

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

2455/83

P2-83-129 16/5-83

Г.А.Козлов, С.П.Кулешов, В.И.Саврин,
В.В.Санадзе, Н.Б.Скачков

О ПОВЕДЕНИИ
ФОРМФАКТОРА РАСПАДА π^0 -МЕЗОНА
В ДАЛИТЦ-ПАРУ
В ОБЛАСТИ МАЛЫХ ИНВАРИАНТНЫХ МАСС

Направлено в журнал
"Zeitschrift für Physik C.
Particles and Fields"

1983

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к экспериментальному изучению распада $\pi^0 \rightarrow e^+e^-\gamma$ не ослабевает в течение уже почти 20 лет^{/1/}. Экспериментальная ситуация с поведением формфактора распада $F_{\pi^0 \rightarrow e^+e^-\gamma}(s)$ не является

вполне ясной, поскольку, например, в первых трех работах из^{/1/} при использовании формулы $F_{\pi^0 \rightarrow e^+e^-\gamma}(s) = 1 + as$ было получено отрица-

тельное значение параметра a , определяющего наклон формфактора в области малых значений квадрата инвариантной массы (e^+e^-)-пары $s = q_1^2 = (p_+ + p_-)^2$, а в последней - положительное. Теоретические вычисления, основанные на теории возмущений квантовой теории поля, приводят к положительной величине a /см. обзор результатов в^{/2/} /, равно как и вычисление, сделанное с использованием волновой функции в статическом пределе^{/3/}. Как отмечалось в работе^{/4/}, статический предел приводит к существенно завышенным значениям экспериментально измеренных шириин распадов, в то время как использование нерелятивистских кулоновской и осцилляторной волновых функций приводит к занижению тех же величин в 2-3 раза.

В настоящей работе для описания распада $\pi^0 \rightarrow e^+e^-\gamma$ мы применим квазипотенциальный подход, используемый в квантовой теории поля^{/5/}, который позволяет определить вид релятивистских волновых функций, описывающих относительное движение кварков и входящих в матричные элементы амплитуд ряда процессов, в том числе и процессов распада адронов^{/3,6-8/}. Нами будет использовано полученное в^{/9-11/} в аналитическом виде точное решение для квазипотенциала, являющегося релятивистским обобщением осцилляторного потенциала, и приближенное решение с хромодинамическим потенциалом, введенным в работах^{/6, 12/}.

Отметим, что вид взаимодействия, запирающего кварки внутри адрона, то есть на больших расстояниях, квантовая хромодинамика пока не определяет, и его приходится задавать в виде феноменологических линейного, логарифмического или осцилляторного потенциалов, которые в основном и определяют вид спектра масс легких мезонов. В связи с недостаточной теоретической изученностью легких мезонов как связанных состояний выход за пределы статического приближения неизбежно связан с применением модельных волновых функций. В качестве таких функций мы будем использовать решения трехмерных релятивистских уравнений для фермион-антифермионной системы^{/13/}.

2. ФОРМФАКТОР АННИГИЛЯЦИИ π^0 -МЕЗОНА В ДВА ВИРТУАЛЬНЫХ γ -КВАНТА

Диаграмма, соответствующая распаду $\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma^*$, изображена на рис.1. В формализме Бете-Солпитера четырехмерные выражения для распадов фермион-антифермионных связанных состояний в два фотона или два глюона и их редукция к трехмерной форме изучались в работах^{/14,15/}.

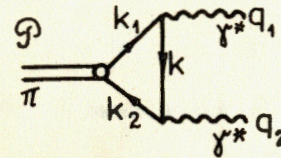


Рис.1. Диаграмма, соответствующая аннигиляции π^0 -мезона в два виртуальных γ -кванта.

Воспользовавшись общими правилами построения амплитуды процесса с участием составных частиц в одновременном формализме, запишем выражение для амплитуды аннигиляции π^0 -мезона в два виртуальных фотона в следующем виде^{/3,8/}:

$$M_{\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma^*}(q_1 | \mathcal{P}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{2k_1^0} T_{q\bar{q} \rightarrow \gamma^* \gamma^*}(q_1; k_1 | \mathcal{P}) \Psi_{\text{ВК}}^{\sigma_1 \sigma_2}(\vec{k}_1), \quad /1/$$

где

$$M_{\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma^*}(q_1 | \mathcal{P}) = F_{\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma^*}(q_1^2, q_2^2) e_1^\mu e_2^\nu \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q_1^\rho \mathcal{P}^\sigma, \quad /2/$$

