

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



24/xii-74

Г-376

P2 - 8287

4887/2-74

В.П.Гердт, В.А.Мещеряков

ЛОКАЛЬНЫЙ ВИД
РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ

1974

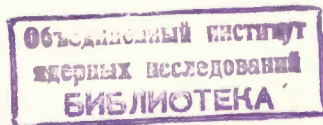
ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 8287

В.П.Гердт, В.А.Мещеряков

ЛОКАЛЬНЫЙ ВИД
РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ

Направлено в ТМФ



Гердт В.П., Мешеряков В.А.

P2 - 8287

Локальный вид решения уравнений Чу-Лоу

Исследована окрестность вырожденной точки покоя уравнений Чу-Лоу. Построено решение, входящее в эту точку. Полученное решение зависит от трех произвольных функций.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1974

Gerdt V.P., Meshcheryakov V.A.

P2 - 8287

Local Form of the Chew-Low Equation
Solution

The neighbourhood of the degenerated rest point of the Chew-Low equations is investigated. The solution is constructed that approaches this point. The obtained solution depends on three arbitrary functions.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1974

1. Введение

Для анализа уравнений Чу-Лоу^{/1/} в их динамической форме^{/2/} весьма плодотворными оказались понятия, выработанные в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, такие, как точка покоя, инвариантная кривая и др. На таком пути доказано^{/3/} существование локально-инвариантного многообразия, содержащего вырожденную точку покоя (П). В окрестности этой точки построена абелева однопараметрическая группа непрерывных преобразований, связанная с исходными разностными уравнениями^{/4/}. Последний результат позволяет применить для детального количественного изучения вырожденной точки покоя групповые дифференциальные уравнения.

Целью настоящей работы является локальное построение решения уравнений Чу-Лоу, входящего в вырожденную точку покоя. Построение основано на интегрировании групповых дифференциальных уравнений (Ш). Показано (IУ), что решение зависит от трех периодических функций в соответствии с произволом, допускаемым исходными разностными уравнениями.

II. Постановка задачи

Уравнения Чу-Лоу можно записать в виде нелинейной краевой задачи в комплексной плоскости энергии рассеивающейся частицы z ^{/5/}. Следующий важный шаг состоит в изучении матричных элементов S -матрицы на всей римановой поверхности, которая определяется алгебраическими точками ветвления на порогах прямого и перекрестного каналов при $z = \pm 1$ и логарифмической точкой ветвления на бесконечности^{/6/}. Такая поверхность подобна однолистной и отображается на нее с помощью преобразования

$$w = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin z .$$

Переменная w является униформирующей переменной, а матричные элементы S -матрицы - однозначными функциями в плоскости w .

Нелинейная краевая задача, эквивалентная уравнениям Чу-Лоу, сводится к следующим основным условиям^{7,8/}:

$$S_i(w) - \text{мероморфные функции}; \quad (I.1)$$

$$S_i^*(w) = S_i(w^*); \quad (I.2)$$

$$S_i(w) S_i(1-w) = 1; \quad (I.3)$$

$$S_i(-w) = \#_{ij} S_j(w); \quad (I.4)$$

и дополнительным локальным условиям

$$S_i(w) = 1 + O((w-1/2)^{2\epsilon+1}); \quad (2.1)$$

$$S_i^*(w) \text{ имеют в нуле полюс первого порядка, } \text{Res } S_i^*(w) = (\lambda_i / \pi) \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon}; \quad (2.2)$$

$$\lim_{|w| \rightarrow \infty, \text{Re } w = \text{Const.}} |w|^{-N} S_i(w) < \infty; \quad (2.3)$$

Локальные условия (2) обеспечивают правильное пороговое поведение, наличие борновского полюса и полиномиальную ограниченность функций

$S_i^*(w)$ при определенном подходе к бесконечно удаленной точке.

