ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 8212

Р.П.Зайков

КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ И ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИЙ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 8212

Р.П.Зайков

КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ И ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИЙ

Направлено в Acta Physica Polonica

1. Введение

Как известно [1,2], конформная инвариантность позволяет полностью определить двух- и трехточечную функции. В работе [3] было получено представление конформно-ковариантной двухточечной функции для полей произвольного спина как разложение по неприводимым представлениям квантово-механической группы Пуанкаре. С этой целью, для реализации неприводимых представлений группы $SL(2,C)$, как и в работе [4], используется формализм однородных функций комплексного спинора $z=(z_1, z_2)$.

В настоящей работе этот формализм используется при разложении трехточечной функции. Мы ограничиваемся рассмотрением только трехточечных функций, двух скалярных полей и одного тензорного поля и четырехточечной функции скалярных полей. Разложение будем делать по неприводимым представлениям группы Лоренца, действующей на относительную координату скалярных полей, как в работе [5], и соответствующей квантово-механической группе Пуанкаре. Здесь рассмотрение делается в четырехмерном пространстве Миньковского.

Трехточечная функция интересна еще и тем, что она выполняет роль коэффициентов Клебша-Гордона при конформно-инвариантном парциальном разложении [6]. Чтобы получить полное парциальное разложение, необходимо иметь разложение не только по неприводимым представлениям конформной группы, но и по ее подгруппам Лоренца и Пуанкаре.

Используя эти коэффициенты, мы получили разложение конформно-инвариантной четырехточечной функции скалярных полей в случае, когда две из относительных координат находятся на световом конусе.

2. Трехточечная функция

Рассмотрим трехточечную функцию:

$$G(x_1, x_2, x_3, \xi) = \langle 0 | \phi_1(x_1)\, \phi_2(x\ )\, \Phi(x_3\ , \xi) | 0 \rangle . \qquad /2.1/$$

Здесь поля $\phi_1(x_1)$ и $\phi_2(x_2)$ - скалярные с размерностями d и d , соответственно, а $\Phi(x_3, \xi)$ - тензорное поле с размерностью $d_3 = d_0 + n$, , где n - ранг тензорного поля, т.е. поля $\Phi_i(x_i)$ $(i=1,2)$ и $\Phi(x_3, \xi)$ преобразуются по неприводимым представлениям $[0, d_i]$ и $[n, d_3]$ конформной группы, соответственно. Здесь ξ - 4-мерный изотропный вектор, т.е. $\xi^2 = 0$, $\xi_0 > 0$. Как известно [3,4], $\Phi(x;\xi)$ есть однородный полином от ξ степени n, т.е.

$$\Phi(x;\lambda\xi) = \lambda^n\, \Phi(x;\xi). \qquad /2.2/$$

Из /2.2/ следует, что

$$\bar{\Phi}(x;\xi) = \Phi^{\mu_1 \cdots \mu_n}(x)\, \xi_{\mu_1} \ldots \xi_{\mu_n} \quad (\mu = 0, 1, \ldots 3)\ , \qquad /2.3/$$

где $\bar{\Phi}^{(\mu)}$ - обычные тензорные компоненты поля. Закон преобразования для поля $\Phi(x;\xi)$ имеет вид

$$U(\Lambda)\, \Phi(x;\xi)\, U(\Lambda)^{-1} = \bar{\Phi}(\Lambda x; \Lambda\xi)\ , \qquad /2.4/$$

где

$$\Lambda \in SO(4,2)\ .$$

В инфинитезимальной форме масштабные и специальные конформные преобразования задаются посредством

$$[D, \Phi(x;\xi)] = \left(-i x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Delta\right) \Phi(x;\xi)$$

$$[K_\mu, \Phi(x;\xi)] = i\left[2 x_\mu x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} - 2 i x^\nu (g_{\mu\nu}\Delta + \Sigma_{\mu\nu})\right] \times \Phi(x;\xi). \qquad /2.5/$$

Здесь Δ и $\Sigma_{\mu\nu}$ - генераторы малой подгруппы конформной группы имеют вид

$$\Delta = -i d_3 = -i\left(d_0 + \xi^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}\right), \quad (i = 1,2,3) \qquad /2.6/$$

$$\Sigma_{0j} = -i \xi_0 \frac{\partial}{\partial \xi^i}\ ,$$

$$\Sigma_{jk} = i\left(\xi_j \frac{\partial}{\partial \xi^k} - \xi_k \frac{\partial}{\partial \xi^i}\right). \qquad /2.7/$$

Из /2.5/ соответственно следует, что поле $\Phi(x;\xi)$ преобразуется по классу 1а по классификации Макка-Салама [7]. Закон преобразования скалярных полей получим из /2.5/, если предположить, что поле не зависит от вектора ξ .

В функцию /2.1/ вводим новые переменные

$$x = x_1 - x_2\ ,$$
$$y = x_2\ . \qquad /2.8/$$

Перейдя к импульсному представлению по переменной $y - x_3$, из трансляционной инвариантности и условий спектральности имеем

$$G)\, y - x_3; x, \xi) = \int d^4 p\, \nu(p)\, \ell^{-ip(y-x_3)}\, \tilde{\tilde{G}}(p; x, \xi)\ , \qquad /2.9/$$

где

$$\theta(p) = \Theta(p^0)\, \Theta(p^2)\ .$$

Относительную величину x будем рассматривать как "спиновую" переменную билокального поля $\Phi(x_1, x_2) = \phi(x_1)\, \phi(x_2)$. Как было показано в работе [5] , это поле преобразуется по бесконечной прямой сумме неприводимых представлений спиновой группы $SO(3.1)$. Эти представления реализуются по-разному, в зависимости от $x^2 \gtrless 0$. Здесь мы ограничимся только случаем, когда $x^2 = 0$.

Конформная инвариантность трехточечной функции /2.1/ накладывает на ее фурье-образ $G(p;x,\xi)$ следующее условие:

$$\tilde{G}(\Lambda p;\Lambda x;\Lambda\xi) = \tilde{G}(p;x;\xi), \quad \text{где} \quad \Lambda \in SO(4,2). \qquad /2.10/$$

Релятивистски-инвариантную функцию $\tilde{G}$ получим при условии, что

$$\tilde{G}(p;x;\xi) = \tilde{G}(p^2, x^2, px, p\xi, x\xi). \qquad /2.11/$$

Точнее, $G(p;x,\xi)$является граничным значением функции. аналитической в трубе будущего, т.е.

$$\tilde{G}(p;\zeta,\xi) = \tilde{G}(p^2, x^2 - i\epsilon x_0, px, p\xi, x\xi).$$

Для масштабных и специальных конформных преобразований потребуем инвариантность только в инфинитезимальной форме, т.е. тогда из /2.10/ получим

$$(1 - i\epsilon D)\tilde{G}(p;x,\xi) = 0$$

$$(1 - ic^{\mu}K_{\mu})\tilde{G}(p;x,\xi) = 0,$$

и, следовательно,

$$D\tilde{G}(p;x,\xi) = 0, \qquad /2.12/$$

$$K_{\mu}\tilde{G}(p;x,\xi) = 0. \qquad /2.13/$$

Сначала рассмотрим условие, которое накладывает на функцию $\tilde{G}(p;x,\xi)$ масштабная инвариантность, т.е. условие /2.12/, где D задан посредством

$$D = -i(d_1 + d_2 + d_0 - 4 - p^{\mu}\frac{\partial}{\partial p^{\mu}} + x^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \xi^j\frac{\partial}{\partial \xi^j}). \qquad /2.14/$$

Переходя к релятивистским инвариантным переменным p^2, x^2, px, $p\xi$, $x\xi$, получаем

$$D\tilde{G}(p;x,\xi) = -i(d_1 + d_2 + d_0 - 4 - 2p^2\frac{\partial}{\partial p^2} + 2x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + 2x\xi\frac{\partial}{\partial x\xi})\tilde{G} = 0. \qquad /2.15/$$

Решение последнего уравнения можно представить в виде:

$$\tilde{G}(p;x,\xi) = (x^2 - i\epsilon x_0)^{\frac{d_0 - d_1 - d_2}{2}}(p^2)^{d_0 - 2} \times H(p^2x^2, px, p\xi, p^2x\xi). \qquad /2.16/$$

Из /2.16/ видно, что из масштабной инвариантности следует, что общий вид решения зависит от четырех масштабно-инвариантных переменных:

$$\lambda = p^2x^2, \; u = px, \; v = p\xi \qquad w = p^2x\xi \;[\text{или} \;\cos\theta = 1 - \frac{p^2x\xi}{px\,p\xi}]. \qquad /2.17/$$

Функция H не является произвольной. Из /2.2/ следует, что она есть однородный полином ξ степени однородности n. Кроме того, разложим эту функцию по неприводимым представлениям спиновой группы $SO(3,1)$ и малой подгруппы $SO(3)$ группы Пуанкаре.

Для случая, когда $x^2 = 0$, обобщая результаты работы /4;6/, получаем для общего вида масштабно-инвариантного ядра трехточечную функцию в следующем представлении:

$$\tilde{G}(p;x,\xi) = (x^2 - i\epsilon x_0)^{\frac{d_0 - d_1 - d_2}{2}}(p^2)^{d_0 - 2}(p\xi)^n \times \sum_{\ell=0} d\delta \sum_{s=0}^{\min(\ell,n)} C_s^{\ell\delta}\,\lambda^{\delta}(px)\,P_s(\cos\Theta). \qquad /2.18/$$

Здесь $C_s^{\ell\delta}$ - пока произвольные константы, $P_s(x)$

полиномы Лежандра, являющиеся собственными функциями оператора квадрата спина /A.2/ и /A.4/, $\sum_{\ell} d\delta$ - обозначает суммирование по ℓ и интегрирование по δ.

Конформная инвариантность накладывает еще условие /2.13/. Оператор K_μ можно представить как /8/

$$K_\mu = \mathcal{K}_\mu + k_\mu . \qquad /2.19/$$

Здесь

$$\mathcal{K}_\mu = i\{-4V_\mu + (p_\mu V^\nu - V_\mu p^\nu - \delta_\mu^\nu pV)\frac{\partial}{\partial p^\nu} -$$

$$-2iV^\nu[g_{\mu\nu}(\Delta+\Delta_1) + S_{\mu\nu} + \Sigma_{\mu\nu}] - \qquad /2.20/$$

$$-2i\frac{\partial}{\partial p_\nu}[g_{\mu\nu}(\Delta_1 - \Delta) + S_{\mu\nu} - \Sigma_{\mu\nu}]\},$$

где Δ и $\Sigma_{\mu\nu}$ заданы посредством /2.6/ и /2.7/, а Λ_1 и $S_{\mu\nu}$ имеют вид:

$$\Lambda_1 = -i(d_1 + d_2 + x^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}),\ S_{\mu\nu} = i(x_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}),$$

и $V = y + x_3$.

Генератор k_μ специальных конформных преобразований относительных координат x имеет вид:

$$k_\mu = i(2d_1 x_\mu + 2x_\mu x^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu} - x^2\frac{\partial}{\partial x^\mu}). \qquad /2.21/$$

Сначала будем искать инвариантную функцию относительно генератора $\mathcal{K}_\mu$, т.е. при отсутствии специальных конформных преобразований, действующих на переменной x. В этом случае, перейдя к релятивистски инвариантным переменным, получаем

$$\mathcal{K}_\mu = V_\mu D + p_\mu A + x_\mu B + \xi_\mu C, \qquad /2.22/$$

где D - оператор масштабных преобразований, заданных посредством /2.15/, а операторы A, B и C имеют вид:

$$A = 2(d_0 - d_1 - d_2)\frac{\partial}{\partial p^2} - 4x\frac{\partial^2}{\partial p^2\,\partial x^2},$$

$$B = (d_0 - d_1 - d_2 - 4)\frac{\partial}{\partial px} - 2x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2\,\partial px} -$$

$$-2x\xi\frac{\partial^2}{\partial px\,\partial x\xi} - 2\mu x\frac{\partial^2}{\partial px^2} - 2p^2\frac{\partial^2}{\partial p^2\,\partial px} -$$

$$-4p\xi\frac{\partial^2}{\partial p^2\,\partial x\xi}, \qquad /2.23/$$

$$C = (d_0 - d_1 - d_2 + 4)\frac{\partial}{\partial p\xi} - 2x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2\,\partial p\xi} + 4px\frac{\partial^2}{\partial p^2\,\partial x\xi} +$$

$$+2p\xi\frac{\partial^2}{\partial p\xi^2} + 2x\xi\frac{\partial^2}{\partial\mu\xi\,dx\xi} + 2p^2\frac{\partial^2}{\partial p^2\,\partial p\xi}.$$

Ядро трехточечной функции представим как

$$\tilde{\tilde{G}}(p;x,\xi) = f(px)\,\tilde{\tilde{G}}_1(p;x,\xi), \qquad /2.24/$$

где $f(px)$ - пока неизвестная функция, которую определим из условия /2.13/, а $\tilde{G}_1$ удовлетворяет уравнению:

$$\mathcal{K}_\mu\tilde{G}_1(p;x,\xi) = 0. \qquad /2.25/$$

Из /2.22/ и /2.25/ следует, что должны быть выполнены уравнения

$$A\tilde{G}_1(p;x,\xi) = 0,$$

$$B\tilde{G}_1(p;x,\xi) = 0, \qquad /2.26/$$

$$C\tilde{G}_1(p;x,\xi) = 0.$$

Здесь ядро $\tilde{\tilde{G}}_1$ имеет вид /2.18/ и отличается от $\tilde{\tilde{G}}$ тем, что оно инвариантно относительно $\mathcal{K}_\mu$, а не относительно K_μ.

Из /2.28/ и /2.26/, перейдя к переменным /2.17/, получаем следующую систему частных дифференциальных уравнений:

$$\{(d_0-1)\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}+\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}-(1-\cos\Theta)\lambda\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\cos\Theta}\}\times \tilde{G}_1(p;x,\xi)=0,$$

/2.27/

$$\{d\ px\frac{\partial}{\partial px}-2\lambda px\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial px}-px^2\frac{\partial^2}{\partial px^2}-\{(1-\cos^2\Theta)\frac{\partial^2}{\partial(\cos\Theta)^2}+(2-d_0-d_0\cos\Theta)\frac{\partial}{\partial\cos\Theta}\}-2\cos\Theta\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\cos\Theta}\}\tilde{G}_1(p;x,\xi)=0,$$

$$\{d_0 p\xi\frac{\partial}{\partial p\xi}+p\xi^2\frac{\partial^2}{\partial p\xi^2}+[(1-\cos^2\Theta)\frac{\partial^2}{\partial(\cos\Theta)^2}+(2-d_0-d_0\cos\Theta)\frac{\partial}{\partial\cos\Theta}-2\lambda\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\cos\Theta}\}\tilde{G}_1(p;x,\xi)=0.$$

Рассматривая в /2.18/

$$h^{\ell\delta}(\cos\Theta)=\sum_{s=0} C_s^{\delta\ell}P_s(\cos\Theta) \qquad /2.28/$$

как неизвестную функцию от $\cos\Theta$, и,подставляя /2.18/ в /2.27/, получаем следующую систему уравнений для этой функции:

$$\delta[d_0+\delta-1-(1-\cos\Theta)\frac{d}{d\cos\Theta}]h^{(\ell,\delta)}(\cos\Theta)=0,$$

$$\{(1-\cos^2\Theta)\frac{d^2}{d(\cos\Theta)^2}+(2-d_0-d_0\cos\Theta)\frac{d}{d\cos\Theta}+\ell(\ell+d_0+2\delta-1)\}h^{(\ell,\delta)}(\cos\Theta)=0, \qquad /2.29/$$

$$\{(1-\cos^2\Theta)\frac{d^2}{d(\cos\Theta)^2}+(2-d_0-d_0\cos\Theta)\frac{d}{d\cos\Theta}+n(n+d_0-1)\}h^{(\ell,\delta)}(\cos\Theta)=0.$$

Условия совместимости системы /2.29/ есть

$$\delta=0 \quad \text{и} \quad \ell=n. \qquad /2.30/$$

В этом случае уравнения /2.29/ переходят в уравнение

$$\{(1-\cos^2\Theta)\frac{d^2}{d(\cos\Theta)^2}+(2-d_0-d_0\cos\Theta)\frac{d}{d\cos\Theta}+n(n+d_0-1)\}h^n(\cos\Theta)=0. \qquad /2.31/$$

И, следовательно, решения этого уравнения выражаются посредством полиномов Якоби:

$$h^n(\cos\Theta)=N^n_{d_0}P_n^{(d_0-2,0)}(\cos\Theta). \qquad /2.32/$$

Подставляя /2.32/ и /2.18/, получаем:

$$\tilde{\tilde{G}}_1(p;x,\xi)=N^n_{d_0}(x^2-i\epsilon x_0)^{\frac{d_0-d_1-d_2}{2}}(p^2)^{d_0-2}\times(p\xi px)^n P_n^{(d-2,0)}(\cos\Theta). \qquad /2.33/$$

Из /2.33/ следует, что если $d_0=2$, т.е. в случае, когда имеем каноническую размерность, в /2.33/ участвует только максимальный спин $s=n$. Если $d_0\neq 2$, в /2.33/ содержатся все спины $s=0,1,\ldots,n$. Тогда для разложения по спину необходимо получить разложение h^n по полиномам Лежандра $P_s(\cos\Theta)$, т.е.

$$P_n^{(d_0-2,0)}(\cos\Theta)=\sum_{s=0}^{n}c(d_0,n,s)P_s(\cos\Theta), \qquad /2.34/$$

где коэффициенты $c(d_0,n,s)$ определены посредством

$$c(d_0, n, s) = \int_{-1}^{1} dx\, P_n^{(d_0-2,0)}(x)\, P_s(x) =$$

/2.35/

$$= \frac{(n-1)!\, s!\, \Gamma(d_0+n+s-1)\,\Gamma(d_0-s-2)}{2n!(n-s)!(n+s+1)!\,\Gamma(d_0+n-1)\,\Gamma(d_0-2)}\,.$$

Подставляя /2.34/ в /2.33/, получаем

$$\tilde{\tilde{G}}_1(p;x,\xi) = N_{d_0}^{n}(x^2 - i\epsilon x_0)^{\frac{d_0-d_1-d_2}{2}} (p^2)^{d_0-2} (p x p \xi)^n \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{n} c(d_0, n, s)\, P_s(\cos\Theta)\,. \qquad /2.36/$$

Функцию $\tilde{G}_1$ можно записать в виде:

$$\tilde{\tilde{G}}_1(p;x,\xi) = N_n^{d_0}(x^2 - i\epsilon x_0)^{\frac{d_0-d_1-d_2}{2}} (p^2)^{d_3-2} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{n} c_s\, \Pi_s^n(px, p\xi, \cos\Theta)\,, \qquad /2.37/$$

где операторы проектирования заданы посредством

$$\Pi_s^n(px, p\xi, \cos\Theta) = x_s\left(\frac{px}{\sqrt{p^2}}\,\frac{p\xi}{\sqrt{p^2}}\right)^n P_s(\cos\Theta)\,. \qquad /2.38/$$

Здесь нормировочные константы x_s получены в работе[9] :

$$x_s = \frac{(n+1)(2s+1)(s!)^2(n-s)!}{2^{2(n-s)}(n+s+1)!}\,. \qquad /2.39/$$

Из /2.35/ /2.37/ и /2.39/ следует, что

$$c_s = \frac{2^{2n-2s-1}\,\Gamma(d_0+n+s-1)\,\Gamma(d_0-s-2)}{n(n+1)(2s+1)\,s!(n-s)!\,\Gamma(d_0+n-1)\,\Gamma(d_0-2)}\,.$$

/2.40/

Чтобы получить функцию $f(px)$, определенную уравнением /2.24/, необходимо решить уравнение /2.13/. Из /2.13/ и /2.19/ получаем:

$$(K_\mu + k_\mu)\, G(p;x,\xi) = 0\,. \qquad /2.41/$$

Подставляя /2.20/, /2.21/ и /2.24/ в /2.37/, получаем

$$px\frac{d^2 f}{dpx^2} + (d_0 + 2n + ipx)\frac{df}{dpx} + inf = 0\,. \qquad /2.42/$$

Вводя новую переменную $z = -ipx$, имеем

$$z\frac{d^2 f}{dz^2} + (d_0 + 2n - z)\frac{df}{dz} - nf = 0\,. \qquad /2.43/$$

Решение этого уравнения выражается посредством вырожденной гипергеометрической функции

$$f(z) = \Phi(n, d_0+n, z) =$$

/2.44/

$$= \frac{\Gamma(d_n+n)}{(n-1)!\,\Gamma(d_0)}\int_0^1 du\, u^{n-1}(1-u)^{d_0-1}\, e^{+uz}\,.$$

Подставляя /2.36/ и /2.40/ в /2.24/, получаем окончательно

$$\tilde{\tilde{G}}(p;x,\xi) = N_{d_0}^{n}(x^2 - i\epsilon x_0)^{\frac{d_0-d_1-d_2}{2}} (p^2)^{d_3-2} \times$$

/2.45/

$$\times\, \Phi(n, d_0+n, -ipx) \sum_{s=0}^{n} c_s\, \Pi_s^n(px, p\xi, \cos\Theta)\,.$$

Таким образом, в разложение трехточечной функции входит только одна нормировочная константа.

3. Четырехточечная функция

Рассмотрим четырехточечную функцию:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle 0|\,\phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\,\phi_3(x_3)\,\phi_4(x_4)\,|0\rangle\,,$$

/3.1/

где поля $\phi_i(x_i)$ $(i = 1, ..., 4)$ скалярные, с размерностями d_i соответственно, т.е. преобразующиеся по неприводимому представлению $\chi_i = (0, d_i)$ конформной группы. Здесь ограничимся также только случаем, когда

$$x^2 = (x_1 - x_2)^2 = 0 \quad и \quad y^2 = (x_3 - x_4)^2 = 0 .$$

Переходя к импульсному представлению по переменной $x_2 - x_3$, имеем

$$T(x_1 - x_2 ; x_2 - x_3 , x_3 - x_4) = \int d^n p \ell^{-ip(x_2 - x_3)} \tilde{\tilde{T}}(p; x, y) . \qquad /3.2/$$

Фурье-образ этой функции можно представить следующим образом [6] :

$$\tilde{\tilde{T}}(p; x, y) = \sum_\ell d\delta\, g(\chi)\, \tilde{\tilde{G}}_\chi(p; x \frac{\partial}{\partial z_1}) \tilde{\tilde{F}}_{\tilde{\chi}}(p; z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}) \times$$
$$\times \tilde{\tilde{G}}_\chi(p; z_2, y), \qquad /3.3/$$

где $\tilde{\tilde{G}}_\chi$ - трехточечная функция, $\tilde{\tilde{F}}_{\tilde{\chi}}$ - двухточечная функция для поля, которое преобразуется по "теневому" представлению $\tilde{\chi} = [n, 4 - d]$ представления $\chi = [n, d]$.

Подставляя в /3.3/ $\tilde{\tilde{G}}_\chi$ из /2.45/, для функции распространения $\tilde{\tilde{F}}$ используем представление

$$\tilde{\tilde{F}} = (p^2)^{2-d} \sum_{s=0}^{n} c_s^1 \Pi_s^n(px, py, \cos\Theta) . \qquad /3.4/$$

Используя свойства операторов проектирования

$$\Pi_s^n \Pi_{s'}^{n'} = \delta_{nn'} \delta_{ss'} \Pi_s^n ,$$

получаем

$$\tilde{\tilde{T}}(p; x, y) = (x^2 - i\epsilon x_0)^{-\frac{d_1 + d_2}{2}} (y^2 - i\epsilon y_0)^{-\frac{d_1 + d_2}{2}} (p^2)^{-2} \times$$
$$\times \sum d\delta\, f(\chi) (p^2)^\delta (x^2 - i\epsilon x_0)^{\delta/2} (y^2 - i\epsilon y_0)^{\delta/2} \times$$

$$\times \int_0^1 du\, u^{n-1} (1-u)^{\delta-n-1} e^{-iupx} \int_0^1 dv\, v^{n-1} (1-v)^{\delta-n-1} \times$$
$$\times e^{-ivpy} \sum_{s=0}^{n} b_s \Pi_s^n(px, py, 1 - \frac{p^2\, xy}{px\, py}) . \qquad /3.5/$$

Здесь $f(\chi)$ - произвольная функция, зависящая от $\chi = [n, \delta]$, b_s - коэффициенты, которые определяются из конформной инвариантности, т.е.

$$b_s = c_s^2 c_s^1 . \qquad /3.6/$$

Из /3.9/ и /3.5/ имеем

$$b_s = \frac{2^{2(2n-3s-1)} (n+s+1)^2 [\Gamma(\delta+s-1)]^2 [\Gamma(\delta-n-s-2)]^2}{n^3 (n+1)^4 (2s+1)^2 (s!)^2 [(n-s)!]^2 (n-s-1)!} \times$$
$$\times \frac{\Gamma(s-\delta+3)\, \Gamma(2-\delta-3)}{[\Gamma(\delta-1)]^2 [\Gamma(\delta-n-2)]^2 \Gamma(3-\delta)\, \Gamma(2-\delta)} . \qquad /3.7/$$

Здесь, как и должно быть, четырехточечная функция определяется с точностью до одной произвольной функции f двух независимых переменных /в нашем случае n и δ/.

Автор выражает благодарность Д.И.Блохинцеву, И.Т.Тодорову, Д.Ц.Стоянову за интерес к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Второй оператор Казимира группы Пуанкаре в 4-мерном пространстве-времени имеет вид:

$$S^2 = M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} - \frac{1}{p^2} M_{\mu\lambda} M^{\nu\lambda} p^\mu p_\nu . \qquad /A.1/$$

Нам необходимо найти его собственные функции, т.е. решить уравнение

$$[S^2 - s(s+1)]\, G_s(p; x, \xi) = 0 . \qquad /A.2/$$

Переходя к релятивистским инвариантным переменным /2.17/, из /A.1/ и /A.2/ получаем

$$\left[(1-\cos^2\Theta) \frac{\partial^2}{\partial(\cos\Theta)^2} - 2\cos\Theta \frac{\partial}{\partial\cos\Theta} + s(s+1) \right] \times$$

$$\times G_s(p;x,\xi) = 0 . \qquad /A.3/$$

Решение этого уравнения выражается посредством полиномов Лежандра

$$G_s(p;x,\xi) = h_s(p^2, x^2, px, p\xi)\ P_s(\cos\Theta) , \qquad /A.4/$$

где h_s - произвольная функция.

Литература

1. *A.A.Migdal. Phys.Lett., 37B, 98 (1971); 386 (1971).*
2. *G.Mack and I.T.Todorov. Phys.Rev., D8, 1764 (1973).*
3. *Р.П.Зайков. Спектральное представление конформно-ковариантной двухточечной функции полей произвольного спина. Препринт Высш. пединститут, Шумен, Болгария, 1973.*
4. *I.T.Todorov and R.P.Zaikov. J.Math. Phys., 10, 2014 (1969).*
5. *Д.И.Блохинцев, Р.П.Зайков. Сообщение ОИЯИ, Р2-5304, Дубна, 1970.*
6. *G.Mack. Preprint, BERN University, Bern (1973).*
7. *G.Mack and Abdus Salam. Ann. Phys., (N.Y.) 53, 174 (1969).*
8. *Р.П.Зайков. Конформная алгебра для билокальных полей. Ежегодник Высш. пединститута, Шумен, 1974.*
9. *R.P.Zaikov. Conformal invariant decomposition of Euclidean two-point function for tensor fields. Preprint HPI, Shumen (1974).*

Рукопись поступила в издательский отдел
15 августа 1974 года.