$\Psi_{\text{ВК}}^{\sigma_1 \sigma_2}(\vec{k}_1)$ - одновременная релятивистская волновая функция, $F_{\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma^*}(q_1^2, q_2^2)$ - формфактор аннигиляции π^0 -мезона в два виртуальных фотона /или глюона/, а амплитуда аннигиляции системы кварк-антикварк имеет следующий вид:

$$T_{q\bar{q} \rightarrow \gamma^* \gamma^*}(q_1, k_1 | \mathcal{P}) = \frac{4\pi\alpha_s u_q \frac{\sigma_q}{q} \hat{e}_1(\hat{k}_1 - \hat{q}_1 + m_q) \hat{e}_2 u_q^{\sigma_1}(k_1)}{(k_1 - q_1)^2 - m_q^2} + (q_1 \leftrightarrow q_2). \quad /3/$$

Здесь мы будем предполагать, что массы кварков равны: $m_1 = m_2 = m_q$;

$\sigma_q = \sqrt{n_c} \cdot \sum e_q^2$; n_c - число цветов; $\sum e_q^2$ - сумма квадратов зарядов всех возможных кварков. Остальные обозначения понятны из рис.1.

В случае, если $q_1^2 = q_2^2 = 0$, формфактор $F_{\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma^*}(q_1^2, q_2^2)$ преобразуется в постоянную распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$:

$$F_{\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma^*}(0, 0) = f_{\pi^0 \rightarrow 2\gamma} \quad /4/$$

Условие нормировки спиновой волновой функции $\Psi_{\text{ВК}}^{\sigma_1 \sigma_2}(\vec{k})$, удовлетворяющей одновременному ковариантному квазипотенциальному уравнению /13/:

$$\begin{aligned} 2\Delta_k^\circ [M_\varphi - 2\Delta_k^\circ] \Psi_{\text{ВК}}^{\sigma_1 \sigma_2}(\vec{\Delta}_k) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{\Delta}_p}{2\Delta_p^\circ} V_{\sigma_1 \sigma_2}^{\sigma_1 \sigma_2}(\vec{\Delta}_k; \vec{\Delta}_p | M_\varphi) \Psi_{\text{ВК}}^{\sigma_1 \sigma_2}(\vec{\Delta}_p), \end{aligned}$$

имеет вид

$$\int \frac{d^3 \vec{\Delta}_p}{2\Delta_p^\circ} \Psi_{\text{ВК}}^{\sigma_1 \sigma_2}(\vec{\Delta}_p) \{2\Delta_p^\circ\} \Psi_{\text{ВК}}^{\sigma_1 \sigma_2} = 2M_\varphi, \quad /5/$$

где M_φ - масса связанного состояния; $\vec{\Delta}_p = \vec{\Delta}_{p_1} = -\vec{\Delta}_{p_2}$ - ковариантное обобщение импульсов кварков в с.ц.и. перед рассеянием и $\vec{\Delta}_k = \vec{\Delta}_{k_1} = -\vec{\Delta}_{k_2}$ - после рассеяния. В случае равных масс кварков $\Delta_{p_1}^\circ = \Delta_{p_2}^\circ = \Delta_p^\circ$, $\Delta_{k_1}^\circ = \Delta_{k_2}^\circ = \Delta_k^\circ$. В четырехмерной записи $\Lambda_p^\mu \equiv (L_\varphi^{-1} \mathcal{P})^\mu$, где L_φ^{-1} - чистое преобразование Лоренца в систему покоя всей системы $(L_\varphi^{-1} \mathcal{P})^\mu = (M_\varphi, \vec{0})$. Ядро уравнения $V(\vec{\Delta}_k; \vec{\Delta}_p | M_\varphi)$ есть квазипотенциал, который строится из матричных элементов амплитуды рассеяния, вычисляемых в квантовой теории поля по теории возмущений /5,13/:

Отделяя спиновую часть в $\Psi_{\text{ВК}}^{\sigma_1 \sigma_2}(\vec{k}_1)$, представим волновую функцию π^0 -мезона в следующем виде /8/:

$$\Psi_{\text{ВК}}^{\sigma_1 \sigma_2}(\vec{k}_1) = \bar{u}_q^{\sigma_1}(\vec{k}_1) \gamma_5 \bar{u}_q^{\sigma_2}(\vec{k}_2) \cdot \frac{\tilde{\phi}_{\text{ВК}}(\vec{k}_1)}{2(\mathcal{P}_{k_1})/M_\varphi}, \quad /6/$$

где $\tilde{\phi}_{\text{ВК}}(\vec{k}_1)$ - скалярная функция, удовлетворяющая уравнению /10/:

$$\begin{aligned} 2\Delta_k^\circ (2m_q)^{-1} (M_\varphi - 2\Delta_k^\circ) \tilde{\phi}_{\text{ВК}}(\vec{k}) = \\ = 4(2\pi)^{-3} \int d^3 \vec{\Delta}_k' (2\Delta_k^\circ)^{-1} (2\Delta_k^\circ \Delta_{k'}^\circ - m_q^2) V_0(\vec{\Delta}_k; \vec{\Delta}_k' | M_\varphi) \tilde{\phi}_{\text{ВК}}(\vec{k}'). \end{aligned} \quad /7/$$

