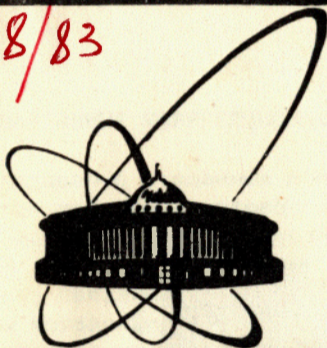


83-169

2888/83



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

6/6-83

P2-83-169

А.В.Радюшкин

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ  
ПАРТОННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ  
И МУЛЬТИПАРТОННЫХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

Направлено в журнал  
"Physics Letters B"

1983

## 1. ПАРТОННЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Исследование степенных поправок /высших твистов/ в глубоко-неупругом рассеянии потребовало ввести в рассмотрение  $k$ -частичные партонные корреляционные функции  $F(x_1, \dots, x_k)^{1-3/4}$ , являющиеся /при  $k \geq 3$ / непосредственным обобщением функций распределения партонов, связанных с составными операторами низшего твиста. Моменты корреляционных функций пропорциональны матричным элементам составных операторов, содержащих более двух фундаментальных полей:

$$\int_{-1}^1 F(x_1, \dots, x_k) x_1^{N_1} \dots x_k^{N_k} dx_1 \dots dx_k = \langle P | [(\frac{n\partial}{nP})^{N_1} \phi_1] \dots [(\frac{n\partial}{nP})^{N_k} \phi_k] | P \rangle, \quad /1/$$

где  $n$  - произвольный светоподобный вектор, позволяющий выделить бесследовую компоненту оператора, а  $|P\rangle$  - адронное состояние с импульсом  $|P\rangle$ . Соответствующие поля схематически обозначены символом  $\phi_i$ . В зависимости от знака параметра  $x_j$  рассматриваемый партон сопоставляется начальному или конечному состояниям. Например, к начальному состоянию необходимо отнести кварки, глюоны и антикварки с  $x_j > 0$ . В соответствии с этим функция  $F(x_1, \dots, x_k)$  распадается на сумму функций  $F^{(\ell, k-\ell)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_\ell};$

$x_{i_{\ell+1}}, \dots, x_{i_k}$ ), описывающих ситуацию, когда в начальном состоянии имеется  $\ell$  партонов, а в конечном -  $(k-\ell)$ . Подобная партонная интерпретация, очевидно, имеет смысл лишь в том случае, если

$$\sum_{i=1}^k x_i = 0 \quad /2/$$

/сохранение энергии-импульса/ и, кроме того,

$$|\sum_{m=1}^{\ell} x_{i_m}| \leq 1 \quad /3/$$

для любой совокупности  $(i_1, \dots, i_\ell)$ . Другими словами, полный продольный импульс, переносимый партонами /скажем, в системе бесконечного импульса/, не должен превышать импульса адрона.

Как это ни удивительно, общее доказательство неравенства /3/ на основе лишь информации, имеющейся в определении /1/, представляет собой нетривиальную задачу. В этом смогли убедиться, например, авторы работы /3/, которым для 3-частичной корреляционной функции удалось получить лишь более слабое неравенство  $|x_1|, |x_2|, |x_1 + x_2| \leq 2$ .

## 2. МУЛЬТИПАРТОННЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ

При анализе жестких эксклюзивных процессов информация о динамике на больших расстояниях аккумулируется в партонных волновых функциях, которые, по аналогии с /1/, могут быть связаны с матричными элементами локальных операторов в обкладках  $\langle 0 | \dots | P \rangle$ :

$$\int_0^1 \phi(x_1, \dots, x_k) x_1^{N_1} \dots x_k^{N_k} dx_1 \dots dx_k = \langle 0 | [(\frac{n\partial}{nP})^{N_1} \phi_1] \dots [(\frac{n\partial}{nP})^{N_k} \phi_k] | P \rangle. \quad /4/$$

Функция  $\phi(x_1, \dots, x_k)$  имеет при этом смысл амплитуды вероятности найти /в системе бесконечного импульса/ исходный адрон в состоянии, в котором партоны  $\phi_1, \dots, \phi_k$  переносят фракции  $x_1, \dots, x_k$  его продольного импульса. Эта интерпретация осмысленна только в том случае, если  $0 \leq x_i \leq 1$  для всех  $x_i$  и, кроме того,

$$\sum_{j=1}^k x_j = 1. \quad /5/$$

## 3. АЛЬФА-ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Для доказательства того, что условия /3/, /5/ действительно выполняются, мы воспользуемся известным  $\alpha$ -представлением фейнмановских амплитуд /см., например, /4-7//, основанным на следующей простой параметризации для пропагатора:

$$(p^2 - m^2)^{-1} = \int_0^\infty d\alpha \exp[\alpha(p^2 - m^2)]. \quad /6/$$

/предполагается, что произведен виковский поворот, так что  $p^2 \neq 0$ /. После выполнения гауссовских интеграций по виртуальным импульсам  $p$  вклад любой фейнмановской диаграммы представляет собой интеграл по  $\alpha_\sigma$ -параметрам линий  $\sigma$  рассматриваемого графа. В частности, матричный элемент /1/ имеет следующий вид:

$$\langle P | [(\frac{n\partial}{nP})^{N_1} \phi_1] \dots [(\frac{n\partial}{nP})^{N_k} \phi_k] | P \rangle = \quad /7/$$

$$= \sum_{\text{диагр.0}} \int \prod d\alpha_\sigma [ \prod_{j=1}^k \frac{B_j^+(\alpha) - B_j^-(\alpha)}{D(\alpha)} ] \Phi(\alpha),$$

где

$$B_j^+(\alpha) = \sum_{\ell \neq j} b_{j\ell}(\alpha), \quad /8a/$$

$$B_j^-(\alpha) = \sum_{\ell \neq j} b_{\ell j}(\alpha), \quad /8b/$$

а  $b_{j\ell}(\alpha)$ ,  $D(\alpha)$  — неотрицательные функции  $\alpha$ -параметров, определенные ниже и подчиняющиеся равенству

$$D(\alpha) = \sum_{j=1}^k \sum_{\ell < j} b_{j\ell}(\alpha) + C(\alpha), \quad /9/$$

где  $C(\alpha)$  — также неотрицательная функция  $\alpha$ . Используя /1/ и /7/, можно получить  $\alpha$ -представление для  $F(x_1, \dots, x_k)$ :

$$F(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\text{диагр.0}} \int \prod d\alpha_\sigma [ \prod_{i=1}^k \delta(x_i - \frac{B_i^+(\alpha) - B_i^-(\alpha)}{D(\alpha)}) ] \Phi(\alpha). \quad /10/$$

из которого /с учетом /8/, /10// следуют равенства /2/, /3/. Аналогично альфа-представление для мультипартонных волновых функций имеет вид

$$\phi(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\text{диагр.0}} \int \prod d\alpha_\sigma [ \prod_{j=1}^k \phi(x_j - \frac{B_j(\alpha)}{D(\alpha)}) ] \Psi(\alpha), \quad /11/$$

где  $B_j(\alpha)$ ,  $D(\alpha)$  — неотрицательные функции  $\alpha$ -параметров, удовлетворяющие равенству

$$D(\alpha) = \sum_{j=1}^k B_j(\alpha), \quad /12/$$

из которого следует /5/.

## 4. АЛЬФА-ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ТОПОЛОГИЯ ДИАГРАММ

Функции  $B_j^\pm(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$ ,  $D(\alpha)$  простым образом связаны с топологией соответствующей диаграммы. Напомним, что  $k$ -дерево графа  $G$

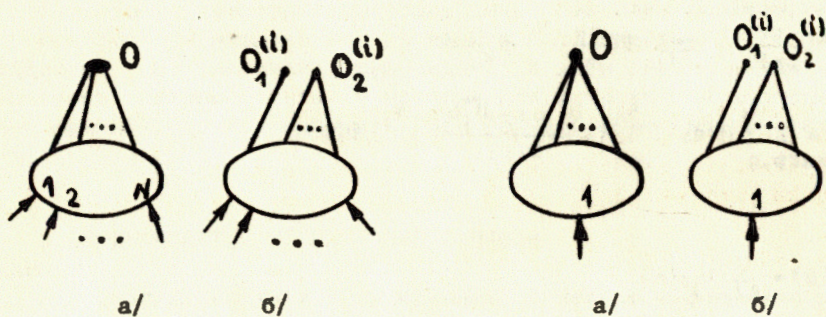


Рис.1

называется такой его подграф, который содержит все вершины исходного графа  $G$  и состоит из  $k$  связанных компонент, каждая из которых не имеет замкнутых циклов.  $k$ -дерево  $G_\ell^{(k)}$  однозначно определяется набором линий  $\sigma$ , которые нужно удалить из исходного графа  $G$ , чтобы получить  $G_\ell^{(k)}$ . Произведение параметров  $\alpha_\sigma$ , соответствующих этим линиям  $\sigma$ , будем называть  $(\alpha)$ - $k$ -деревом. 1-дерево есть просто дерево. Детерминант графа  $D(\alpha)$  есть сумма всех его  $(\alpha)$ -1-деревьев. Обозначим через  $V(i_1, \dots, i_m | j_1, \dots, j_n)$  сумму всех таких его  $(\alpha)$ -2-деревьев, для которых вершины  $i_1, \dots, i_m$  лежат в одной компоненте,  $j_1, \dots, j_n$  - в другой, а пронумерованные вершины могут находиться в любой из компонент. Наличие производной  $(\partial/\partial)\phi_i$  в вершине 0 /рис.1а/ приводит в  $\alpha$ -представлении к появлению дополнительного множителя  $R_i(\alpha)^*$ , для построения которого удобно ввести вспомогательную диаграмму, отличающуюся от исходной тем, что линия, соответствующая полю  $\phi_i$ , отщепляется от вершины 0 /рис.1б/:  $0 \rightarrow O_1^{(i)}, O_2^{(i)}$ . Тогда /10,11/:

\* Строго говоря, это справедливо только для скалярных диаграмм. Для КХД-диаграмм появляются дополнительные вклады, связанные с числителями кварковых пропагаторов и производными в трехглюонных вершинах. Однако фейнмановский интеграл по виртуальным импульсам, сопоставляемый некоторой КХД-диаграмме, всегда можно представить в виде суммы скалярных фейнмановских интегралов. Для этого необходимо после вычисления соответствующего шпура разложить возникшие при этом в числителе скалярные произведения импульсов по структурам, имеющимся в знаменателе, отбрасывая, кроме того, величины, нечетные по рассматриваемому импульсу интегрирования. Эта процедура на самом деле является первым шагом в наиболее эффективных современных методах вычисления фейнмановских интегралов в КХД /12,13/.

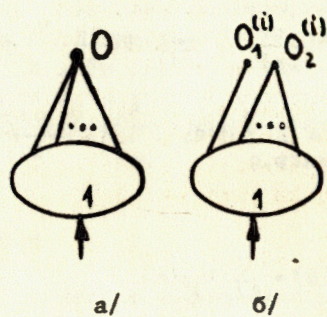


Рис.2

$$R_i(\alpha) = \frac{1}{D(\alpha)} \sum_{j=1}^N V(O_1^{(i)}, j | O_2^{(i)})(np_j), \quad /13/$$

где  $j$  - вершина, в которую входит внешний импульс  $p_j$  ( $j=1, \dots, N$ ). Нетрудно сообразить, что  $(\alpha)$ -2-деревья, входящие в  $V(O_1^{(i)}, j | O_2^{(i)})$  графа 1б, являются одновременно  $(\alpha)$ -деревьями графа 1а. Для нас представляют интерес только два простейших случая:  $N=1$  и  $N=2$ .

а/  $N=1, p_1 = P$  /рис.2а/. В этом случае

$$\frac{1}{(nP)} R_i(\alpha) = \frac{1}{D(\alpha)} V(O_1^{(i)}, 1 | O_2^{(i)}) \equiv \frac{V_i(\alpha)}{D(\alpha)}. \quad /14/$$

Рассмотрим произвольное дерево графа 2а. Вершины 0 и 1 связаны в нем некоторой непрерывной цепью линий, причем единственной /в противном случае мы имели бы дело с петлевым подграфом, а не с деревом/. Если выходящая из вершины 0 линия этой цепи сопоставляется полю  $\phi_i$ , то соответствующее  $(\alpha)$ -дерево совпадает с одним из вкладов в  $V_i(\alpha)$ . Верно и обратное утверждение: слияние вершин  $O_1^{(i)}, O_2^{(i)}$  графа 2б в одну превращает две древесных компоненты 2-дерева, дающего вклад в  $V_i(\alpha)$ , в дерево графа 2а, дающее вклад в  $D(\alpha)$ . В результате мы приходим к равенству /12/.

б/  $N=2, p_1 = P, p_2 = -P$  /рис.3а/. В такой конфигурации

$$\frac{1}{(nP)} R_i(\alpha) = \frac{1}{D(\alpha)} [V(O_1^{(i)}, 1 | O_2^{(i)}) - V(O_1^{(i)}, 2 | O_2^{(i)})]. \quad /15/$$

Заметим, что согласно определению величин  $V(\dots|\dots)$  можно записать

$$V(O_1^{(i)}, 1 | O_2^{(i)}) = V(O_1^{(i)}, 1 | O_2^{(i)}, 2) + V(O_1^{(i)}, 1, 2 | O_2^{(i)}) \equiv V_i^+(\alpha) + C_i(\alpha), \quad /16а/$$

$$V(O_1^{(i)}, 1 | O_2^{(i)}) = V(O_1^{(i)}, 2 | O_2^{(i)}, 1) + V(O_1^{(i)}, 1, 2 | O_2^{(i)}) \equiv V_i^-(\alpha) + C_i(\alpha). \quad /16б/$$

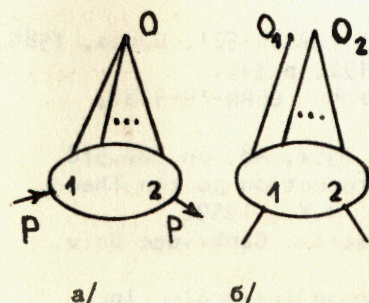


Рис.3

Следовательно, 2-деревья, содержащие вершины 1, 2 в одной из компонент, дают нулевой вклад в  $R_i(\alpha)$ . Они, однако, дают ненулевой вклад  $C(\alpha) = \sum C_i(\alpha)$  в  $D(\alpha)$ . Рассмотрим теперь некоторое 2-дерево диаграммы 3б, дающее вклад в  $V_i^+(\alpha)$ . Благодаря отсутствию в нем петель, среди линий, выходящих из вершины 0, только одна /относящаяся, скажем, к полю  $\phi_i$ / является началом непрерывной цепи, соединяющей  $O_2^{(i)}$  с верши-

ной 2. По определению,  $b_{i\ell}(\alpha)$  есть сумма всех таких  $(\alpha)$ -2-деревьев диаграммы 3б. Нетрудно сообразить также, что  $b_{i\ell}(\alpha)$  можно трактовать и как сумму всех  $(\alpha)$ -деревьев диаграммы 3а, для которых непрерывная цепь, связывающая вершины 1 и 2, имеет структуру  $1 \rightarrow \phi_i \rightarrow 0 \rightarrow \phi_\ell \rightarrow 2$ . Выражения /8б/ и /9/ являются непосредственными следствиями этого факта.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, с помощью  $\alpha$ -представления нам удалось установить, что  $F(x_1, \dots, x_k)$  и  $\phi(x_1, \dots, x_k)$  обладают спектральными свойствами, без которых партонная интерпретация этих функций была бы невозможной. Доказательство, однако, получилось не очень простое, и некоторым читателям могло показаться, что проще было бы воспользоваться обычным импульсным представлением, например,

$$\phi(x_1, \dots, x_k) = \int d^4 l_1 \dots d^4 l_k \delta^4(l_1 + \dots + l_k - P) \times$$

$$\times \left[ \prod_{i=1}^k \delta(x_i - \frac{n l_i}{nP}) \right] T(l_1, \dots, l_k; P). \quad /17/$$

Действительно, ограничения /2/, /5/, связанные с сохранением энергии-импульса в этом представлении, тривиальны. Однако, чтобы доказать, что  $0 \leq x_i \leq 1$  для  $\phi(x_1, \dots, x_k)$  /или формулу /3/ для  $F(x_1, \dots, x_k)$  /, необходимо знать аналитические свойства амплитуды  $T(l_1, \dots, l_k; P)$ , а это в действительности более сложная проблема, чем исходная.

Автор признателен Р.К.Эллису за обсуждение, стимулировавшее написание данной работы и А.В.Ефремову за полезные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Efremov A.V., Radyushkin A.V. JINR, E2-80-521, Dubna, 1980.
2. Politzer H.D. Nucl.Phys.B, 1980, 172, p.349.
3. Ellis R.K., Furmanski W., Petronzio R. CERN-TH-3381, Geneva, 1982.
4. Chisholm R. Proc.Cambr.Phys.Soc., 1952, 48, pp.300,518.
5. Bogoliubov N.N., Shirkov D.V. Introduction to the Theory of Quantized Fields. Interscience, N.Y., 1959.
6. Eden R.I. et al. The Analytic S-Matrix. Cambridge Univ. Press, 1966.
7. Nakanishi N. Graph Theory and Feynman Integrals. In: Mathematics and Its Applications. Gordon and Breach, 1971, vol.2.

8. Todorov I.T. Analytic Properties of Feynman Diagrams. Sofia, 1966.
9. Zavialov O.I. Renormalized Feynman Diagrams. "Nauka", Moscow, 1979.
10. Efremov A.V. JINR, E-2125, Dubna, 1965.
11. Lam C.S., Lebrun J.P. Nuovo Cim., 1969, 59, pp.358,422.
12. Владимиров А.А. ТМФ, 1980, 43, с.210.
13. Chetyrkin K.G., Tkachov F.V. Nucl.Phys. B, 1981, 192, p.159.

Рукопись поступила в издательский отдел  
21 марта 1983 года.

### НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

ДЗ-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:  
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79  
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Радюшкин А.В. P2-83-169  
О спектральных свойствах партонных корреляционных функций и мультипартонных волновых функций

С помощью параметрического представления для фейнмановских интегралов показано, что функции  $F(x_1, \dots, x_k)$ ,  $\phi(x_1, \dots, x_k)$ , обобщенные моменты которых пропорциональны редуцированным матричным элементам  $k$ -частичных составных операторов, обладают необходимыми для их партонной интерпретации спектральными свойствами.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Radyushkin A.V. P2-83-169  
On Spectral Properties of Parton Correlation Functions and Multiparton Wave Functions

Using a parametric representation for Feynman integrals it is demonstrated that the functions  $F(x_1, \dots, x_k)$ ,  $\phi(x_1, \dots, x_k)$  the generalized moments of which are proportional to reduced matrix elements of  $k$ -body composite operators, have the spectral properties necessary for their parton interpretation.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983