Ограничение (2.3) гарантирует применимость формулы Коши, т.е. переход к интегральной форме уравнений Чу-Лоу^{1/}. Вначале рассмотрим условия (I), определяющие общий вид решения нелинейной краевой задачи. Ниже будет показано, что локальным условиям (2) можно удовлетворить за счет произвола в общем решении. Для выяснения указанного произвола представим условия (I.3)-(I.4) в виде системы нелинейных разностных уравнений

$$S_i(w+1) = 1 / \#_{ij} S_j(w), \quad (3)$$

$$S_i(w) S_i(1-w) = 1, \quad (4)$$

Уравнения (3)-(4) вместе с условиями (I.1)-(I.2) допускают замену^{9/}

$$S_i(w) \rightarrow \mathfrak{D}(w) S_i(w + \beta(w)),$$

где

$$\mathfrak{D}(w) \mathfrak{D}(1-w) = 1, \quad \mathfrak{D}(w) = \mathfrak{D}(-w), \quad \mathfrak{D}^*(w) = \mathfrak{D}(w^*), \quad (5)$$

$$\beta(w) = \beta(w+1), \quad \beta(w) = -\beta(-w), \quad \beta^*(w) = \beta(w^*). \quad (6)$$

Происхождение произвола (5) связано с линейностью условия перекрестной симметрии (I.4), в то время, как произвол (6) вытекает из автономности уравнений (3)-(4). При анализе краевой задачи (I) будем отвлекаться от произволов (5)-(6).

Все предыдущее рассмотрение относится к матрице перекрестной симметрии A произвольного порядка. Ниже, для определенности, ограничимся изучением трехрядной матрицы Чу-Лоу. В этом случае

$$\# = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & -8 & 16 \\ -2 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \lambda^0 = \begin{vmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad \#_{ij} \lambda_j^0 = -\lambda_i^0, \quad \epsilon = 1.$$

Решая уравнение (I.4), получим

$$S_i(w) = S_1(w) \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + S_2(w) \begin{vmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} + \Psi(w) \begin{vmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix},$$

$$S_1(w) = S_1(-w), \quad S_2(w) = S_2(-w), \quad \Psi(w) = -\Psi(-w).$$

Переходя к переменным

$$x(w) = \frac{\Psi(w)}{S_1(w)}, \quad y(w) = \frac{S_2(w)}{S_1(w)}, \quad s_1(w),$$

приведем уравнения (3)-(4) к виду

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = -F(y, x) \end{cases}, \quad F(x, y) = \frac{x + 2x^2 - xy - 2y^2}{1 + 3x + 3y - 2x^2 - 3xy - 2y^2}, \quad (7)$$

$$x(w) = -x(-w), \quad y(w) = y(-w), \quad (8)$$

$$s_1 s_1'(1 + 2y + x)(1 - 2y' - x') = 1, \quad s_1(w) = s_1(-w), \quad (9)$$

где

$$x = x(\omega), \quad y = y(\omega), \quad s_1 = s_1(\omega), \\ x^1 = x(\omega^1), \quad y^1 = y(\omega^1), \quad s_1^1 = s_1(\omega^1).$$

Система уравнений (7)–(9), т.е. динамическая форма уравнений Чу–Лоу, имеет шесть различных точек покоя. Ниже ограничимся изучением точки покоя с координатами

$$x = y = 0, \quad s_1 = 1,$$

которую назовем вырожденной^{x)}. В эту точку вследствие условия (2.1) входят решения, обладающие правильным пороговым поведением. Разностные уравнения (7), (9) при действительных значениях ω удобно изучать в действительном фазовом пространстве x, y, s_1 . Тогда уравнения (7), (9) можно интерпретировать как преобразование в фазовом пространстве, при котором точка (x, y, s_1) переходит в точку (x^1, y^1, s_1^1) . В работе^{3/} доказано, что множество точек фазового пространства, инвариантное относительно указанного преобразования, образует поверхность вида

$$s_1 = \Phi(x^2, y). \quad (10)$$

Функция Φ представима сходящимся степенным рядом

$$\Phi(x^2, y) = 1 + 2x^2 + 2y^2 - 8x^2y - \frac{1}{3}y^3 + 12x^2y^2 + 3y^4 + \dots \quad (11)$$

Соотношения (10)–(11) позволяют свести краевую задачу (I) к системе уравнений (7)–(8). Анализ последней представляет самостоятельную задачу, рассмотренную ниже.

x) Название связано с наличием у групповых дифференциальных уравнений в окрестности этой точки траекторий как параболического, так и гиперболического типа^{4/}.

III. Групповые дифференциальные уравнения

Уравнения (3) задают способ аналитического продолжения функций $\zeta(\omega)$ из точки ω в точку ω^1 . Можно получить аналогичные формулы для продолжения в точки $\omega \pm n$ ^{9/}. Для этого удобно ввести нелинейную операцию инверсии I, определяя ее следующим образом:

$$I \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\zeta_1 \\ 1/\zeta_2 \\ 1/\zeta_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда, комбинируя уравнения (3) и (4) в матричной форме, получим

$$\zeta(\omega+n) = (IA)^n \zeta(\omega), \\ \zeta(\omega-n) = (AI)^n \zeta(\omega). \quad (12)$$

Операторы IA и AI взаимнообратны, а их целочисленные степени определяют бесконечную абелеву группу с образующими A и I. Возвращаясь к уравнениям (7), будем рассматривать последние как преобразование фазовой плоскости x, y

$$(x^1, y^1) = T(x, y). \quad (13)$$

Из соотношений (12) следует закон умножения преобразования T, а именно:

$$T^m T^n = T^n T^m = T^{m+n}. \quad (14)$$

Используя уравнения (7), можно представить преобразование T^k в виде соотношений^{4/}

$$x^{(k)} = x + \sum_{m+n \geq 1} a_{m,n}(k, (-1)^k) x^m y^n, \\ y^{(k)} = (-1)^k y + \sum_{m+n \geq 1} b_{m,n}(k, (-1)^k) x^m y^n, \quad (15)$$

где $a_{m,n}$ и $b_{m,n}$ суть полиномы по переменным $k, (-1)^k$.

Соотношения (15) удовлетворяют закону умножения (14) и справедливы для целых κ . Рассмотрению нецелых κ препятствует наличие в формулах (15) выражения $(-1)^\kappa$, которое, в отличие от степеней κ , не допускает единственного аналитического продолжения (нарушение теоремы Карлсона). Поэтому, если ограничиться изучением четных степеней преобразования T , то формулы (15) определяют абелеву однопараметрическую группу непрерывных преобразований G . Элемент этой группы

$$g(\alpha) \in G, \quad g(\alpha) = g^{-1}(-\alpha), \quad (16)$$

действуя на точку (x, y) , переводит ее в точку $(x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)})$

$$g(\alpha)(x, y) = (x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}). \quad (17)$$

Связь группы G с преобразованием (13) дается соотношением

$$g(2\kappa) = T^{2\kappa}, \quad \kappa = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18)$$

Групповые дифференциальные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(\alpha)}}{d\alpha} &= P(x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}), \\ \frac{dy^{(\alpha)}}{d\alpha} &= Q(x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}). \end{aligned} \quad (19)$$

Функции P и Q разлагаются в степенные ряды

$$\begin{aligned} P(x, y) &= -x^2 - 2y^2 - 2xy - 2y^3 + 4x^4 + 14x^2y^2 - \frac{10}{3}y^4 - 32xy^3 + 14x^2y^3 + 6y^5 + \dots, \\ Q(x, y) &= -4xy + 2x^3 + 2xy^2 - 16x^3y - \frac{8}{3}xy^3 + 14x^5 + 50x^3y^2 - 24xy^4 + \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

сходящиеся в некоторой окрестности начала координат. В Приложении

А доказаны следующие свойства этих функций:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= P(-x, y), \\ Q(x, y) &= -Q(-x, y), \end{aligned} \quad (21)$$

являющиеся следствием условия перекрестной симметрии. Используя аддитивную связь параметра α группы G с переменной w , вытекающую из условия (18) и автономности уравнений (19), придадим последним вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dw} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dw} &= Q(x, y). \end{aligned} \quad (19')$$

Анализ уравнений (19) начнем с изучения интегральных кривых (траекторий), определяемых уравнением

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}. \quad (22)$$

Среди решений уравнения (22) наиболее важными являются решения, входящие в начало координат (см. раздел II). Существует три направления (исключительные направления, рис. I), вдоль которых траектории могут входить в начало координат/4/

$$y = 0, \quad y = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}x. \quad (23)$$

Изучение этих направлений удобно проводить с помощью подстановки

$$\begin{aligned} x &= (A^2 + B^2)\xi, \\ y &= (C^2 + D^2)\xi, \end{aligned} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A^2 & B^2 \\ C^2 & D^2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (24)$$

которая приводит уравнение (22) к известному уравнению Брио и Буке/10/:

$$\xi \frac{d\xi}{d\xi} = P_2 + Q_{10}\xi + \sum_{n=2}^{\infty} Q_{n,1}\xi^n \xi^2. \quad (25)$$

Для исследования траекторий, входящих в точку покоя вдоль направлений (23), удобно выбрать параметры подстановки (24) так, чтобы соответствующие кривые в переменных ξ, η входили в начало коор-

динат $\xi = \eta = 0$. Простейший вариант такой подстановки для направления $y = 0$ задается соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \xi, \\ y &= \eta \xi \end{aligned}$$

и приводит уравнение (22) к уравнению (25) следующего вида:

$$\xi \frac{d\eta}{d\xi} = 3\eta - 2\xi\eta - 22\xi^3 + 36\xi^2\eta - 6\xi\eta^2 - 8\eta^3 + \dots \quad (26)$$

Отсутствие в правой части (26) членов четной степени по ξ, η связано со свойством перекрестной симметрии. Коэффициент при η в уравнении (26) есть целое положительное число. Отсюда следует^{/10/}, что общее решение, входящее в точку $\xi = \eta = 0$, дается сходящимся рядом

$$\eta = \sum_{i \geq 0} \beta_{i+1} \xi^{2i+1}.$$

Первый коэффициент этого ряда одинаков для всех решений ($\beta_1 = 1$), второй — произвольное (конечное) число ($\beta_2 \in \mathbb{C}$), а все остальные коэффициенты однозначно выражаются через C . Таким образом, общее решение уравнения (26), входящее в начало координат, имеет вид

$$\eta = \xi + C \xi^3 + \sum_{i \geq 2} \beta_{i+1}(C) \xi^{2i+1}. \quad (27)$$

Полиномы $\beta_i(C)$ находятся подстановкой (27) в (26), например,

$$\beta_2 = 0, \quad \beta_3 = -\frac{45}{2} C^2.$$

Возвращаясь к исходным переменным x, y , получим общий вид траектории параболического типа

$$y = x^2 + C x^3 + \sum_{i \geq 2} \beta_i(C) x^{2i}. \quad (28)$$

Семейство (28) содержит, в частности, известную кривую^{/II, I2/}

$$y = x^2,$$

соответствующую значению $C = 0$, следовательно,

$$\beta_i(0) = 0 \quad (i \geq 1).$$

Теперь рассмотрим направления

$$y = \lambda x, \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad (29)$$

Для изучения траекторий, входящих в начало координат вдоль этих направлений, конкретизируем вид подстановки (24) следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= \xi, \\ y &= (\lambda + \eta) \xi, \end{aligned}$$

после чего из уравнения (22) получим уравнение (25) с $p = -3/2$. Такое значение коэффициента p приводит^{/10/} к существованию единственности и голоморфности решения уравнения (25), входящего в начало координат. В переменных x, y эти свойства переносятся на траектории, входящие в точку покоя вдоль направлений (29). Вычисления приводят к следующему виду указанных траекторий (рис.1):

$$y = \lambda x - \frac{5}{4} x^2 + \frac{425}{112} \lambda x^3 - \frac{75}{8} x^4 + \dots, \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad (30)$$

Вернемся к уравнениям (19). Поскольку траектории (30) не согласуются с соотношениями (8), в дальнейшем ограничимся решениями, соответствующими траекториям параболического типа. Подставляя в первое уравнение системы (19') вместо функции y разложение (28), получим уравнение

$$\frac{dx}{d\omega} = -x^2 + \sum_{i \geq 2} \gamma_i(C) x^{2i}, \quad (31)$$

в котором коэффициенты γ_i суть полиномы по C . Решение уравнения (31), входящее (асимптотически, т.е. при $\omega \rightarrow \infty$) в начало координат, представимо рядом

$$x(\omega) = \sum_{i \geq 0} \frac{\lambda_i(C)}{\omega^{2i+1}}, \quad (32)$$

сходящимся при достаточно большом $|\omega|$ (см. Приложение В).

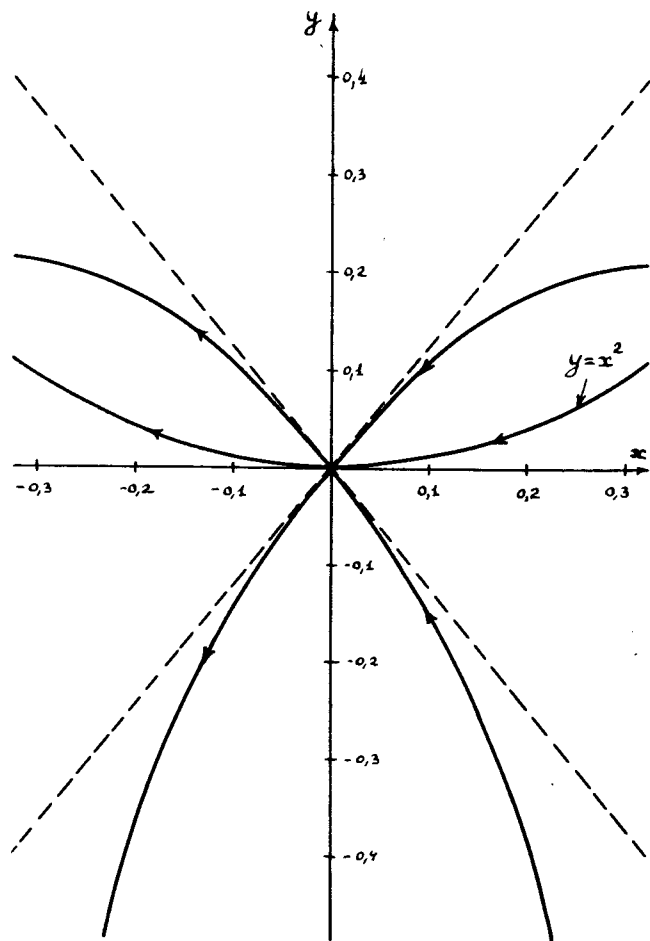


Рис. I

IV. Построение решения уравнений Чу-Лоу

Выше было исследовано множество дискретных решений системы нелинейных разностных уравнений (7), (9). Особое внимание уделялось решениям, входящим в точку $(0,0,1)$ фазового пространства. Оказалось, что все такие решения расположены на инвариантной поверхности (10). С помощью однопараметрической группы непрерывных преобразований G на поверхности (10) введена система инвариантных кривых, заданных формулами (28), (32). Под действием преобразования T точка фазового пространства движется, перескакивая с одной инвариантной кривой на другую^{4/}. Соотношения (10), (28) и (32) дают общий вид дискретного решения (параболического типа) уравнений (7), (9), на основе которого можно построить непрерывные решения этих уравнений.

Рассмотрим две траектории из семейства (28), которые задаются уравнениями $y = f_1(x^2)$ и $y = f_2(x^2)$ с постоянными C_1 и C_2 соответственно. Пусть эти траектории переходят друг в друга под действием преобразования T , что выражается соотношениями

$$\begin{aligned} f_2 [F^2(x, f_1(x^2))] &= - F(f_1(x^2), x), \\ f_1 [F^2(x, f_2(x^2))] &= - F(f_2(x^2), x). \end{aligned} \quad (33)$$

Подстановка в уравнения (33) разложений (28) дает

$$C_1 = - C_2.$$

Отсюда следует, что разложение (28) инвариантно относительно преобразования T , если считать C функцией w , такой, что

$$C(w+1) = - C(w). \quad (34)$$

Далее, соотношения (8) приводят к четности функции $C(w)$

$$C(w) = C(-w). \quad (35)$$

Наконец, из условия (I.2) имеем

$$C^*(w) = C(w^*) \quad (36)$$

Ряд (32) с функцией $C = C(w)$, обладающей свойствами (34)–(36), является непрерывным решением разностных уравнений (7). В этом можно убедиться непосредственной подстановкой (28) и (32) в (7). Следовательно, принимая во внимание β -и \mathcal{D} -производ, из (10), (11), (28) и (32) получим непрерывное решение системы уравнений (7)–(9) в виде:

$$\begin{aligned} x(w) &= \sum_{i \geq 0} \frac{\lambda_i [C(w)]}{[w + \beta(w)]^{2i+1}}, \\ y(w) &= \sum_{i \geq 0} \frac{\mu_i [C(w)]}{[w + \beta(w)]^{2i+2}}, \\ S_i(w) &= \mathcal{D}(w) \sum_{i \geq 0} \frac{\zeta_i [C(w)]}{[w + \beta(w)]^{2i}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Коэффициенты λ_i , μ_i и ζ_i в разложениях (37) являются полиномами по функции $C(w)$. Приведем явный вид этих коэффициентов для $i = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \mu_0 = \zeta_0 = 1, \\ \lambda_1 &= 0, \quad \mu_1 = C(w), \quad \zeta_1 = 2, \\ \lambda_2 &= 2C(w), \quad \mu_2 = 0, \quad \zeta_2 = 3. \end{aligned} \quad (38)$$

Таким образом получаем решение уравнений Чу–Лоу, входящее в вырожденную точку покоя в виде сходящихся рядов (37). Следует отметить, что зависимость решения (37) от трех произвольных функций исчер-

пывает функциональный произвол, допускаемый уравнениями (7), (9), как системой трех разностных уравнений первого порядка^{х)}.

У. Заключение

Общее решение уравнений Чу–Лоу найдено нами в виде сходящихся рядов. Оно позволяет, в принципе, построить решение с борновским полюсом и требуемым пороговым свойством. Пороговому условию (2.1) легко удовлетворить, если наложить на функции $\mathcal{D}(w)$ и $\beta(w)$ следующие ограничения:

$$\mathcal{D}(w) = 1 + O((w - 1/2)^3),$$

$$\beta(w) = \frac{\beta_c(w)}{(w - 1/2)^3}, \quad \text{где } \beta_c(w) \Big|_{w=1/2} \neq 0.$$

Наличие у решения борновского полюса (2.2) приводит к тому, что отношения функций $\dot{S}_i(w)$ в нуле имеют определенное значение, не зависящее от величины константы связи. Точка с координатами

$$\frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \Big|_{w=0} = 4, \quad \frac{\dot{S}_3}{\dot{S}_2} \Big|_{w=0} = -2$$

в результате нескольких итераций по формулам (3) попадает в параболический сектор и приближает к началу координат плоскости x, y . Отсюда ясно, что борновский полюс фиксирует значения функции $C(w)$ в точках $w = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Наконец, конкретные значения вычетов функций $\dot{S}_i(w)$ в нуле определяются функцией $\mathcal{D}(w)$. Тем самым показано существование решения уравнений Чу–Лоу с правильным пороговым поведением и борновским полюсом (см. также работы /14/-/16/). Фактическое построение этого решения представляет отдельную задачу, которая для двухрядной матрицы перекрестной симметрии была решена в работе /13/ и заслуживает отдельного рассмотрения.

х) В случае двухрядной матрицы перекрестной симметрии решение содержит две произвольные функции $\mathcal{D}(w)$ и $\beta(w)$ /13/.

Приложение А

Докажем справедливость соотношений (2I). Комбинируя уравнения (7)-(8), найдем следующий вид преобразования T^{-1} :

$$\begin{aligned} x &= F^{-1}(x', y') \\ y &= -F^{-1}(y', x') \end{aligned}, \quad F^{-1}(x, y) = \frac{x - 2x^2 - xy + 2y^2}{1 - 3x + 3y - 2x^2 + 3xy - 2y^2} \quad (\text{A.I})$$

Вводя преобразование инверсии относительно оси y

$$I_y(x, y) = (-x, y), \quad I_y^{-1} = I_y,$$

и сравнивая обратное преобразование (A.I) с прямым (7), получим соотношение

$$I_y T I_y^{-1} = T^{-1} \quad (\text{A.2})$$

Из (A.2) и (I6) вытекает следующее свойство группы G :

$$I_y g(\alpha) I_y^{-1} = g(-\alpha). \quad (\text{A.3})$$

Для малых α действие $g(\alpha)$ на точку (x, y) согласно (I7) и (I9) сводится к преобразованию

$$g(\alpha)(x, y) = (x + \alpha P(x, y), y + \alpha Q(x, y)). \quad (\text{A.4})$$

Поэтому из равенств (A.3)-(A.4) получим для малых α

$$(x - \alpha P(-x, y), y + \alpha Q(-x, y)) = (x - \alpha P(x, y), y - \alpha Q(x, y)),$$

откуда и вытекают соотношения (2I).

Приложение В

Приведем дифференциальное уравнение (28) к виду

$$\frac{dx}{x^2} \left(-1 + \sum_{i \geq 0} \alpha_i x^{2i+2} \right) = d\omega. \quad (\text{B.I})$$

Интегрируя (B.I) и опуская произвольную постоянную, найдем

$$\frac{1}{x} + \sum_{i \geq 0} \frac{\alpha_i}{2i+1} x^{2i+1} = \omega. \quad (\text{B.2})$$

Делая в уравнении (B.2) замену

$$t = 1/\omega^2,$$

получим

$$t \left(1 + \sum_{i \geq 0} \frac{\alpha_i}{2i+1} x^{2i+2} \right) = x. \quad (\text{B.3})$$

Согласно известной теореме о неявной функции решение $x = x(t)$ уравнения (B.3), проходящее через точку $x = t = 0$, единственно и дается сходящимся рядом

$$x(t) = \sum_{i \geq 0} \lambda_i t^{2i+1},$$

который после возвращения к переменной ω^2 совпадает с разложением (32).

Л и т е р а т у р а

- I. G.F.Chew, F.E. Low. Phys.Rev., 101, 1570 (1956).
2. V.A.Meshcheryakov. In Particle Physics, ed. Martinis M., North-Holland, Amsterdam-London (1974).
3. В.А.Мещеряков. Сообщение ОИЯИ, P2-5906, Дубна, 1971 .
4. В.А.Мещеряков. Сообщение ОИЯИ, P2-7047, Дубна, 1973 .
5. Д.В.Ширков, В.В.Серебряков, В.А.Мещеряков. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях, М., Наука, 1967 .
6. Ning Hu. Nucl.Phys., 5, 1 (1958).
7. V.A.Meshcheryakov, K.V.Rerich. Ann.Phys.,59, 408 (1969).
8. В.А.Мещеряков, К.В.Рерих. ТМФ,3, 78 (1970).
9. В.А.Мещеряков. Препринт ОИЯИ, P-2369, Дубна, 1965 .
10. Н.П.Еругин. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, Минск, Наука и техника, 1972 .
11. J.Rothleitner. Zeit. für Phys., 177, 287 (1964).
12. В.И.Журавлев, В.А. Мещеряков. ЭЧАЯ, т.5, вып. I, М., Атомиздат, 1974 .
13. G.Wanders. Nuovo Cim., 23, 816 (1962).
14. R.L.Warnock. Phys.Rev., 170,1323 (1968); 174, 2169 (1969).
15. H.Mc Daniel, R.L. Warnock. Nuovo Cim., 64, 905 (1969).
16. S.Okubo. Preprint Institute of Theoretical Physics, Göteborg, 1973 .

Рукопись поступила в издательский отдел
25 сентября 1974 г.