где V_0 - пропагатор одноглюонного обмена. Сравнивая правые части /1/ и /2/ между собой и учитывая /3/, /6/, получим выражение

для формфактора $F_{\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma^*}(q_1^2, q_2^2)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_{\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma^*}(q_1^2, q_2^2) = \frac{8m_q s q a}{\sqrt{2\pi} M_\varphi} \times \\ \times \{ 2\pi \int_0^\infty \frac{dk_1 \cdot k_1^2}{2k_1^\circ} \cdot \frac{\tilde{\phi}_{\text{ВК}}(\vec{k}_1)}{2q_1 \cdot k_1} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\frac{q_1^2 - 2q_1^\circ k_1^\circ}{2q_1 \cdot k_1} + z} + (1 \leftrightarrow 2) \}, \end{aligned} \quad /8/$$

где

$$k_1 = |\vec{k}_1|, \quad q_1 = |\vec{q}_1|, \quad z = \cos \theta.$$

После вычисления в /8/ интеграла по dz находим /8,8/:

$$\begin{aligned} F_{\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma^*}(q_1^2, q_2^2) = \frac{8m_q s q a}{\sqrt{2\pi} \cdot M_\varphi} \times \\ \times \{ 2\pi \int_0^\infty \frac{dk_1 \cdot k_1^2}{2k_1^\circ} \cdot \frac{\tilde{\phi}_{\text{ВК}}(\vec{k}_1)}{2q_1 \cdot k_1} \cdot \ln \left| \frac{q_1^2 - 2k_1^\circ \cdot q_1^\circ + 2q_1 \cdot k_1}{q_1^2 - 2k_1^\circ \cdot q_1^\circ - 2q_1 \cdot k_1} \right| + (1 \leftrightarrow 2) \}. \end{aligned} \quad /9/$$

3. ФОРМФАКТОР АННИГИЛЯЦИИ π^0 -МЕЗОНА В ДАЛИТЦ-ПАРУ

Инвариантная амплитуда распада $\pi^0 \rightarrow e^+ e^- \gamma$ имеет следующий вид /см. рис.2/:

$$M_{\pi^0 \rightarrow e^+ e^- \gamma}(q_1 | M_\varphi) = \frac{F_{\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma^*}(q^2, 0)}{q_1^2} j_{\text{em}}^{+\mu}(p_-, p_+) e_2^\nu \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q_1^\rho \mathcal{P}^\sigma, \quad /10/$$

где $j_{\text{em}}^\mu(p_-, p_+) = \bar{u}(p_-) \gamma^\mu v(p_+)$ - электромагнитный ток ($e^+ e^-$)-пары; $q_1^2 = (p_+ + p_-)^2 > 0$;

$$F_{\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma^*}(q_1^2, 0) = f_{\pi^0 \rightarrow 2\gamma} \cdot \tilde{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(q_1^2, 0).$$

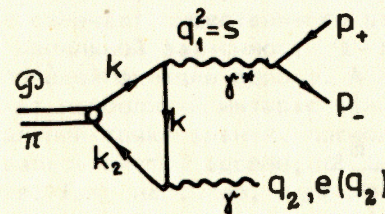


Рис.2. Диаграмма, соответствующая аннигиляции π^0 -мезона в Далитц-пару.

Положив $q_2^2 = 0$ и переходя от интегрирования по импульсу кварка к интегрированию по скорости кварка в формуле /9/, получим следующее выражение для формфактора распада π^0 -мезона на Далиц-пару $\bar{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(q_1^2, 0)$:

$$\bar{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x) = \frac{1}{1-x} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{\int_0^\infty d\chi_k \phi(\chi_k) \ln |X(x, \chi_k)|}{\int_0^\infty d\chi_k \phi(\chi_k) \chi_k} \right\}, \quad /11/$$

где

$$X(x, \chi_k) = \frac{1 - x e^{-\chi_k (M\varphi/m_q - e^{-\chi_k})}}{1 - x e^{\chi_k (M\varphi/m_q - e^{\chi_k})}}, \quad /12/$$

$$4\pi\phi(\chi_k) = k_1 \cdot \tilde{\phi}_{BK}(k_1); \quad k_1 = |\vec{k}_1|,$$

$$x = \frac{(p_+ + p_-)^2}{M\varphi^2}; \quad k_1^0 = m_q \operatorname{ch} \chi_k; \quad k_1 = m_q \operatorname{sh} \chi_k,$$

а $\chi_k = \ln[(k_1^0 + k_1)/m_q]$ - скорость кварка. Интеграл $\int_0^\infty d\chi_k \phi(\chi_k) \chi_k$

определяет постоянную распада $f_{\pi^0 \rightarrow 2\gamma}$, и в рассматриваемом здесь случае спинорных кварков

$$f_{\pi^0 \rightarrow 2\gamma} = \frac{32(2\pi)^{3/2} m_q \alpha S_q}{M\varphi^2} \cdot \int_0^\infty d\chi_k \cdot \phi(\chi_k) \chi_k, \quad /13/$$

а формфактор $\bar{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x)$ нормирован следующим образом: $\bar{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x)|_{x=0} = 1$.

Прежде чем использовать какой-либо конкретный вид волновой функции для вычисления формфактора, проведем предварительный качественный анализ формулы /11/. Нетрудно установить, что логарифмическая функция под знаком интеграла имеет две особые точки

при $1 > x \geq \left(\frac{2m_q}{M\varphi}\right)^2$, а именно:

$$\chi_k^{(\pm)} = \ln \left(\frac{M\varphi}{2m_q} \pm \sqrt{\left(\frac{M\varphi}{2m_q}\right)^2 - \frac{1}{x}} \right), \quad /14/$$

если x лежит в интервале $\left(\frac{2m_q}{M\varphi}\right)^2 \leq x < \frac{m_q}{M\varphi - m_q}$, или

$$\chi_k^{(\pm)} = \pm \ln \left(\frac{M\varphi}{2m_q} \pm \sqrt{\left(\frac{M\varphi}{2m_q}\right)^2 - \frac{1}{x}} \right), \quad /15/$$

если x лежит в интервале $\frac{m_q}{M\varphi - m_q} < x < 1$. Ясно также, что в области $x < \left(\frac{2m_q}{M\varphi}\right)^2$ функция не имеет особенностей вовсе, и тогда

можно определить область, где логарифм будет, например, отрицательным, то есть добавка, обусловленная волновой функцией мезона, будет уменьшать значение формфактора. Нетрудно видеть, что при $(M\varphi/m_q) < 1$ в силу положительности числителя и знаменателя в $X(x, \chi_k)$ формулы /12/ знак модуля в $\ln |X(x, \chi_k)|$ можно опустить и тогда в соответствии с требованием

$$1 - x e^{-\chi_k \left(\frac{M\varphi}{m_q} - e^{-\chi_k}\right)} < 1 - x e^{\chi_k \left(\frac{M\varphi}{m_q} - e^{\chi_k}\right)}$$

эта область будет определяться неравенством

$$\left(e^{-2\chi_k} \frac{M\varphi}{m_q} e^{-\chi_k} + 1 \right) (e^{-2\chi_k} - 1) < 0, \quad /16/$$

которое можно переписать в виде

$$4e^{-2\chi_k} \operatorname{sh} \chi_k \left[\frac{M\varphi}{2m_q} - \operatorname{ch} \chi_k \right] < 0. \quad /17/$$

Легко видеть, что в случае отрицательной энергии связи ($M\varphi < 2m_q$) неравенство /17/ выполняется при всех χ_k , и, следовательно, в целом интеграл в формуле /11/, содержащий логарифм, будет отрицательным.

В случае же положительной энергии связи, когда $M\varphi = 2m_q \operatorname{ch} \chi_0$,

численный анализ показывает, что в интервале $\left(\frac{2m_q}{M\varphi}\right) \leq x < 1$

/м_l - масса лептона/ существуют области χ_k , где функция $X(x, \chi_k)$ имеет отрицательные значения, и поэтому необходимо учитывать знак абсолютной величины в $\ln |X(x, \chi_k)|$ формулы /11/.

Конечно, сам факт отрицательности интегральной добавки еще не означает существенного отклонения поведения формфактора от тривиальной зависимости $(1-x)^{-1}$, которая не учитывает свойств волновой функции адрона. А именно такое отклонение и представляет наибольший интерес как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения, поскольку дает информацию о распределении кварков внутри адрона, то есть о характере их внутреннего движения. Так, например, если мы пренебрежем движением кварков в адроне, то есть ограничимся статическим приближением, то из форму-

лы /11/ следует, что ^{13/}

$$(1-x)\tilde{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x) = 1 + \frac{(M\varphi/2m_q - 1)x}{1 - \frac{M\varphi - m_q}{m_q}x} \quad /18/$$

Вычисляя производную, получаем для наклона формфактора следующее выражение:

$$(1-x) \frac{\tilde{F}'_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x)}{\tilde{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x)} = 1 + \frac{M\varphi/2m_q - 1}{(1 - \frac{M\varphi - m_q}{m_q}x)^2 \tilde{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x)} \quad /19/$$

и в области малых $x \ll 1$ имеем

$$\tilde{F}'_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x) \approx \frac{M\varphi}{2m_q} > 0,$$

следовательно, в этой области $\tilde{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x) \geq 1$.

