/ в виде

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^N K_n(x) X_{+2}^+(y, \lambda_n), \quad /3.9/$$

где

$$K_n(x) = \begin{pmatrix} K_n^{(1)}(x) \\ K_n^{(2)}(x) \end{pmatrix}.$$

В частности, при  $N=1$  имеем

$$K(x, y) = \frac{q_+ \mu_1 e^{-\nu_1(x+y)}}{\rho(1 + \frac{\mu_1}{\nu_1} q_+ e^{-2\nu_1 x})} \begin{pmatrix} \rho & q_+^*(\lambda_1 - i\nu_1) \\ q_+(\lambda_1 + i\nu_1) & \rho \end{pmatrix}. \quad /3.10/$$

В силу /3.5/ односолитонное решение уравнения /1.3/ имеет вид

$$q(x, t) = q_+ \frac{e^{ia} + e^{2\nu_1(x-x_0 - 2\lambda_1 t)}}{1 + e^{2\nu_1(x-x_0 - 2\lambda_1 t)}}, \quad /3.11/$$

где

$$e^{ia} = \frac{\lambda_1 + i\nu_1}{\lambda_1 - i\nu_1}, \quad x_0 = \frac{1}{2\nu_1} \ln \frac{\mu_1(0)}{\nu_1} q_+^*,$$

$$\mu_1(t) = \mu_1(0) e^{4\lambda_1 \nu_1 t}.$$

Рассмотрим его асимптотики по  $x$ . При  $x \rightarrow \infty$

$$q(x, t) \rightarrow q_+,$$

при  $x \rightarrow -\infty$

$$q(x, t) \rightarrow q_+ e^{ia}.$$

Таким образом  $q_- = q_+ e^{ia}$ , что находится в согласии с условием для констант  $q_\pm$ , введенным ранее, а именно:

$$|q_+|^2 = |q_-|^2 = \rho.$$

Зная явный вид "односолитонного" ядра  $K(x, y)$  /3.10/, можно /с помощью треугольного представления /3.11/ вычислить "односолитонные" функции Йоста  $\psi_1(x, \lambda)$  и  $\psi_2(x, \lambda)$ , которые являются точными решениями прямой задачи рассеяния /2.3/ на "односолитонном" потенциале  $q(x)$ . Простые выкладки дают, например, для непрерывного спектра

$$\psi_1(x, \lambda) = \left[ 1 - \frac{1}{\nu_1 - i\xi} K(x, x) \right] X_{+1}(x, \lambda). \quad /3.12/$$

В силу инволюции

$$\psi_2(x, \lambda) = \bar{\psi}_1(x, \lambda).$$

Аналогичные выражения можно получить и для дискретного спектра задачи /2.3/. Заметим, что решения типа /3.12/ могут быть использованы для "интегрирования" других НЭУ, связанных с  $U(0,1)$  НУШ калибровочным преобразованием /8/.

#### 4. УСТОЙЧИВОСТЬ СОЛИТОНА

В этом разделе мы изучим один из наиболее важных вопросов теории солитонов - вопрос об устойчивости солитонного решения при его малом возмущении непрерывным спектром. Для простоты далее рассматривается лишь односолитонное решение /3.11/ в предположении малой величины коэффициента отражения. Это условие дает возможность учесть влияние слабого непрерывного спектра по теории возмущений. Перепишем уравнения Марченко в следующем виде:

$$K(x, y; t) + F_d(x+y; t) + F_c(x+y; t) - \int_x^{\infty} ds K(x, s; t) [F_d(s+y; t) + F_c(s+y; t)] = 0, \quad /4.1/$$

где

$$F(x+y; t) = F_d(x+y; t) + F_c(x+y; t),$$

а функции  $F_d$  и  $F_c$  связаны с величинами  $F_{1,2}^{(1,2)}(z)$ . Оценим поправку слабого возмущения к чисто солитонному решению /3.11/ при  $t \rightarrow +\infty$ . Для этого положим

$$K(x, y; t) = K(x, t) X_{+2}^+(y, \lambda) + \delta K(x, y; t), \quad /4.2/$$

где

$$|\delta K| \ll 1.$$

Тогда для  $\delta K(x, y; t)$  из /4.1/ имеем уравнение

$$\delta K(x, y; t) - \int_x^{\infty} ds \delta K(x, s; t) F_d(s+y; t) = \delta G(x, y; t), \quad /4.3/$$

где

$$\delta G(x, y; t) = -F_c(x+y; t) + K(x, t) \int_x^{\infty} ds X_{+2}^+(s, \lambda) F_c(s+y; t),$$

при выводе /4.3/ мы пренебрегли членом  $\delta K \cdot F_c$ , который в силу малости  $\delta K$  и  $F_c$  /см. /4.2// является членом второго порядка малости по сравнению с  $\delta K$ . Оценим правую часть соотношения /4.3/. Для этого необходимо предварительно оценить вклад от чисто непрерывного спектра, то есть интеграл  $F_c$ . В силу /3.7а/  $F_c(z, t)$  имеет вид

$$F_c(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi g(z, \xi) e^{i t f(\xi)}, \quad /4.4/$$

где

$$f(\xi) = 4\lambda\xi, \quad g(z, \xi) = \frac{b(\lambda, \xi)}{\lambda a(\lambda, \xi)} e^{i \xi z}.$$

Будем оценивать интеграл /4.4/ по методу стационарной фазы. Нетрудно убедиться в том, что уравнение

$$\frac{df}{d\xi} = 0 \quad /4.5/$$

не имеет вещественных корней. Это означает, что фазовая функция  $f(\xi)$  не имеет стационарных точек. Как известно, лидирующий член асимптотики интеграла /4.4/ при  $t \rightarrow +\infty$  в этом случае имеет вид

$$F_c(z, t) \sim \frac{g(z, \infty)}{it} e^{i t f(\infty)} + O(1/t^2). \quad /4.6/$$

Чтобы оценить величину  $g(z, \xi)$  при больших  $\xi$ , вспомним определение коэффициентов  $a(\lambda, \xi)$  и  $b(\lambda, \xi)$  с помощью вронскианов из решений Йоста.

При больших  $\xi$  имеем

$$r(\lambda, \xi) = \frac{b(\lambda, \xi)}{a(\lambda, \xi)} = \frac{(\lambda - \vartheta(q_+^* - q^*))}{q_+ q_+^* - (\lambda - \xi)^2} e^{-2i \xi x},$$

то есть при  $\xi \rightarrow \infty$

$$|r(\lambda, \xi)| \sim \frac{1}{\xi},$$

что согласуется с условием малости возмущения  $|r(\lambda, \xi)| \ll 1$ . Таким образом, для  $|F_c(z, t)|$  при  $t \rightarrow +\infty$  имеем оценку

$$|F_c(z, t)| \leq \frac{c_1}{t}. \quad /4.7/$$

Соответственно для  $|\delta G(x, y; t)|$  получим

$$|\delta G(x, y; t)| \leq \frac{c_1}{t} \left(1 + \frac{|K(x)|}{2\nu_1}\right) \leq \frac{c_2}{t}.$$

Ищем решение уравнения /4.3/ в виде

$$\delta K(x, y; t) = \delta K(x, t) X_{+2}^+(y, \lambda) + \delta G(x, y; t). \quad /4.8/$$

Подстановка /4.8/ в /4.3/ дает

$$\begin{aligned} \delta K(x,t) X_{+2}^+(y,\lambda) - \delta K(x,t) \int_x^\infty ds X_{+2}^+(s,\lambda) F_d(s,y;t) = \\ = \int_x^\infty ds \delta G(x,s;t) F_d(s,y;t). \end{aligned}$$

Используя явный вид односолитонной спектральной функции  $F_d(x+y;t)$ , получим следующее уравнение для функции  $\delta K$ :

$$\left(q_+^* + \rho \frac{\mu(t)}{\nu} e^{-2\nu x} e^{-\nu y}\right) \delta K(x,t) = \int_x^\infty ds \delta G(x,s;t) F_d(s+y;t),$$

из которого нетрудно получить оценку для ядра  $\delta K(x,t)$  при  $t \rightarrow +\infty$ :

$$|\delta K(x,t)| \leq \frac{c}{t}. \quad /4.9/$$

Таким образом, слабозмущенное односолитонное решение /4.2/ действительно асимптотически стремится к чисто солитонному, что означает устойчивость последнего относительно малых возмущений непрерывным фоном.

Аналогичным образом можно рассмотреть асимптотическое поведение односолитонного решения при  $t \rightarrow -\infty$  и показать, что все полученные выше результаты относительно его устойчивости остаются в силе.

Интересно отметить, что наличие "среды" /постоянной плотности  $\rho$  / приводит к более быстрому /по сравнению со случаем тривиальных граничных условий/ освобождению возмущенного солитона от слабонепрерывного фона.

Предельный переход к случаю  $\rho \rightarrow 0$  осуществляется следующим образом. Стационарные точки в уравнении /4.5/ лежат в комплексной плоскости, и их мнимая часть пропорциональна  $\rho$ .

При  $\rho \rightarrow 0$  эти точки /симметричные относительно действительной оси/ попадают в область интегрирования, а оценка интеграла в их окрестности спадает как  $t^{-1/2}$ .

В заключение авторы хотели бы выразить свою признательность В.Герджикову за многочисленные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е., Шабат А.Б. ЖЭТФ, 1971, 61, с.118.
2. Захаров В.Е., Шабат А.Б. ЖЭТФ, 1973, 64, с.1627.
3. Манаков С.В. ЖЭТФ, 1973, 65, с.505.
4. а/ Makhankov V.G., Pashaev O.K. JINR, E2-81-264, E2-81-540, Dubna, 1981; б/ Маханьков В.Г., Пашаев О.К. ТМФ, 1982, 53, с.55.

5. Makhankov V.G. Phys.Lett., 1981, 81A, p.156.
6. а/ Kawata T., Inoue H. J.Phys.Soc.Japan, 1978, vol.44, p.1722; б/ Герджиков В.С., Кулиш П.П. Болг.Физ.ж., 1978, 4, с.337.
7. Barashenkov I.V., Makhankov V.G., Pashaev O.K. JINR, E2-82-677, Dubna, 1982.
8. Makhankov V.G., Pashaev O.K. Phys.Lett., 1983, 95A, p.116.
9. Pashaev O.K., Sergeenkov S.A. JINR, E2-82-601, Dubna, 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел  
24 марта 1983 года.

### НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

ДЗ-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
Д1,2-12036	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12450	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д4-80-271	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-385	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
ДЗ,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:  
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79  
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Маханьков В.Г. и др. P2-83-186  
U(p,q) НУШ с нетривиальными граничными условиями.  
Скалярный случай U(0,1)

Исследуется нелинейное уравнение Шредингера /НУШ/ с некомпактной изогруппой U(p,q) при нетривиальных граничных условиях. Подробно рассмотрен метод обратной задачи рассеяния для U(0,1) НУШ в форме, удобной для обобщения на векторный случай. Приводится корректный вывод бесконечной серии локальных законов сохранения. Рассмотрен вопрос об устойчивости солитона относительно малых возмущений непрерывным спектром.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Makhankov V.G. et al. P2-83-186  
Nonlinear Schroedinger Equation with  
Nonvanishing Boundary Conditions.  
1. U(0,1) Scalar Case

This is the first of a number of papers dealing with the study of the nonlinear Schroedinger equation (NLSE) with U(p,q) noncompact isogroup under nonvanishing boundary conditions. The conventional form of the inverse scattering method for U(0,1)NLSE scalar is considered in detail. The correct generation procedure for the infinite sets of the local involute conservation laws is given. The soliton stability under small continuous perturbations is proved as well.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой.