СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 8242

Р.П.Зайков

КОНФОРМНЫЕ СВОЙСТВА БИЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р2 - 8242

Р.П.Зайков*

КОНФОРМНЫЕ СВОЙСТВА БИЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

* Высший педагогический институт, Шумен, Болгария.

1. Введение

Конформно-инвариантная локальная квантовая теория поля является весьма привлекательной, с одной стороны, из-за совпадений ее предсказаний с экспериментальными данными по глубоконеупругим процессам [1,2] и, с другой стороны, из-за того, что в ней полностью определены двухточечные и трехточечные функции для взаимодействующих полей [3,4].

В настоящей работе рассматривается закон конформных преобразований билокальных полей в 4-мерном пространстве Минковского. В работах [5,6] было показано, что при специальном выборе координаты центра эти поля преобразуются, как тензорные поля, для которых вообще представления малой подгруппы $[SO(3,1) \square T_{\ }]$. D конформной группы бесконечномерны. В работе [5], исходя из 6-мерного формализма, было получено более сильное ограничение: относительная координата должна быть на световом конусе. Последнее условие мы используем, чтобы свести внутренние переменные к трехмерным.

Построена конформно-инвариантная "двухточечная" функция для билокальных полей. В общем случае эта функция зависит от бесконечного числа произвольных констант. Показано, что при граничном переходе к локальным полям из этой функции автоматически получается двухточечная функция для скалярного поля.

2. Закон преобразования билокального поля

Рассмотрим билокальное скалярное поле, которое относительно конформных преобразований преобразуется по закону:

$$U(\Lambda)\Phi(x_1,x_2)U(\Lambda)^{-1} = \Phi(\Lambda x_1, \Lambda x_2), \qquad /2.1/$$

где $\Lambda \in SO(4,2)$.

Из /2.1/ получим:

$$[P_\mu, \Phi(x_1,x_2)] = i \sum_{a=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_a^\mu} \Phi(x_1,x_2),$$

$$[M_{\mu\nu}, \Phi(x_1,x_2)] = i \sum_{a=1}^{2} \left(x_\mu^a \frac{\partial}{\partial x_a^\nu} - x_\nu^a \frac{\partial}{\partial x_a^\mu}\right)\Phi(x_1,x_2),$$

$$[D, \Phi(x_1,x_2)] = -i \sum_{a=1}^{2} \left(d_a + x_a^\mu \frac{\partial}{\partial x_a^\mu}\right)\Phi(x_1,x_2),$$

$$[K_\mu, \Phi(x_1,x_2)] = i \sum_{a=1}^{2} \left(2 d_a x_\mu^a + 2 x_\mu^a x_a^\nu \frac{\partial}{\partial x_a^\nu} - x_a^2 \frac{\partial}{\partial x_a^\mu}\right) \times$$

$$\times \Phi(x_1,x_2), \qquad /2.2/$$

где P_μ, $M_{\mu\nu}$, D и K_μ - генераторы конформной группы для билокального поля; d_1 и d_2 являются размерностями поля $\Phi(x_1,x_2)$, связанными с координатами x_1 и x_2 соответственно.

Из /2.2/ следует, что билокальное поле $\Phi(x_1,x_2)$ преобразуется по прямому произведению двух неприводимых представлений $[0,d_1]$ и $[0,d_2]$ конформной группы. Наша задача сводится к разложению этого прямого произведения по неприводимым представлениям $[n,d]$ конформной группы.

Переходя к новым координатам посредством линейного преобразования

$$x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2,$$

$$\xi = \epsilon_\alpha (x_1 - x_2), \qquad /2.3/$$

где $\alpha = 0,1$ и $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_1 = -1$, из /2.2/ получаем:

$$[P_\mu, \Phi(x,\xi)] = i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi(x;\xi),$$

$$[M_{\mu\nu}, \Phi(x,\xi)] = [i(x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}) + S_{\mu\nu}]\Phi(x,\xi),$$

$$[D, \Phi(x,\xi)] = (-i x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Delta)\Phi(x,\xi),$$

$$[K_\mu, \Phi(x,\xi)] = \{i[2x_\mu x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} - 2 i x^\nu (g_{\mu\nu}\Delta +$$

$$+ S_{\mu\nu})] + k_\mu\}\Phi(x,\xi). \qquad /2.4/$$

Здесь $S_{\mu\nu}$, Δ и k_μ - генераторы малой подгруппы конформной группы, т.е. подгруппы, сохраняющей $x=0$. Эти генераторы задаются посредством

$$S_{\mu\nu} = i(\xi_\mu \frac{\partial}{\partial \xi^\nu} - \xi_\nu \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}),$$

$$\Delta = -i(d_1 + d_2 + \xi^\mu \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}), \qquad /2.5/$$

$$k_\mu = i[2(d_1\delta_{\alpha,0} + d_2\delta_{\alpha,1})\xi_\mu + 2\xi_\mu \xi^\nu \frac{\partial}{\partial \xi^\nu} - \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}].$$

Можно проверить, что они удовлетворяют коммутационному соотношению малой подгруппы $[SO(3,1) \,\square\, T_4].D$ /3/ и, следовательно, /2.4/ задают генераторы конформной группы для полей со спином.

Из /2.4/ и /2.5/ следует, что генераторы конформной группы имеют вид генераторов для тензорных полей, для которых представления малой подгруппы вообще являются бесконечномерными.

Будем предполагать, что относительная координата ξ находится на световом конусе, т.е. $\xi^2 = 0$. Кроме того, потребуем, чтобы, если $\xi \to 0$, поле ϕ являлось бы локальным скалярным полем.

3. *Конформно-инвариантная "двухточечная" функция билокального поля*

Рассмотрим "двухточечную" функцию билокальных скалярных полей

$$F_{\Phi\Psi}(x_1,x_2;x_3,x_4) = \langle 0|\Phi(x_1,x_2)\Psi(x_3,x_4)|0\rangle, \qquad /3.1/$$

где поля $\Phi(x_1,x_2)$ и $\Psi(x_3,x_4)$ преобразуются по прямым произведениям $[0,d_a]\times[0,d_b]$ неприводимых представлений конформной группы. Кроме того, относительные координаты обоих полей x_1-x_2 и x_3-x_4 находятся на световом конусе, т.е.

$$(x_1-x_2)^2 = (x_3-x_4)^2 = 0. \qquad /3.2/$$

Конформная инвариантность накладывает на функцию /3.1/ следующее условие:

$$F_{\Phi\Psi}(\Lambda x_1, \Lambda x_2; \Lambda x_3, \Lambda x_4) = F_{\Phi\Psi}(x_1,x_2;x_3,x_4), \qquad /3.3/$$

где $\Lambda \in SO(4,2)$.

Трансляционная инвариантность и условие спектральности позволяют записать двухточечную функцию $F_{\Phi\Psi}$ в форме

$$F_{\Phi\psi}(x_2-x_3;\xi_1,\xi_2) = \int d^4p\, \theta(p)\, e^{-ip(x_2-x_3)}\, \tilde{F}_{\Phi\Psi}(p;\xi_1,\xi_2),$$

где $\theta(p) = \Theta(p^0)\,\Theta(p^2)$ - характеристическая функция будущего конуса, а

$$\xi_1 = x_1 - x_2 \qquad \text{и} \qquad \xi_2 = x_1 - x_2. \qquad /3.5/$$

Условие конформной инвариантности двухточечной функции /3.3/ требует:

$$\tilde{F}(\Lambda p; \Lambda\xi_1, \Lambda\xi_2) = \tilde{F}(p;\xi_1,\xi_2), \qquad /3.6/$$

где $\Lambda \in SO(4,2)$.

Релятивистская инвариантность выполнена, если $\tilde{F}$ является функцией 4 независимых скалярных произведений: p^2, $p\xi_1$, $p\xi_2$ и $\xi_1\xi_2$ /здесь $\xi_1^2 = \xi_2^2 = 0$ /, т.е.

$$\tilde{F}(p;\xi_1,\xi_2) = \tilde{F}(p^2, p\xi_1, p\xi_2, \xi_1\xi_2). \qquad /3.7/$$

Инвариантность относительно масштабных и специальных конформных преобразований потребуем в инфинитезимальной форме, т.е.

$$D\tilde{F}(p;\xi_1,\xi_2) = 0, \qquad /3.8/$$

$$K_\mu \tilde{F}(p;\xi_1,\xi_2) = 0, \qquad /3.9/$$

где D и K_μ - генераторы масштабных и специальных конформных преобразований, действующие на ядро двухточечной функции. Они имеют вид

$$D = -i\left(d_\Phi + d_\Psi - 4 - p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} + \xi_1^\mu \frac{\partial}{\partial \xi_1^\mu} + \xi_2^\mu \frac{\partial}{\partial \xi_2^\mu}\right) \qquad /3.10/$$

и

$$K_\mu = i\{(p_\mu y^\nu - y_\mu p^\nu - \delta_\mu^\nu\, py)\frac{\partial}{\partial p^\nu} - 2iy^\nu [g_{\mu\nu}(d_\Phi + d_\Psi - 4) + S_{\mu\nu}^{(1)} + S_{\mu\nu}^{(2)}]$$
$$- 2i[(d_\Phi - d_\Psi)g_{\mu\nu} + \Sigma_{\mu\nu}^{(1)} - \Sigma_{\mu\nu}^{(2)}]\frac{\partial}{\partial p_\nu}\} + k_\mu^{(1)} + k_\mu^{(2)}, \qquad /3.11/$$

где $y = x_2 + x_3$ и $d_\Phi = d_1 + d_2$, $d_\Psi = d_3 + d_4$.

Сначала рассмотрим условие масштабной инвариантности. Из /3.7/, /3.8/ и /3.10/ получаем

$$D\tilde F(p;\xi_1,\xi_2) = -i\left(d_\Phi + d_\Psi - 4 - 2p^2\frac{\partial}{\partial p^2} + 2\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_1\xi_2}\right)\times$$

$$\times\, \tilde F(p;\xi_1,\xi_2) = 0. \qquad /3.12/$$

В этом уравнении не участвуют масштабно-инвариантные переменные $p\xi_1$ и $p\xi_2$.

Решение уравнения /3.12/ можно представить в виде

$$\tilde F(p;\xi_1,\xi_2) = (p^2)^{\frac{d_\Phi + d_\Psi}{2} - 2} f\left(p\xi_1, p\xi_2, w = 1 - \frac{p^2\xi_1\xi_2}{p\xi_1\, p\xi_2}\right), \qquad /3.13/$$

где f - произвольная функция трех масштабно-инвариантных переменных $p\xi_1$, $p\xi_2$ и $w = 1 - \frac{p^2\xi_1\xi_2}{p\xi_1\, p\xi_2}$. Переменную w мы выбрали для удобства. В системе покоя для вектора p $w(\vec p = 0) = \frac{\vec\xi_1\, \vec\xi_2}{|\vec\xi_1||\vec\xi_2|}$, т.е. она является косинусом угла между пространственными частями векторов ξ_1 и ξ_2.

Подставляя /3.11/ и /3.13/ в уравнение /3.9/, выражающее условие инвариантности относительно специальных конформных преобразований, получаем:

$$K_\mu \tilde F(p;\xi_1,\xi_2) = y_\mu D\tilde F(p;\xi_1,\xi_2) + [p_\mu A + \xi^1_\mu B + \xi^2 C]\times$$

$$\times\, \tilde F(p;\xi_1,\xi_2) = 0, \qquad /3.14/$$

где D - оператор масштабных преобразований /3.12/, а операторы A, B и C имеют вид:

$$A = 2(d_\Psi - d_\Phi)\frac{\partial}{\partial p^2}, \qquad /3.15/$$

$$B = (d_\Psi - d_\Phi - 4)\frac{\partial}{\partial p\xi_1} - 2p\xi_1\frac{\partial^2}{\partial (p\xi_1)^2} - 2p^2\frac{\partial^2}{\partial p^2 \partial p\xi_1} -$$

$$- \frac{1}{p\xi_1}\left[2(1-w^2)\frac{\partial^2}{\partial w^2} - 2p^2(1+w)\frac{\partial^2}{\partial p^2 \partial w} - 4w\frac{\partial}{\partial w}\right]$$

$$+ 2i\left(d_1 + p\xi_1\frac{\partial}{\partial p\xi_1}\right), \qquad /3.16/$$

$$C = -B(\xi_1 \to \xi_2\, d_1 \to d_4) + 2(d_\Psi - d_\Phi)\frac{\partial}{\partial p\xi_2}. \qquad /3.17/$$

Уравнения /3.14/ из-за независимости векторов p, ξ_1 и ξ_2 и выполнения уравнения /3.12/ сводятся к следующим трем дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} &A\tilde F(p;\xi_1,\xi_2) = 0,\\ &B\tilde F(p;\xi_1,\xi_2) = 0.\\ &C F(p;\xi_1,\xi_2) = 0. \end{aligned} \qquad /3.18/$$

Подставляя в систему /3.18/, /3.13/, /3.15/-/3.17/, получаем следующую систему частных дифференциальных уравнений для функций $f(p\xi_1, p\xi_2, w)$:

$$(d_\Psi - d_\Phi)\left[d_\Phi + d_\Psi - 4 + 2(w-1)\frac{\partial}{\partial w}\right] f(p\xi_1, p\xi_2, w) = 0, \qquad /3.19/$$

$$\{ p\xi_1 \frac{\partial^2}{\partial p\xi_1^2} + [-d_\Phi - ip\xi_1]\frac{\partial}{\partial p\xi_1} + \frac{1}{p\xi_1}[(1-w^2)\frac{\partial}{\partial w^2} +$$

$$(2-\frac{d_\Phi + d_\Psi}{2} - \frac{d_\Phi + d_\Psi}{2} w)\frac{\partial}{\partial w}] - id_1\} f(p\xi_1, p\xi_2, w) = 0, \qquad /3.20/$$

$$\{ p\xi_2 \frac{\partial^2}{\partial p\xi_2^2} + (d_\Psi + ip\xi_2)\frac{\partial}{\partial p\xi_2} + \frac{1}{p\xi_2}[(1-w^2)\frac{\partial^2}{\partial w^2} +$$

$$+[2-\frac{d_\Phi + d_\Psi}{2} - \frac{d_\Phi + d_\Psi}{2} w]\frac{\partial}{\partial w}] + id_4\} f(p\xi_1, p\xi_2, w) = 0. \qquad /3.21/$$

Уравнение /3.19/ является уравнением первого порядка. Оно удовлетворено, если:

$$d_\Phi - d_\Psi = 0, \qquad \text{т.е. } d = d_1 + d_2 = d_3 + d_4, \qquad /3.22/$$

или

$$f = (1-w)^{2-d} g(p\xi_1, p\xi_2),$$

где $g(p\xi_1, p\xi_2)$ является произвольной функцией переменных $p\xi_1$ и $p\xi_2$. Можно проверить, что второе из решений уравнения /3.19/ несовместимо с уравнениями /3.20/ и /3.21/.

Решение системы дифференциальных уравнений /3.20/ и /3.21/ в том случае, когда выполнено условие /3.22/, можно представить в виде

$$f(p\xi_1, p\xi_2, w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi(n+d_1, d+2n, ip\xi_1) \times$$

$$\times \Phi(n+d_4, d+2n, -ip\xi_2)\, P_n^{(d-2,0)}(w),$$

$$\{(1-w^2)\frac{d^2}{dw^2} - [\beta - a - (a+\beta+2)w]\frac{d}{dw} + n(n+a+\beta+1)\}\times$$

$$\times P_n^{(a,\beta)}(w) = 0. \qquad /3.24/$$

где $\Phi(a,c,z)$ - вырожденная гипергеометрическая функция, регулярная при $z=0$, $\Phi(a,c,0)=1$ и удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$[z\frac{d^2}{dz^2} + (c-z)\frac{d}{dz} - a]\Phi(a,c,z) = 0.$$

Для этой функции существует интегральное представление

$$\Phi(a,c,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{xu} u^{a-1}(1-u)^{c-a-1} du, \qquad /3.25/$$

$P_n^{(a,\beta)}(w)$ - полиномы Якоби, являющиеся регулярными решениями при $w^2=1$ дифференциального уравнения

$$\{(1-w^2)\frac{d^2}{dw^2} - [\beta - a - (a+\beta+2)w]\frac{d}{dw} + n(n+a+\beta+1)\}P_n^{(a,\beta)}(w) = 0.$$

Чтобы получить разложение ядра двухточечной функции по спину, необходимо разложить полиномы Якоби $P_n^{(d-2,0)}(w)$ /если $d \neq 2$/ по полиномам Лежандра:

$$P_n^{(d-2,0)}(w) = \sum_{s=0}^{n} a_s P_s(w), \qquad /3.26/$$

где коэффициенты разложения a_s получены в работе /7/:

$$a_s = \frac{(n+1)(n!)^2 s!\, \Gamma(d+s-1)\Gamma(d-s-2)}{(n-s)!(n+s+1)!\,\Gamma(d-1)\Gamma(d-2)}.$$

Подставляя /3.24/ с учетом /3.22/ и /3.26/ в /3.13/, получаем

$$\tilde{F}(p;\xi_1,\xi_2) = (p^2)^{d-2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{[\Gamma(2n+d)]^2}{\Gamma(n+d_1)\Gamma(n+d_4)\Gamma(n+d_2)\Gamma(n+d_3)} \times$$

$$\int_0^1 du_1 e^{ip\xi_1 u_2} u_1^{n+d_1-1} (1-u_1)^{n+d_2-1} \int_0^1 du_2 e^{-ip\xi_2 u_2} u^{n+d_4-1} \times$$

$$\times (1-u)^{n+d_3-1} \times$$

$$\times (p\xi_1 p\xi_2)^n \sum_{s=0}^{n} \frac{(n+1)(n!)^2 s!\,\Gamma(d+s-1)\,\Gamma(d-s-2)}{(n-s)!\,(n+s+1)!\,\Gamma(d-1)\Gamma(d-2)} P_s(w), \qquad /3.27/$$

являющееся самым общим видом конформно-инвариантного ядра "двухточечной" функции билокального поля. Множитель

$$(p^2)^{d-2} (p\xi_1 p\xi_2)^n \sum_{s=0}^{n} \frac{(n+1)\,(n!)^2 s!\,\Gamma(d+s-1)\,\Gamma(d-s-2)}{(n-s)!\,(n+s+1)!\,\Gamma(d-1)\,\Gamma(d-2)} P_s(w),$$

входящий в /3.27/, представляет собой ядро двухточечной функции локального "основного" тензорного поля ранга n [7]. Как было показано в работе [7], оно положительно определено, если $d > 2$.

При граничном переходе к локальным полям, т.е., если $\xi_1, \xi_2 \to 0$, из /3.27/ получаем

$$\lim_{\xi_1,\xi_2 \to 0} \tilde{F}(p;\xi_1,\xi_2) = \Gamma(d-2) C_0 (p^2)^{d-2};$$

т.е. мы нашли ядро для локального скалярного поля [3].

Автор выражает глубокую благодарность Д.И.Блохинцеву и И.Т.Тодорову за весьма полезные обсуждения.

Литература

1. *В.А.Матвеев, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе. ЭЧАЯ, 2, вып. 1, 7 /1970/.*
2. *J.O.Bjorken. Phys.Rev., 179, 1574 (1969).*
3. *G.Muck and I.T.Todorov. Phys.Rev., D8, 1764 (1973).*
4. *I.T.Todorov. CERN TH-1694, Geneva (1973).*
5. *A.O.Barut, G.L.Bornzin. J.Math.Phys., 15, 1000 (1974).*
6. *Р.П.Зайков. Ежегодник ВПИ, Шумен, 1 /1974/.*
7. *Р.П.Зайков. Препринт ВПИ, Шумен, 1973.*

Рукопись поступила в издательский отдел
3 сентября 1974 года.