В другом предельном случае ультрарелятивистского движения кварков /в интеграл основной вклад дают большие значения χ_k / мы приходим к следующему выражению для наклона формфактора:

$$(1-x) \frac{\tilde{F}'_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x)}{\tilde{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x)} \approx 1 - \frac{1}{x \tilde{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x)} \cdot \frac{\int_0^\infty d\chi_k \phi(\chi_k)}{\int_0^\infty d\chi_k \phi(\chi_k) \chi_k} \quad /20/$$

а следовательно, при достаточно малых x производная формфактора будет отрицательна. Это означает, что формфактор имеет минимум в области малых x , лежащий ниже единицы. Следует отметить, что наличие этого эффекта, а также его величину можно определить, лишь зная конкретный вид волновой функции и вычислив интегралы в формуле /11/. В этом плане интересным представляется изучение функции

$$f(x, \chi_k) = \frac{1}{4} \frac{\phi(\chi_k) \ln \left| \frac{1 - xe^{-\chi_k}(M\varphi/m_q - e^{-\chi_k})}{1 - xe^{\chi_k}(M\varphi/m_q - e^{\chi_k})} \right|}{\int_0^\infty d\chi_k \chi_k \cdot \phi(\chi_k)} \quad /21/$$

являющейся подынтегральной функцией в выражении

$$\tilde{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x) = \frac{1}{1-x} \left\{ 1 + \int_0^\infty d\chi_k \cdot f(x, \chi_k) \right\} \quad /22/$$

так как ее абсолютное значение и знак укажут нам на поведение $\tilde{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x)$ в области малых значений x , при которых множитель $(1-x)^{-1}$ еще не дает основного вклада в формфактор.

4. МОДЕЛЬНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ

Для проведения численных расчетов формфактора $F_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x)$ по формуле /11/ мы будем использовать релятивистскую волновую функцию

$$\phi^{(кхд)}(\chi_k) = \frac{C_0^{(1)} \cdot \chi_k}{(\text{ch} \chi_k - \frac{M\varphi}{2m_q}) [\chi_k^2 + (\arccos \frac{M\varphi}{2m_q})^2]} \quad /23/$$

которая была получена в ^{10,11/} как приближенное решение квази-потенциального уравнения для π -мезона /7/ с квазипотенциалом ^{6,12/}:

$$V_0^{\text{эфф. кхд}}(\vec{\Delta}_k; \vec{\Delta}_k | M\varphi) = \frac{-4\pi g^2/m_q^2}{\sqrt{\frac{Q^2}{2m_q^2} (\frac{Q^2}{2m_q^2} + 1) \ln \left[1 + \frac{Q^2}{2m_q^2} + \sqrt{\frac{Q^2}{2m_q^2} (\frac{Q^2}{2m_q^2} + 1)} \right]}} \quad /24/$$

Асимптотика квазипотенциала /24/ при больших передачах импульса $(k-k')^2 = -Q^2$ совпадает с асимптотикой амплитуды одноглюонного обмена:

$$V_0^{\text{эфф. кхд}}(Q^2) \underset{Q^2 \gg m^2}{\sim} - \frac{8\pi g^2}{Q^2 \ln Q^2/m^2}$$

Отличие потенциала /24/ от амплитуды одноглюонного обмена состоит в том, что при малых Q^2 он обладает лишь кулоновской сингулярностью и переходит при $Q^2 \rightarrow 0$ в обычный кулоновский потенциал:

$$V_0^{\text{эфф. кхд}}(Q^2) \underset{Q^2 \rightarrow 0}{\sim} - \frac{8\pi g^2}{Q^2}$$

В соответствии с этим волновая функция /23/ при малых значениях импульсов k , когда $\chi_k = \text{Arsh}(|\vec{k}|/m_q) \rightarrow (|\vec{k}|/m_q)$, переходит в решение нерелятивистского уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом, а собственные значения $M\varphi$ параметризуются следующим образом: $M\varphi = 2m_q \cos \chi_0$.

В ^{6,12/} было показано, что образом потенциала /24/ в релятивистском конфигурационном представлении является потенциал кулоновского вида.

Будем исходить из того, что взаимодействие на малых расстояниях определяется хромодинамическим кулоновским потенциалом в релятивистском конфигурационном представлении, а на больших - запирающим, который и задает спектр масс. В таком случае можно считать, что распад в основном определяется видом волновой функции на малых расстояниях. При этом данная функция может быть представлена как решение квазипотенциального уравнения с хромодинамическим потенциалом, но для положительного знака энергии связи, что обусловлено наличием запирающего потенциала.

Для положительной энергии связи достаточно хорошим приближением волновой функции основного состояния с $\ell = 0$ может быть функция, полученная из /23/ путем подстановки вместо $M\phi$ экспериментально определенного значения массы π^0 -мезона M_π и одновременной замены $\chi_0 \rightarrow i\chi_0$. Легко видеть, что такая замена отвечает переходу от отрицательной энергии связи, где используется параметризация $M_\pi = 2m_q \cos \chi_0$, к положительной с параметризацией $M_\pi = 2m_q \operatorname{ch} \chi_0$. Тогда волновую функцию, описывающую относительное движение кварков на малых расстояниях в хромодинамическом потенциале, но при наличии запирающего потенциала, обеспечивающего положительность энергии связи, можно представить в виде

$$\phi_{\text{зап. кхд}}^{\text{эфф. кхд}}(\chi_k) = \frac{C_0^{(2)} \chi_k}{(\operatorname{ch} \chi_k - \frac{M_\pi}{2m_q}) [\chi_k^2 - (\operatorname{arch} \frac{M_\pi}{2m_q})^2]}, \quad /25/$$

где

$$M_\pi = 2m_q \operatorname{ch} \chi_0.$$

Существует еще один предельный случай, когда волновая функция может быть представлена в аналитическом виде. Этому случаю отвечает приближение, когда взаимодействие определяется потенциалом запирающего осцилляторного типа:

$$V_0^{\text{зап. осц.}}(\vec{\Delta}_k, \vec{\Delta}_k' | M\phi) = \frac{(2\pi)^3 \Delta_k^\circ \cdot m}{4(\Delta_k^\circ \Delta_k^\circ - m^2)} \frac{d}{d\pi_k^2} \Delta_k^\circ \delta(\vec{\Delta}_k - \vec{\Delta}_k'), \quad /26/$$

рассмотренным в работах /9/. В нерелятивистском пределе $2\Delta_k^\circ \Delta_k^\circ - m^2 \rightarrow m^2$, и /26/ преобразуется в образ осцилляторного потенциала в импульсном пространстве.

Мы дополним /25/ потенциалом $(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) V_0$, равным в случае состояния с нулевым спином потенциалу вида $(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) V_0|_{s=0} = -3V_0$, который может вести свое происхождение от спин-спинового взаимодействия в системе двух кварков. Для комбинации этого потенциала с /26/ уравнение /7/ принимает вид уравнения Шредингера с осцилляторным потенциалом, так что волновая функция основного состояния находится легко:

$$\phi^{\text{осц.}}(\chi_k) = C_0^{(3)} \exp[-m_q \operatorname{ch} \chi_k / 2\omega_\pi]. \quad /27/$$

В формулах /23/, /25/ и /27/ $C_0^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) - постоянные нормировки, определяемые из /5/, /6/ с помощью следующего выражения:

$$\int_0^\infty d\chi_k \operatorname{ch} \chi_k |\phi(\chi_k)|^2 = \frac{M_\pi}{(4\pi)^3 m_q}. \quad /28/$$

Для расчета формфактора /11/ с волновыми функциями /ВФ/ /23/ и /25/ положим $m_q = 315$ МэВ и $m_q = 83,8$ кэВ соответственно. Отметим, что хотя ВФ с такими параметрами и дают завышенные по сравнению с экспериментом /18/ значения констант распада ($f_P \rightarrow 2\gamma$), как и в других потенциальных моделях /4/, их применение в /11/ оправдано, так как в выражение /11/ входит лишь отношение интегралов от волновых функций, в котором абсолютное значение постоянной нормировки этих функций, столь существенное для определения величины $f_{\pi^0 \rightarrow 2\gamma}$ /13/, сокращается. Для ВФ /27/ используем $m_q = 138$ МэВ и $\omega_\pi = 268$ МэВ, выбранные таким образом, чтобы рассчитанный с использованием потенциала /26/ спектр масс проходил в пределах ошибок через π -мезон и его π' -резонансы /17/.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Прежде чем обсудить результаты численного расчета $\tilde{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}^*(x)$, рассмотрим функции $f(x, \chi_k)$ /21/ /см. рис. 3а, б/, полученные при использовании волновых функций /23/, /27/ и /25/ соответственно. Из этих рисунков видно, что функция $f(x, \chi_k)$ отрицательна, а ее значения не превышают по абсолютной величине единицы, так что интеграл от функции $f(x, \chi_k)$, фигурирующий в /22/, может рассматриваться как небольшая отрицательная добавка, величина которой зависит от вида волновой функции и области рассматриваемых значений x .

Результаты численного расчета $\tilde{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}^*(x)$ с использованием волновых функций /23/, /25/, /27/ представлены на рис. 4, где также изображена для сравнения кривая формфактора распада $\pi^0 \rightarrow e^+ e^- \gamma$, полученная в работе /3/ в статическом пределе. Из этого рисунка видно, что в области малых x : $(2m_q/M_\pi)^2 \leq x \leq 0,35$, при использовании волновых функций /23/, /25/, /27/ формфактор распада $\pi^0 \rightarrow e^+ e^- \gamma$ имеет минимум, и, таким образом, в рассматриваемой области x функция $\tilde{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}^*(x)$ имеет значения, которые меньше единицы. Область значений x , в которой формфактор имеет значения, которые меньше единицы, существенно зависит от вида взаимодействия между кварком и антикварком, то есть от конкретного вида применяемых нами волновых функций /23/, /25/ и /27/.

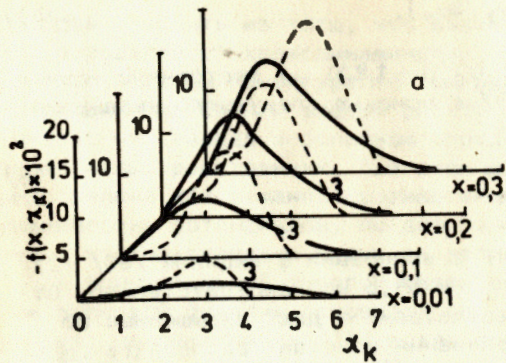


Рис.3. Графики зависимости интегральной добавки $f(x, x_k)$ в /22/ от x_k в области малых значений x : а/ результаты, полученные с помощью волновых функций: — $\phi_{\text{КХД}}(x_k)$ /23/, - - - $\phi_{\text{ОСЦ.}}(x_k)$ /27/; б/ результат, полученный с помощью волновой функции $\phi_{\text{зап.}}^{\text{эфф.КХД}}(x_k)$ /25/.

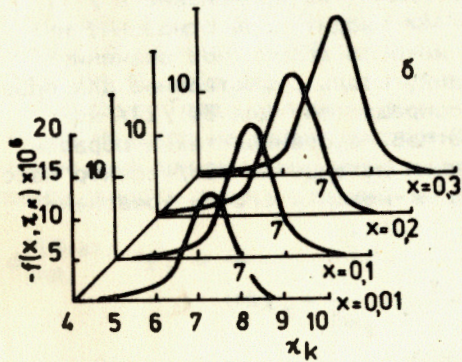
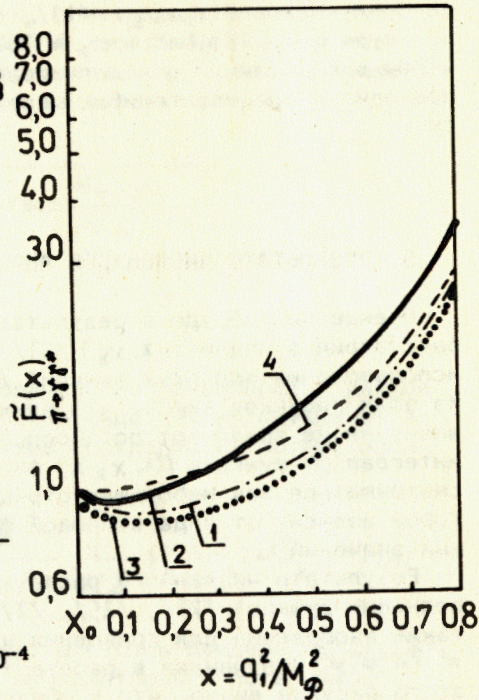


Рис.4. Формфактор π^0 -мезона в распаде $\pi^0 \rightarrow e^+ e^- \gamma$: 1 - $\bar{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x)$ с волновой функцией $\phi_{\text{КХД}}(x_k)$; 2 - $\bar{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x)$ с волновой функцией $\phi_{\text{зап.}}^{\text{эфф.КХД}}(x_k)$; 3 - $\bar{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x)$ с волновой функцией $\phi_{\text{ОСЦ.}}(x_k)$; 4 - $\bar{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x)$, полученный по формуле /13/ из работы /3/, $x_0 = (2m_e/M_\pi)^2 = 0,57 \cdot 10^{-4}$ / m_e - масса электрона/.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы не ставили целью описание экспериментальных данных по распаду π^0 -мезона на Далитц-пару, поскольку это может быть достаточно обосновано лишь с такой волновой функ-

цией, которая являлась бы решением квазипотенциального релятивистского двухчастичного уравнения с полным потенциалом, являющимся комбинацией хромодинамического потенциала одноглюонного обмена на малых расстояниях и запирающего потенциала на больших расстояниях. Однако в рамках использованных нами модельных представлений интересной особенностью поведения полученного формфактора $\bar{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x)$ является обнаруженная на примере трех волновых функций /23/, /25/ и /27/ отвечающих лишь предельным случаям взаимодействия - чисто кулоновского и чисто запирающего/ теоретическая возможность его спадания в области малых x , ниже значения $\bar{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x=0) = 1$.

Величина этого эффекта связана с формой волновой функции, и, как видно из рис.4, существенно зависит от массы кварка, которая определяется из совместного описания спектра радиальных возбуждений π -мезона и их распадов. Тем не менее можно сделать вывод, что структура π -мезона, рассматриваемого как связанное состояние кварка и антикварка, должна проявляться скорее в области небольших значений квадрата инвариантной массы Далитц-пары, чем в области $x > 0,3$, где поведение $\bar{F}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*}(x)$ определяется в основном универсальным фактором $(1-x)^{-1}$, ведущим свое происхождение от амплитуды аннигиляции кварка и антикварка в фотоны. С этой точки зрения экспериментальное изучение поведения формфактора в области $x < 0,3$ представляет собой значительный интерес.

Авторы благодарны С.Б.Герасимову, Г.В.Ефимову, В.Г.Кадышевскому, В.Н.Капшаю, В.А.Матвееву, Л.Л.Неменову за полезные обсуждения и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Samios N.P. Phys.Rev., 1961, 121, p.275; Kobrak H. Nuovo Cim., 1961, 20, p.1115; Devons S. et al. Phys.Rev., 1969, 184, p.1356; Fisher J. et al. Phys.Lett., 1978, 73B, p.359.
2. Ефимов Г.В., Иванов М.А., Мурадов Р.Х. ОИЯИ, P2-13007, Дубна, 1980.
3. Bergström L., Snellman H. Z.Phys., 1981, 8C, p.363.
4. Bergström L., Hulth G., Snellman H. Preprint TH-3381, CERN, Geneva, 1982.
5. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cim., 1963, 29, p.380.
6. Savrin V.I., Skachkov N.B. Lett.Nuovo Cim., 1980, 29, p.363.
7. Bergström L. Preprint TRITA-TFY-81-5, Stockholm, 1981; Bergström L. Z.Phys., 1982, 14C, p.129.
8. Savrin V.I., Skachkov N.B. Preprint IHEP, 82-64, Serpukhov, 1982.

9. Кулешов С.П., Сидоров А.В., Скачков Н.Б. ОИЯИ, P2-82-7, Дубна, 1982; Капшай В.Н., Кулешов С.П., Скачков Н.Б. ОИЯИ, P2-82-271, Дубна, 1982.
10. Savrin V.I., Skachkov N.B., Tyumenkov G.Yu. JINR, E2-82-122, Dubna, 1982.
11. Kapshay V.N. et al. JINR, E2-82-36, Dubna, 1982.
12. Savrin V.I., Skachkov N.B. Preprint CERN, TH-2822, Geneva, 1980.
13. Matveev V.A., Muradyan R.M., Tavkheldidze A.N. JINR, E2-3498, Dubna, 1967; Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. Nuovo Cim., 1968, 55A, p.275; Faustov R.N. Ann.of Phys., 1973, 78, p.176; Архипов А.А., Саврин В.И. ТМФ, 1974, 19, № 3, с.310.
14. Barbieri R., Gatto R., Kögerler R. Phys.Lett., 1976, 60B, p.183.
15. Barbieri R., Gatto R., Remiddi E. Phys.Lett., 1976, 61B, p.465.
16. Browman A. et al. Phys.Rev.Lett., 1974, 33, p.1400.
17. Белини Д.-П. и др. Письма в ЖЭТФ, 1981, 34, с.511; Bellini G. et al. Preprint CERN-EP/81-98, Geneva, 1981; Bellini G. et al. Phys.Rev.Lett., 1982, 48, p.1697.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 марта 1983 года.

Козлов Г.А. и др.

P2-83-129

О поведении формфактора распада π^0 -мезона
в Далитц-пару в области малых инвариантных масс

С учетом волновых функций связанного состояния, являющихся решениями ковариантного одновременного уравнения для системы двух спинорных кварков, вычислена зависимость формфактора распада $F_{\pi^0 \rightarrow e^+e^- \gamma}(s)$ от квадрата инвариантной массы Далитц-пары $s = (p_+ + p_-)^2$ в области малых значений s . В качестве квазипотенциала, определяющего взаимодействие в системе двух кварков, выбираются квазипотенциал одноглюонного обмена и запирающий потенциал осцилляторного типа.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Kozlov G.A. et al.

P2-83-129

On Behaviour of the Form Factor of Decay of the
 π^0 -Meson into the Dalitz Pair in a Region of Small
Invariant Masses

Dependence of the decay form factor $F_{\pi^0 \rightarrow e^+e^- \gamma}(s)$ on the invariant mass squared of the Dalitz pair $s = (p_+ + p_-)^2$ at small s is calculated with the use of bound-state wave functions-solutions of a covariant single-time equation for a system of two spinor quarks. A quasipotential of one-gluon exchange and an oscillator potential are chosen as quasipotential.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой.