сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-83-157

А.Г.Бонч-Осмоловский, В.Л.Любошиц,
М.И.Подгорецкий

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ ПРИ ПРОЛЕТЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ КОРОТКИЙ УЧАСТОК СИЛОВОГО ПОЛЯ

1983

1. При движении заряженных частиц в силовых полях возникает электромагнитное излучение, причем давно уже установлено /1-3/, что его свойства зависят от соотношения между протяженностью ℓ той области, в которой на частицу действуют внешние силы, и так называемой длиной формирования излучения $L_{\text{ф}}$. В последнее время появилось несколько работ, в которых снова подробно обсуждается это обстоятельство /см., например, обзор /4/ и содержащиеся в нем ссылки/. В настоящей работе, посвященной той же теме, мы хотим обратить внимание на некоторые дополнительные особенности рассматриваемого излучения, ограничиваясь случаем, когда ультрарелятивистские частицы движутся с постоянной кинетической энергией, но могут изменять тем или иным образом направление своей скорости. Частота излучения предполагается настолько малой, что можно пользоваться классическими формулами.

Для частицы с зарядом e спектральная интенсивность излучения, отнесенная к единице телесного угла, дается известным выражением /см. §66 в /5//:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega\, d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c}\,|[\vec{k}\vec{J}]|^2, \quad \vec{J} = i\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{v}(t)\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\, dt. \qquad /1/$$

Здесь $\vec{k}$ - волновой вектор, $\vec{r}(t)$ и $\vec{v}(t)$ - текущие координата и скорость частицы. Пусть ультрарелятивистская частица пролетает через участок силового поля протяженностью ℓ. Если скорость частицы на входе равна $\vec{v}_0$, а на выходе $\vec{v}_2$, то

$$\vec{J} = i\vec{v}_0\int_{-\infty}^{0} e^{i(\omega - \vec{k}\vec{v}_0)t}\, dt + i\int_{0}^{\tau} \vec{v}(t)\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\, dt + i\vec{v}_2\int_{\tau}^{\infty} e^{i(\omega - \vec{k}\vec{v}_2)t}\, dt, \qquad /2/$$

где $\tau = \frac{\ell}{c}$. При $\tau, \ell \to 0$, когда имеет место мгновенное изменение скорости, получим

$$\vec{J} = \frac{\vec{v}_0}{\omega - \vec{k}\vec{v}_0} - \frac{\vec{v}_2}{\omega - \vec{k}\vec{v}_2}. \qquad /2'/$$

В этом случае амплитуда излучения равна алгебраической сумме амплитуд при мгновенной остановке частицы с последующим мгновенным вылетом в другом направлении. В дальнейшем всюду предполагается, что угол a между направлениями скоростей $\vec{v}_0$ и $\vec{v}_2$ мал по сравнению с единицей. Если к тому же $a \ll 1/\gamma$, то излучение сконцентрировано в основном внутри конуса с раствором порядка $1/\gamma$, но при $a \gg 1/\gamma$ заметная часть излучения идет в более широком конусе с раствором порядка α. После интегрирования /1/ с учетом /2'/ по всем углам излучения получаем[4]:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{4e^2}{\pi c}\left\{\frac{\alpha^2\gamma^2+2}{\alpha\gamma\sqrt{\alpha^2\gamma^2+4}}\ln\left[\frac{1}{2}(\alpha\gamma+\sqrt{\alpha^2\gamma^2+4}\right]-1\right\}. \qquad /3/$$

Из /3/ следует

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{2e^2}{3\pi c}\alpha^2\gamma^2 \quad \text{при } \alpha\gamma \ll 1, \qquad /3'/$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{2e^2}{\pi c}\ln\alpha^2\gamma^2 \quad \text{при } \alpha\gamma \gg 1. \qquad /3''/$$

Формула /3/ является универсальной в том смысле, что при достаточной малости промежутка ℓ конкретные особенности движения на этом участке никак не сказываются на излучении.

Если ℓ и r не слишком малы, то следует учитывать влияние второго члена в /2'/. Введем некоторую вспомогательную скорость $\vec{v}_1$, равную средней скорости $<\vec{v}(t)>$ на отрезке ℓ. Тогда показатель экспоненты $\omega t - \vec{k}\vec{r}$ в интересующем нас члене при $t = r$ равен $\omega r - \vec{k}\vec{r}(r) = (\omega - k\vec{v}_1)r = \ell/L_\Phi$, где

$$L_\Phi = \frac{v_1}{\omega - \vec{k}\vec{v}_1} \simeq \frac{\lambda\gamma^2}{\pi(1+\gamma^2\theta^2)}. \qquad /4/$$

Здесь θ – угол между $\vec{k}$ и $\vec{v}_1$, $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$.

Определенная таким образом длина формирования имеет простой физический смысл[1–3,6]; это длина, на протяжении которой когерентно складывается излучение, возникающее в разных точках траектории /разность фаз волн, испущенных в начале и конце участка длиной ℓ, не превосходит единицы/; можно также сказать, что это та длина, на которой формируется излучаемое поле /фотон и частица расходятся в продольном направлении на расстояние порядка длины волны λ /; наконец, с точки зрения теории поля L_Φ характеризует длину пробега "голой", виртуальной частицы[6].

При выполнении условия

$$\ell/L_\Phi \ll 1 \qquad /5/$$

излучение в нулевом приближении по ℓ/L_Φ не зависит от характера движения на участке ℓ и описывается формулами /1/-/2'/. Далее мы рассмотрим поправки к /1/-/2'/ до членов порядка $(\ell/L_\Phi)^2$ включительно.

В соответствии с формулой /3/ спектральная плотность излучения не зависит от частоты до тех пор, пока выполняется условие /5/, то есть в диапазоне частот

$$\omega \ll \tilde{\omega}, \quad \tilde{\omega} = \frac{2c\gamma^2}{\ell(1+\gamma^2\theta^2)}. \qquad /5'/$$

Специфическое спектральное распределение, определяемое движением на участке действия силового поля ℓ, имеет место только для частот, превышающих $\tilde{\omega}$.

2. Пусть траектория частицы имеет несколько мгновенных изломов, как это показано на рис.1. Тогда

$$\vec{J} = (\vec{L}_0 - \vec{L}_1) + (\vec{L}_1 - \vec{L}_2)e^{i\delta_1} + (\vec{L}_2 - \vec{L}_3)e^{i(\delta_1+\delta_2)} + \ldots + (\vec{L}_{n-1} - \vec{L}_n)e^{i(\delta_1+\delta_2+\ldots\delta_{n-1})},$$

$$\vec{L}_j = \frac{\vec{v}_j}{\omega - \vec{k}\vec{v}_j}, \quad \delta_j = (\omega - \vec{k}\vec{v}_j)r_j = \frac{\ell}{|\vec{L}_j|}. \qquad /6/$$

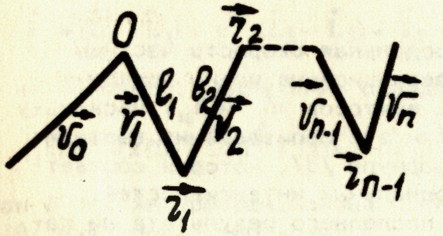

Рис.1

Заметим, что в соответствии с /4/ величина $|\vec{L}_j|$ имеет смысл длины формирования излучения, соответствующей j-му участку пути частицы. В интересующем нас случае малых углов рассеяния и излучения входящие в /6/ фазовые множители $\delta_j = \dfrac{\omega\ell_j}{2c}\left(\dfrac{1}{\gamma^2}+\theta_j^2\right)$, где θ_j – угол между $\vec{k}$ и $\vec{v}_j$.

Эффективная длина формирования L_Φ определяется максимальной фазой и имеет величину

$$L_\Phi \simeq \frac{\ell}{\Sigma\,\delta_j} = \frac{\lambda}{\pi\left(\dfrac{1}{\gamma^2}+<\theta^2>\right)}, \qquad /7/$$

где $<\theta^2>$ – среднее значение квадрата угла между направлением движения заряженной частицы и направлением излучения ($<\theta^2> = \frac{1}{e}\sum_j \ell_j\theta_j^2$).

Из /7/ следует, что

$$L_\Phi \simeq \frac{\lambda\gamma^2}{\pi} \quad \text{при } <\theta^2> \ll 1/\gamma,$$

$$L_\Phi \simeq \frac{\lambda}{\pi<\theta^2>} \quad \text{при } <\theta^2> \gg 1/\gamma. \qquad /7'/$$

Если все фазы $\delta_j \gg 1$, то при квадрировании выражения /6/ интерференционные члены выпадают, то есть

$$|\vec{J}|^2 = (\vec{L}_0 - \vec{L}_1)^2 + (\vec{L}_1 - \vec{L}_2)^2 + \ldots + (\vec{L}_{n-1} - \vec{L}_n)^2. \qquad /8/$$

Каждое слагаемое в этой сумме отвечает излучению при мгновенном изменении скорости в соответствии с формулой /3/, а полная интенсивность равна сумме всех парциальных интенсивностей. Если некоторые из фаз малы, следует учитывать наличие интерференции между парциальными амплитудами. Существует, однако, интересное исключение, когда интерференция отсутствует при любой величине фаз δ_j. Оно имеет место, если пространственные углы $\alpha_{j\mu}$ между всеми скоростями $\vec v_j$ и $\vec v_\mu$ малы по сравнению с $1/\gamma$, а соответствующие азимутальные углы распределены хаотически, то есть равномерно в интервале $(0, 2\pi)$. Действительно, в рассматриваемых условиях излучение распространяется в основном внутри конуса с раствором порядка $1/\gamma$, который велик по сравнению с углами между скоростями. Тогда каждое из слагаемых $\vec L_j - \vec L_{j+1}$ в формуле /6/ можно записать в следующем виде:

$$\frac{\vec u_j}{\omega - \vec k\vec v} + \frac{(\vec k\vec u_j)\vec v}{(\omega - \vec k\vec v)^2}, \qquad \text{где } \vec u_j = \vec v_j - \vec v_{j+1},$$

а $\vec v$ - общая для всей траектории продольная скорость частицы ($v \simeq c$). В выражении $|\vec J|^2$ все интерференционные члены содержат произведения компонент независимых векторов $\vec u_j$ и $\vec u_\mu$. Поскольку при усреднении по азимутальным углам эти произведения выпадают ($\langle \vec u_j \vec u_\mu \rangle = 0$), мы снова приходим к формуле /8/, которая соответствует некогерентному сложению парциальных интенсивностей.

Подчеркнем, что справедливость последнего результата не гарантируется одной только равномерностью распределения азимутальных углов, требуется еще, чтобы на участке траектории порядка L_Φ углы $\alpha_{j\mu}$ между всеми скоростями $\vec v_j$ и $\vec v_\mu$ были малы по сравнению с $1/\gamma$. Оба условия могут выполняться вместе для обычного тормозного излучения, связанного с многократным кулоновским рассеянием. Тогда интенсивность тормозного излучения равна сумме интенсивностей отдельных актов рассеяния и пропорциональна среднему квадрату угла многократного рассеяния. Заметим, что сказанное относится и к таким тонким пластинкам, для которых выполняется условие /5/, которое без усреднения по азимутальным углам привело бы к появлению интерференции. Действительно, при выполнении неравенства /5/ и при любом соотношении между величинами $\alpha_{j\mu}$ и $1/\gamma$ все экспоненты в формуле /6/ можно заменить единицами. Тогда /6/ переходит в

$$\vec J = \vec L_0 - \vec L_n, \qquad /9/$$

то есть, как и следовало ожидать, совпадает с формулой /2'/. Излучение определяется только начальной и конечной скоростями и совпадает с излучением при мгновенном изменении скорости от $\vec v_0$ к $\vec v_n$; его интенсивность, проинтегрированная по всем направлениям вектора $\vec k$, дается формулой /3/, в которой α - угол между $\vec v_0$ и $\vec v_n$. Если при этом $\alpha \ll 1/\gamma$, то после усреднения по углам

рассеяния мы приходим к обычному выражению для тормозного излучения, поскольку из-за хаотичности азимутальных углов средний квадрат угла многократного кулоновского рассеяния равен сумме квадратов углов всех промежуточных актов рассеяния.

Таким образом, при $\alpha \ll 1/\gamma$ спектральная интенсивность тормозного излучения равна сумме интенсивностей, связанных со всеми отдельными актами рассеяния независимо от соотношения между длинами ℓ и L_Φ. Иначе обстоит дело, если $\alpha \gg 1/\gamma$. Тогда парциальные интенсивности складываются только при выполнении условия $\ell \gg L_\Phi$, в то время как в противоположном предельном случае существенную роль играет интерференция, не исчезающая, несмотря на хаотичность в распределении азимутальных углов. Для пояснения физического смысла указанного различия, имеющего непосредственное отношение к эффекту Ландау-Померанчука [7], обратимся к простому примеру с двумя актами рассеяния /см. рис.2/, рассмотренному ранее в работе [6]. Здесь

$$\vec J = (\vec L_0 - \vec L_1) + e^{i\delta}(\vec L_1 - \vec L_2) = (\vec L_0 - \vec L_2) + (e^{i\delta} - 1)(\vec L_1 - \vec L_2), \quad \delta = \ell/L_\Phi, \qquad /6'/$$

а интенсивность излучения определяется выражением

$$|[\vec k\vec J]|^2 = [\vec k(\vec L_0 - \vec L_1)]^2 + [\vec k(\vec L_1 - \vec L_2)]^2 + 2([(\vec L_0 - \vec L_1)\vec k][(\vec L_1 - \vec L_2)\vec k])\cos\delta^{*}. \qquad /10/$$

При $\delta \gg 1$ интерференционный член сильно осциллирует, и формула /10/ фактически переходит в

$$|[\vec k\vec J]|^2 = [\vec k(\vec L_0 - \vec L_1)]^2 + [\vec k(\vec L_1 - \vec L_2)]^2, \qquad /11/$$

то есть интенсивность равна сумме парциальных интенсивностей. Если углы α_{01} и α_{02} велики по сравнению с $1/\gamma$, то существенная часть излучения идет внутри четырех конусов вдоль направлений $\vec v_0$, $\vec v_1$ и $\vec v_2$. Поэтому справедливо приближенное равенство

$$|[\vec k\vec J]|^2 \simeq [\vec k\vec L_0]^2 + [\vec k\vec L_1]^2 + [\vec k\vec L_1]^2 + [\vec k\vec L_2]^2, \qquad /10'/$$

согласно которому интенсивность примерно вчетверо превосходит интенсивность при мгновенной остановке частицы. С другой стороны, при $\delta \ll 1$ формула /10/ переходит в

$$[\vec k\vec J]^2 \simeq ([\vec k\vec L_0] - [\vec k\vec L_2])^2. \qquad /10''/$$

Поскольку конусы излучения вдоль направлений $\vec v_0$ и $\vec v_2$ практически не перекрываются, отсюда следует

$$[\vec k\vec J]^2 \simeq [\vec k\vec L_0]^2 + [\vec k\vec L_2]^2,$$

то есть интенсивность падает примерно вдвое. Подчеркнем, что

---

*Аналогичные формулы использовались и в работе [8].

такого уменьшения интенсивности нет, когда все углы $\alpha \ll 1/\gamma$ и все рассматриваемые конусы перекрываются.

При выполнении условия /5/ тормозное излучение полностью определяется углом α между начальной и конечной скоростями. Поэтому оно не должно зависеть от толщины рассеивателя ℓ, если каждый раз отбирать траектории с одной и той же фиксированной величиной α. Насколько нам известно, этот, на первый взгляд, неожиданный результат не был пока продемонстрирован в прямом эксперименте. Отметим еще следующее интересное обстоятельство: хотя при фиксированном угле α удвоение толщины ℓ не влияет на тормозное излучение, его интенсивность должна заметно измениться, если взять две пластинки толщиной ℓ, раздвинутые на расстояние, которое велико по сравнению с длиной формирования, поскольку в последнем случае излучения в обеих пластинках складываются некогерентно /см. также работу [9], где обсуждается сходная физическая ситуация/.

3. Вернемся к формуле /6/, которая при выполнении условия /5/ принимает вид /9/, соответствующий излучению при мгновенном однократном рассеянии, и рассмотрим поправки к /9/, связанные с отличием малой величины ℓ/L_ϕ от нуля, ограничиваясь сначала простейшим случаем, приведенном на рис.2. В соответствии с /6'/ /см. также [8] / спектральная интенсивность определяется выражением

$$|[\vec k\vec J]|^2 = ([\vec k\vec L_0] - [\vec k\vec L_2])^2 + 4\sin^2\frac{\delta}{2}\cdot([\vec k\vec L_1] - [\vec k\vec L_0])([\vec k\vec L_1] - [\vec k,\vec L_2]). \qquad /12/$$

Если $\delta = \ell/L_\phi \ll 1$, формула /12/ переходит в

$$|[\vec k\vec J]|^2 \simeq ([\vec k\vec L_0] - [\vec k\vec L_2])^2 + \delta^2([\vec k\vec L_1] - [\vec k\vec L_0])([\vec k\vec L_1] - [\vec k\vec L_2]) . \qquad /12'/$$

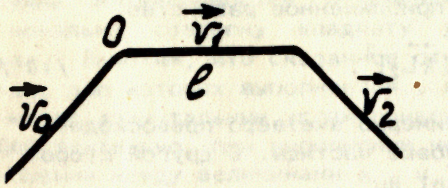

Рис.2

Здесь первый член соответствует излучению при мгновенном рассеянии, второй - определяет искомую поправку. В большинстве случаев коэффициент при δ^2 имеет тот же порядок, что и основной член. Поэтому относительная поправка κ примерно совпадает с $\delta^2 = \ell^2/L_\phi^2$. Для более детального анализа следует рассмотреть различные частные случаи. Если углы α_{01}, α_{02} и α_{12} малы по сравнению с $1/\gamma$, то нетрудно показать, что относительная поправка

$$\kappa \simeq \frac{\alpha_{01}\alpha_{12}}{\alpha_{02}^2}\left(\frac{\ell}{L_\phi}\right)^2, \qquad /13/$$

где $L_\phi = \frac{\gamma^2}{2\pi}$ при $\theta \sim 1/\gamma$; $L_\phi = \frac{\lambda}{\pi\theta^2}$ при $\theta \gg 1/\gamma$; θ - угол между общей

продольной скоростью и направлением излучения. Если все $\alpha_{ik} \simeq \bar\alpha \gg 1/\gamma$, то для излучения, распространяющегося вдоль скоростей $\vec v_0$ и $\vec v_2$ внутри конусов с раствором порядка $1/\gamma$, относительная поправка

$$\kappa \simeq \frac{1}{\bar\alpha\gamma}\left(\frac{\ell}{L_\phi}\right)^2; \quad L_\phi \simeq \frac{\lambda}{\pi\bar\alpha^2}. \qquad /13'/$$

В то же время для остальных направлений

$$\kappa \simeq \left(\frac{\ell}{L_\phi}\right)^2; \quad L_\phi \simeq \frac{\lambda}{\pi\theta^2}. \qquad /13''/$$

Приведенные оценки справедливы только при $\delta < 1$, то есть вплоть до угла θ_k, определяемого условием*

$$\omega\tau\theta_k^2 \equiv \frac{\omega\ell}{c}\theta_k^2 \lesssim 1. \qquad /14/$$

Для излучения, идущего под углами $\theta > \theta_k$, интенсивность определяется формулой /12/; тогда относительная поправка $\kappa \simeq 1$, то есть поправочный член порядка основного.

Оценим теперь абсолютную поправку, просуммированную по всем возможным направлениям излучения. Для этого достаточно проинтегрировать второй член в /12'/ от углов $\theta = \bar\alpha$ до углов $\theta \simeq \theta_k$ и добавить интеграл от второго члена в /12/ при $\theta > \theta_k$. Легко убедиться в том, что при $\theta > 1/\gamma$ второй член в /12'/ можно записать по порядку величины в виде

$$\frac{[\vec k(\vec v_1 - \vec v_0)][\vec k(\vec v_1 - \vec v_2)]}{(\omega - \vec k\vec v)^2}(\omega - \vec k\vec v_1)^2\tau^2 = [\vec k(\vec v_1 - \vec v_0)][\vec k(\vec v_1 - \vec v_2)]\tau^2.$$

Поскольку векторы $(\vec v_1 - \vec v_0)$ и $(\vec v_1 - \vec v_2)$ почти перпендикулярны вектору $\vec k$, по порядку величины поправка равна $\omega^2\tau^2\bar\alpha^2$, что после интегрирования до угла $\theta \simeq \theta_k$ дает $\omega^2\tau^2\bar\alpha^2\theta_k^2 \simeq \omega\tau\bar\alpha^2 \simeq \frac{\omega\ell}{c}\bar\alpha^2$. Примерно такой же вклад связан с углами, превышающими θ_k. Здесь $\sin^2\frac{\delta}{2} \simeq 1$, и надо исходить из выражения

$$\frac{[\vec k(\vec v_1 - \vec v_0)][\vec k(\vec v_1 - \vec v_2)]}{(\omega - \vec k\vec v)^2} \sim \frac{\bar\alpha^2}{\theta^4}.$$

---

*Если $\omega\tau \lesssim 1$, то излучение фактически совпадает с излучением при мгновенном рассеянии. Поэтому анализ можно ограничить условием $\omega\tau \gg 1$, когда $\theta_k \simeq \frac{1}{\sqrt{\omega\tau}} \ll 1$. Будем также считать, что $\theta_k \gg \alpha$, поскольку в противном случае все сводится к простой сумме излучений от двух последовательных мгновенных рассеяний.

После интегрирования от $\theta \simeq \theta_k$ до $\theta \simeq 1$ это вновь приводит к величине порядка $\frac{\omega \ell \bar{\alpha}^2}{c}$. Заметим, что при сильном различии между углами α_{10} и α_{12} величину $\bar{\alpha}^2$ следует заменить произведением $\alpha_{01}\alpha_{12}$. Что касается интеграла от основного члена в формуле /12/, то он равен $\frac{8\pi}{3}\gamma^2\alpha_{02}^2$ при $\alpha_{02} \ll 1/\gamma$ и $8\pi \ln \gamma^2 \alpha_{02}^2$ при $\alpha_{02} \gg 1/\gamma$. Таким образом, интегральная поправка к спектральной плотности излучения пропорциональна длине промежуточного интервала ℓ, а не квадрату этой длины. Указанный результат, полученный для частного случая двух последовательных рассеяний, справедлив при любом характере движения между начальным и конечным прямолинейными участками, если продольная кинетическая энергия $mc^2(\gamma_{11}-1)$ всюду остается постоянной /см. приложение/. В случае, когда на частицу действуют только продольные силы [10], как интегральная, так и относительная дифференциальная поправки пропорциональны ℓ^2, причем первая составляет примерно

$$\left(\frac{\omega\ell}{c\gamma^2}\right)^2 \ln \frac{c\gamma^2}{\omega\ell},$$

вторая -

$$\frac{\omega^2\ell^2}{c^2}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)^2.$$

Если векторы конечной и начальной скоростей $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_0$ параллельны, то основной член в формуле /12/ исчезает и все излучение обусловлено одним только вторым членом $4\sin^2\frac{\delta}{2}([\vec{k}\vec{L}_1]-[\vec{k}\vec{L}_0])^2$. Поскольку он зависит не только от промежуточной скорости $\vec{v}_1$, но также и от $\vec{v}_0=\vec{v}_2$, излучение отличается от того случая, когда движение происходит только на промежуточном участке, то есть когда начальная и конечная скорости равны нулю.

Если угол α_{02} сопоставим по величине с углами α_{01} и α_{12}, то излучение определяется основным членом в формуле /12/ до тех пор, пока выполняется условие /5/, то есть для частот $\omega \ll \bar{\omega}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В основном тексте проанализировано излучение при двух последовательных актах рассеяния. Обратимся теперь к более общему случаю, когда на промежуточном отрезке ℓ движение не является прямолинейным. Траектория релятивистской частицы показана на рис.3. Предполагается, что направления всех промежуточных скоростей $\vec{v}(t)$ отличаются от направлений скоростей $\vec{v}_0$ и $\vec{v}_2$ на углы $\alpha \ll 1$, кинетическая энергия частицы считается постоянной. Пунктиром показано направление некоторой вспомогательной скорости $\vec{v}_1$; двигаясь с этой скоростью по прямолинейной траектории, частица переместилась бы за время τ от точки $\vec{r}=0$ до точки $\vec{r}(\tau)=\vec{R}$.

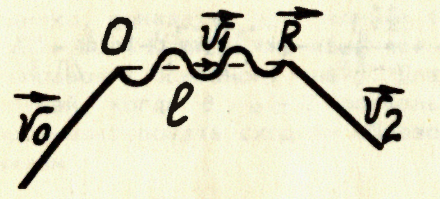

Рис.3

Спектральная плотность излучения описывается формулой /1/ основного текста. Для рассматриваемого движения

$$\vec{J} = i\vec{v}_0 \int_{-\infty}^{0} e^{i(\omega - \vec{k}\vec{v}_0)t}\,dt + i\int_0^{\tau} \vec{v}(t)\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\,dt + i\vec{v}_2 \int_{\tau}^{\infty} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\,dt. \qquad /П.1/$$

Первое слагаемое равно $\frac{\vec{v}_0}{\omega - \vec{k}\vec{v}_0}$, при вычислении последнего члена надо иметь в виду, что для $t \geq \tau$ имеем $\vec{r} = \vec{R} + \vec{v}_2(t-\tau) = \vec{v}_1\tau + \vec{v}_2(t-\tau)$. Это приводит к выражению $-\frac{\vec{v}_2}{\omega - \vec{k}\vec{v}_2} e^{i(\omega - \vec{k}\vec{v}_1)\tau}$, то есть

$$\vec{J} = \frac{\vec{v}_0}{\omega - \vec{k}\vec{v}_0} - \frac{\vec{v}_2}{\omega - \vec{k}\vec{v}_2} e^{i(\omega - \vec{k}\vec{v}_2)\tau} + i\int_0^{\tau} \vec{v}(t)\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\,dt. \qquad /П.2/$$

Если ввести поперечный вектор $\vec{u}(t) = \vec{v}(t) - \vec{v}_1$, то

$$\int_0^{\tau} \vec{v}(t)\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\,dt = \int_0^{\tau} \vec{u}(t)\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\,dt + \vec{v}_1 \int_0^{\tau} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\,dt =$$

$$= \int_0^{\tau} \vec{u}(t)\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\,dt + \vec{v}_1 \int_0^{\tau} e^{i(\omega - \vec{k}\vec{v}_1)t}\, e^{i(\vec{k}\vec{v}_1 t - \vec{k}\vec{r})}\,dt.$$

Легко убедиться, что показатель $(\vec{k}\vec{v}_1 t - \vec{k}\vec{r}) \ll 1$, если промежуточный интервал τ настолько мал, что выполнено интересующее нас условие $\frac{\ell}{L_\Phi} \ll 1$. То же самое относится и к показателю экспоненты в первом интеграле. Поэтому в достаточном приближении

$$\int_0^{\tau} \vec{v}(t)\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\,dt = \int_0^{\tau} \vec{u}(t)\,dt + i\int_0^{\tau} (\omega t - \vec{k}\vec{r})\,\vec{u}\,dt + \vec{v}_1 \int_0^{\tau} e^{i(\omega - \vec{k}\vec{v}_1)t}\,dt +$$
$$+ i\vec{v}_1 \int_0^{\tau} (\vec{k}\vec{v}_1 t - \vec{k}\vec{r})\,dt =$$
$$= \int_0^{\tau} \vec{u}\,dt + i\int_0^{\tau} (\omega t - \vec{k}\vec{r})\,\vec{u}\,dt + i\vec{v}_1 \int_0^{\tau} (\vec{k}\vec{v}_1 t - \vec{k}\vec{r})\,dt + \frac{\vec{v}_1}{i(\omega - \vec{k}\vec{v}_1)}\left(e^{i(\omega - \vec{k}\vec{v}_1)\tau} - 1\right).$$

Подставляя последнее выражение в /П.2/ и умножая векторно на $\vec{k}$, получим

$$[\vec{k}\vec{J}] = \left(\frac{[\vec{k}\vec{v}_0]}{\omega-\vec{k}\vec{v}_0} - \frac{[\vec{k}\vec{v}_1]}{\omega-\vec{k}\vec{v}_1}\right) + e^{i\delta}\left(\frac{[\vec{k}\vec{v}_1]}{\omega-\vec{k}\vec{v}_1} - \frac{[\vec{k}\vec{v}_2]}{\omega-\vec{k}\vec{v}_2}\right) - [\vec{k}\vec{v}_1]\int_0^{\tau}(\vec{k}\vec{v}_1 t-\vec{k}\vec{r})\,dt - \quad /\Pi.3/$$

$$-\int_0^{\tau}(\omega t-\vec{k}\vec{r})[\vec{k}\vec{u}]\,dt + i\int_0^{\tau}[\vec{k}\vec{u}]\,dt,$$

где

$$\delta = (\omega - \vec{k}\vec{v}_1)\tau.$$

Первые члены в /П.3/ имеют такой же вид, как и в задаче о двух последовательных рассеяниях /см. формулу /6′/ основного текста/, но в общем случае возникают еще три дополнительных слагаемых. Беря в разложении экспоненты $e^{i\delta}$ первые три члена, получим также

$$[\vec{k}\vec{J}] = \left(\frac{[\vec{k}\vec{v}_0]}{\omega-\vec{k}\vec{v}_0} - \frac{[\vec{k}\vec{v}_2]}{\omega-\vec{k}\vec{v}_2}\right) - \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{[\vec{k}\vec{v}_1]}{\omega-\vec{k}\vec{v}_1} - \frac{[\vec{k}\vec{v}_2]}{\omega-\vec{k}\vec{v}_2}\right) - [\vec{k}\vec{v}_1]\int_0^{\tau}(\vec{k}\vec{v}_1 t-\vec{k}\vec{r})\,dt - \quad /\Pi.3'/$$

$$-\int_0^{\tau}(\omega t-\vec{k}\vec{r})[\vec{k}\vec{u}]\,dt + i\int_0^{\tau}[\vec{k}\vec{u}]\,dt + i\delta\left(\frac{[\vec{k}\vec{v}_1]}{\omega-\vec{k}\vec{v}_1} - \frac{[\vec{k}\vec{v}_2]}{\omega-\vec{k}\vec{v}_2}\right).$$

Для сокращения записи обозначим последовательные слагаемые в формуле /П.3′/ соответствующими символами $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, i\vec{E}, i\vec{F}$. Тогда спектральная плотность определяется выражением

$$|[\vec{k}\vec{J}]|^2 = (A + B + C + D)^2 + (E + F)^2.$$

Легко видеть, что векторы $\vec{B}, \vec{C}$ и $\vec{D}$ пропорциональны τ^2, а $\vec{E}$ и $\vec{F}$ пропорциональны τ. Поэтому наинизшие по τ поправки к основному члену $\vec{A}^2$ пропорциональны τ^2, и можно записать

$$|[\vec{k}\vec{J}]|^2 = \vec{A}^2 + 2\vec{A}\vec{B} + 2\vec{A}\vec{C} + 2\vec{A}\vec{D} + \vec{E}^2 + 2\vec{E}\vec{F} + \vec{F}^2. \quad /\Pi.4/$$

Заметим также, что

$$2\vec{A}\vec{B} + \vec{F}^2 = \delta^2\left(\frac{[\vec{k}\vec{v}_1]}{\omega-\vec{k}\vec{v}_1} - \frac{[\vec{k}\vec{v}_0]}{\omega-\vec{k}\vec{v}_0}\right)\left(\frac{[\vec{k}\vec{v}_1]}{\omega-\vec{k}\vec{v}_1} - \frac{[\vec{k}\vec{v}_2]}{\omega-\vec{k}\vec{v}_0}\right).$$

Обозначив эту величину символом G, перепишем /П.4/ в виде

$$|[\vec{k}\vec{J}]|^2 = \vec{A}^2 + 2\vec{A}\vec{C} + 2\vec{A}\vec{D} + \vec{E}^2 + 2\vec{E}\vec{F} + G. \quad /\Pi.4'/$$

Для простой ситуации с двумя последовательными рассеяниями выражение /П.4′/ содержало бы в правой части только $\vec{A}^2 + G$. Легко,

однако, показать, что наличие в /П.4′/ дополнительных слагаемых $2\vec{A}\vec{C} + 2\vec{A}\vec{D} + \vec{E}^2 + 2\vec{E}\vec{F}$ не изменяет порядка величины обсуждаемых поправок к основному члену. Для примера рассмотрим только один случай, когда $\theta > \alpha \simeq \bar{\alpha}$, поскольку все остальные случаи можно проанализировать сходным образом. В рассматриваемых условиях имеем

$$|\vec{C}| = \omega\theta\int_0^{\tau}\omega\theta\bar{\alpha}\,t\,dt = \omega^2\tau^2\theta^2\bar{\alpha}, \quad |\vec{D}| = \int_0^{\tau}\omega\theta^2\omega\bar{\alpha}\,t\,dt \simeq \omega^2\tau^2\theta^2\bar{\alpha},$$

$$|\vec{E}| \simeq \int_0^{\tau}\omega\bar{\alpha}\,dt = \omega\tau\bar{\alpha}.$$

Если $\theta > \bar{\alpha}$, то

$$\vec{A} = \frac{[\vec{k}(\vec{v}_0-\vec{v}_2)]}{\omega-\vec{k}\vec{v}}, \quad \vec{F} = (\omega-\vec{k}\vec{v}_1)\tau\,\frac{[\vec{k}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)]}{\omega-\vec{k}\vec{v}} \simeq [\vec{k}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)]\tau,$$

$$G = (\omega-\vec{k}\vec{v}_1)\tau^2\,\frac{[\vec{k}(\vec{v}_1-\vec{v}_0)][\vec{k}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)]}{(\omega-\vec{k}\vec{v})^2} \simeq [\vec{k}(\vec{v}_1-\vec{v}_0)][\vec{k}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)]\tau^2.$$

Поэтому

$$|\vec{A}| \sim \frac{\bar{\alpha}}{\theta^2}; \quad |\vec{F}| \sim \omega\tau\bar{\alpha}; \quad G = \omega^2\tau^2\bar{\alpha}^2.$$

Относительные поправки к основному излучению даются выражениями $\frac{\vec{A}\vec{C}}{\vec{A}^2}, \frac{\vec{A}\vec{D}}{\vec{A}^2}, \frac{\vec{E}^2}{\vec{A}^2}, \frac{\vec{E}\vec{F}}{\vec{A}^2}$ и $\frac{G}{\vec{A}^2}$. Все эти дроби равны по порядку величины $\omega^2\tau^2\theta^4 = (\ell/L_\Phi)^2$, где $L_\Phi = \frac{\lambda}{\pi\theta^2}$. Заметим, что при $\theta > \bar{\alpha}$ относительная поправка определяется только углом θ и не зависит от конкретных особенностей движения в промежуточном интервале ℓ. Для достаточно малых частот, когда $\ell/L_\Phi < 1$, остается только основной член $\vec{A}^2$, излучение оказывается таким же, как при одном акте мгновенного рассеяния. Тогда спектральная плотность задается формулой /3/ основного текста, откуда следует, что в низкочастотной области спектральная плотность не зависит от частоты.

Абсолютные поправки к основному члену $\vec{A}^2$ определяются при фиксированном угле излучения θ выражением $2\vec{A}\vec{C} + 2\vec{A}\vec{D} + \vec{E}^2 + 2\vec{E}\vec{F} + G$, которое равно по порядку величины $\omega^2\tau^2\bar{\alpha}^2$. После интегрирования по телесному углу вплоть до $\theta \simeq \theta_k \simeq \frac{1}{\omega\tau}$ это дает $\omega\tau\bar{\alpha}^2 = \ell/L_\Phi$, где $L_\Phi = \frac{\lambda}{\pi\bar{\alpha}^2}$.

Формулы /П.3/, /П.3′/, /П.4/ и /П.4′/ справедливы только при $\delta < 1$, то есть при $\theta < \theta_k = \frac{1}{\omega\tau}$. Для углов $\theta > \theta_k$ надо пользоваться исходным выражением /П.1/, которое в этом случае удобнее записать в несколько преобразованном виде, добавив в правую часть $\int_0^r \vec{v}_2 e^{i(\omega - kv_1)t} dt$ и вычтя такую же величину. Тогда получим

$$\vec{J} = \frac{\vec{v}_0}{\omega - \vec{k}\vec{v}_0} - \frac{\vec{v}_2}{\omega - \vec{k}\vec{v}_2} + i\int_0^r (\vec{v}(t) e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r}(t))} - \vec{v}_2 e^{i(\omega - \vec{k}\vec{v}_1)t})dt,$$

$$[\vec{k}\vec{J}] = (\frac{[\vec{k}\vec{v}_0]}{\omega - \vec{k}\vec{v}_0} - \frac{[\vec{k}\vec{v}_2]}{\omega - \vec{k}\vec{v}_2}) + i\int_0^r [\vec{k}\,\vec{v}(t)]\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r}(t))} - [\vec{k}\vec{v}_2]\, e^{i(\omega - \vec{k}\vec{v}_1)t})dt. \qquad /П.5/$$

При $\theta > \theta_k$ интегрирование в /П.5/ можно проводить не по всему интервалу r, а только до $r \simeq \frac{1}{\omega\theta^2}$, поскольку при $t > r$ под знаком интеграла стоят быстро осциллирующие функции t; кроме того, при $t < r$ экспоненты можно заменить единицами. Поэтому

$$[\vec{k}\vec{J}] \approx (\frac{[\vec{k}\vec{v}_0]}{\omega - \vec{k}\vec{v}_0} - \frac{[\vec{k}\vec{v}_2]}{\omega - \vec{k}\vec{v}_2}) + i\int_0^r [\vec{k}(\vec{v}(t) - \vec{v}_2)]\, dt,$$

откуда следует, что абсолютная поправка к основной интенсивности равна примерно $\omega^2 r^2 \bar{a}^2 = \frac{\bar{a}^2}{\theta^4}$. Интегрируя эту величину по телесному углу для $\theta \gtrsim \theta_k$, вновь приходим к абсолютной поправке порядка $\omega r \bar{a}^2$, ее следует сопоставлять с интегралом от основного члена $\vec{A}^2$, который равен по порядку величины $\ell n\, \bar{a}^2 \gamma^2 \simeq 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк И.М. Изв.АН СССР, сер.физ., 1942, т.6, № 1-2, с.3.
2. Фейнберг Е.Л. ЖЭТФ, 1966, т.50, с.202.
3. Тер-Микаэлян М.Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Изд-во АН Арм.ССР, Ереван, 1969, гл.II.
4. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. УФН, 1982, т.137, с.561.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. "Наука", М., 1973.
6. Фейнберг Е.Л. УФН, 1980, т.132, с.255.
7. Ландау Л.Д., Померанчук И.Я. ДАН СССР, 1953, т.92, с.535.
8. Дремин И.М. Письма в ЖЭТФ, 1981, т.34, с.617.
9. Никишов А.И. ЯФ, 1981, т.34, с.134.
10. Болотовский Б.М., Давыдов В.А., Рок В.Е. УФН, 1982, т.136, с.501.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 марта 1983 года.

Бонч-Осмоловский А.Г., Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И. P2-83-157

Электромагнитное излучение, возникающее при пролете релятивистских частиц через короткий участок силового поля

Исследуется низкочастотная часть спектра электромагнитного излучения, возникающего при изменении направления вектора скорости ультрарелятивистской заряженной частицы на участке силового поля конечной длины. Показано, что поправка к спектрально-угловой плотности излучения, соответствующей мгновенному изменению скорости, имеет величину порядка $(\ell/L_\phi)^2$, где $L_\phi = \frac{2c\gamma^2}{\omega(1+\gamma^2\theta^2)}$ - длина формирования, ω - частота излучения, γ - лоренц-фактор, θ - угол между продольной скоростью частицы и направлением излучения. В то же время после интегрирования по углам поправка к спектральной плотности оказывается пропорциональной длине промежуточного интервала, а не квадрату этой длины.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Bonch-Osmolovsky A.G., Lyuboshits V.L., Podgoretsky M.I. P2-83-157

Electromagnetic Radiation during the Flight of Relativistic Particles through a Small Section of the Force Field

The low frequency part of the spectrum of the electromagnetic radiation arising at a change of the velocity direction of an ultrarelativistic charged particle within certain section of a force field of finite length ℓ is investigated. It is shown that the correction to the spectrum-angular density of radiation corresponding to an instantaneous change of velocity has a magnitude of an order of (ℓ/L_ϕ), where $L_\phi = \frac{2c\gamma^2}{\omega(1+\gamma^2\theta^2)}$ is the formation length, ω is the radiation frequency, γ is the Lorentz-factor, θ is the angle between the longitudinal velocity of a particle and the direction of radiation. At the same time the correction to the spectrum density, after integrating over angles, turns out to be proportional to the length of an intermediate interval, but not to the square of this length.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой.