ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 8211

С.В.Голоскоков, С.П.Кулешов, В.А.Матвеев,
М.А.Смондырев

РАССЕЯНИЕ НА БОЛЬШИЕ УГЛЫ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ КВАЗИПОТЕНЦИАЛОВ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 8211

С.В.Голоскоков, С.П.Кулешов, В.А.Матвеев,
М.А.Смондырев

РАССЕЯНИЕ НА БОЛЬШИЕ УГЛЫ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ КВАЗИПОТЕНЦИАЛОВ

Направлено в ТМФ

1. В настоящей работе исследуется рассеяние частиц высоких энергий на большие углы на основе квазипотенциального уравнения Логунова-Тавхелидзе для широкого класса локальных квазипотенциалов, названных нами аналитическими.

Квазипотенциальная теория рассеяния частиц высоких энергий /1/ существенным образом опирается на предположение о гладкости локального двухчастичного квазипотенциала /2/. Гипотеза о гладкости сыграла большую роль для понимания общих закономерностей взаимодействия частиц в области высоких энергий и ограниченных передач импульса.

В случае упругого рассеяния на большие углы предположение о гладкости приводит к экспоненциальному падению дифференциальных сечений с ростом передачи импульса. Это обусловлено тем, что гладкий квазипотенциал, типичным примером которого является гауссовый квазипотенциал, описывает взаимодействие, образно выражаясь, "рыхлых" протяженных систем, разваливающихся при больших передачах импульса почти с единичной вероятностью. Вероятность упругого рассеяния на большие углы оказывается, таким образом, экспоненциально малой величиной. Подобное поведение типично для большинства моделей, в которых адроны рассматриваются как сложные протяженные объекты с внутренними степенями свободы, например, для так называемой "дроплетной" /т.е. капельной/ модели Янга и других.

Последние экспериментальные данные указывают, однако, на возможность более слабого, чем экспоненциальное, спадания дифференциальных сечений рассеяния на большие углы с ростом энергии, например по степенному закону [3].

$$\frac{d\sigma}{dt} \approx \frac{1}{s^n} f\left(\frac{t}{s}\right) \qquad /1.1/$$

при $s \gg m^2$, t/s фиксированном.

Объяснение этому явлению было дано в работе [4] на основе принципа автомодельности, т.е. предположения об отсутствии существенных размерных параметров, определяющих динамику взаимодействия на малых расстояниях. Используя анализ размерностей и соображения о составной природе частиц, можно связать показатель степени n в формуле /1.1/ с числом элементарных составляющих адронов. Например, для случая бинарной реакции $a+b \to a+b$ имеем $n=2(n_a+n_b-1)$, где n_a, n_b - числа элементарных составляющих /кварков/ адронов a, b соответственно.

Возникает вопрос о структуре локального двухчастичного квазипотенциала, приводящего в случае высокоэнергетического рассеяния на большие углы к асимптотическому поведению типа /1.1/.

Ниже мы рассмотрим класс локальных квазипотенциалов, заданных представлением вида:

$$V(s,\vec{\Delta}^2) = \int_0^\infty dx\, \rho(s,x)\, e^{-x\vec{\Delta}^2} \qquad /1.2/$$

и являющихся аналитическими функциями t в полуплоскости $\mathrm{Re}\, t \le 0$.

Относительно функции плотности $\rho(s,x)$ предположим существование слабого предела:

$$\lim_{s\to\infty} s^N \rho(s, x=\eta/s) = \psi(\eta)\,. \qquad /1.3/$$

$$0<\eta<\infty\,;\quad N>0\,.$$

Соответствующие этому представлению локальные квазипотенциалы включают в себя как аналитические квазипотенциалы, представимые в виде суперпозиции потенциалов Юкавы [5], так и гладкие квазипотенциалы, определяемые суперпозицией гауссов~~ских~~ потенциалов.

Квазипотенциалы /1.2/, обладающие свойством /1.3/, мы назовем аналитическими. Для таких потенциалов во втором разделе настоящей работы получено представление амплитуды рассеяния, удобное для изучения ее асимптотических свойств.

В третьем разделе исследовано асимптотическое поведение амплитуды рассеяния на фиксированные углы в пределе высоких энергий.

Нами было показано, что для заданного класса аналитических квазипотенциалов асимптотика амплитуды упругого рассеяния бесспиновых частиц при высоких энергиях и фиксированных углах имеет вид:

$$T(s,t=-\vec{\Delta}^2)\underset{s\to\infty}{\approx} e^{2i\chi_s(0)}\frac{1}{s^N} f\left(\frac{\vec{\Delta}^2}{s}\right) + \quad /\text{обменный вклад}/$$

$\vec{\Delta}^2/s$ - фикс.,

где

$$f\left(\frac{\vec{\Delta}^2}{s}\right) = \int_0^\infty d\eta\, \psi(\eta)\, e^{-\eta\frac{\vec{\Delta}^2}{s}}.$$

Величина $\chi_s(0)$ есть значение функции эйконала

$$\chi_s(\rho) = \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\, V(s,r)$$

при нулевом прицельном параметре

$$\chi_s(0) = \chi_s(\rho=0)\,.$$

Напомним, что поведение амплитуды упругого рассеяния на малые углы определяется исключительно функцией эйконала:

$$T(s,t=-\vec{\Delta}^2)\underset{s\to\infty}{\approx} is\int d^2\vec{\rho}\, e^{i\vec{\rho}\vec{\Delta}}\left(1-e^{2i\chi_s(\rho)}\right).$$

$\vec{\Delta}^2$ - фикс.

Таким образом, найденный нами результат позволяет установить определенную корреляцию асимптотик амплитуды рассеяния при малых и больших углах рассеяния.

Пример использования полученных формул для конкретного квазипотенциала приводится в четвертом разделе.

2. Рассмотрим рассеяние двух скалярных тождественных частиц равной массы. Квазипотенциал с учетом обменных сил /6/ запишем в виде:

$$V(s,\vec{p},\vec{k}) = g(s,\vec{p}-\vec{k}) + h(s,\vec{p}+\vec{k}) . \qquad /2.1/$$

Квазипотенциалы g и h будем называть прямой и обменной частями квазипотенциала. Амплитуда рассеяния может быть представлена тогда в виде:

$$T(s,\vec{p},\vec{k}) = G(s,\vec{p},\vec{k}) + H(s,\vec{p},\vec{k}) . \qquad /2.2/$$

Справедливы равенства

$$g(s,\vec{p}-\vec{k}) = h(s,\vec{p}-\vec{k})$$
$$G(s,\vec{p},-\vec{k}) = H(s,\vec{p},\vec{k}) , \qquad /2.3/$$

откуда для полной амплитуды следует

$$T(s,\vec{p},\vec{k}) = (1+\hat{P})\; G(s,\vec{p},\vec{k}) , \qquad /2.4/$$

где $\hat{P}$ - оператор отражения относительной координаты частиц в конечном состоянии. При действии на амплитуду G на массовой поверхности оператор P производит замену $t \to u$. Амплитуда $G(s,\vec{p},\vec{k})$ удовлетворяет квазипотенциальному уравнению Логунова-Тавхелидзе:

$$G(s,\vec{p},\vec{k}) = g(s,\vec{p}-\vec{k}) + \int \frac{d^3\vec{q}}{\epsilon(\vec{q})} \frac{g(s,\vec{p}-\vec{q})\; G(s,\vec{q},\vec{k})}{\vec{q}^{\,2} - \vec{p}^{\,2} - i0} ,$$
$$\epsilon(\vec{q}) = \sqrt{\vec{q}^{\,2} + m^2} \qquad /2.5/$$

причем на массовой поверхности имеем

$$G(s,\vec{p},\vec{k}) \Big|_{\substack{s = 4(m^2+\vec{p}^{\,2}) \\ t = -(\vec{p}-\vec{k})^2}} = G(s,t) .$$

Будем считать, что квазипотенциал g задан представлением вида /1.2/:

$$g(s,\vec{\Delta}) = isg \int_0^\infty dx\; \rho(s,x)\; e^{-x\vec{\Delta}^2}$$
$$\vec{\Delta} = \vec{p} - \vec{k} . \qquad /2.6/$$

Решения уравнения /2.5/ с квазипотенциалом /2.6/ ищем итерациями

$$G(s,\vec{p},\vec{k}) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{n+1}(s,\vec{p},\vec{k}) ,$$

$$G_1 = g(s,\vec{p}-\vec{k}) , \qquad /2.7/$$

$$G_{n+1}(s,\vec{p},\vec{k}) =$$

$$= (isg)^{n+1} \int\ldots\int \prod_{i=1}^{n} \frac{d\vec{q}_i}{\epsilon(\vec{q}_i)\;(\vec{q}_i^{\,2} - \vec{p}^{\,2} - i0)} \int\ldots\int \prod_{j=1}^{n+1} dx_j\; \rho(x_j) \times$$

$$\times \exp\Big\{-x_1(\vec{p}-\vec{q}_1)^2 - \sum_{\ell=1}^{n-1} x_{\ell+1}(\vec{q}_\ell - \vec{q}_{\ell+1})^2 - x_{n+1}(\vec{q}_n - \vec{k})^2\Big\} .$$

Для диагонализации квадратичной формы в /2.7/ перейдем к новым переменным интегрирования

$$\vec{q}_i = \vec{\Delta}_i + \vec{\lambda}_i$$

$$\lambda_i = \frac{\vec p + \vec k}{2} + \left(1 - 2\,\frac{\sum\limits_{\ell=1}^{i} \frac{1}{x_\ell}}{\sum\limits_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{x_\ell}}\right) \frac{\vec p - \vec k}{2} \,. \qquad /2.8/$$

В результате получим

ЭЧАЯ 1Т

$$G_{n+1}(s, \vec p, \vec k) = (isg)^{n+1} \int \ldots \int \prod_{j=1}^{n+1} dx_j\, \rho(x_j)\; e^{\frac{t}{\sum\limits_{j=1}^{n+1} 1/x_j}} \qquad /2.9/$$

$$\times\, J_n(x_1, \ldots, x_{n+1}),$$

где

$$J_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \int \ldots \int \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3\vec\Delta_i\, \exp\{-C_{ij}\, \vec\Delta_i\, \vec\Delta_j\}}{\epsilon(\vec\Delta_i + \vec\lambda_i)\,[\,(\vec\Delta_i + \vec\lambda_i)^2 - \vec p^{\,2} - i0\,]} \qquad /2.10/$$

Матрица C_{ij} имеет вид:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
x_1 + x_2 & -x_2 & 0 & & & \\
 & & & & 0 & \\
-x_2 & x_2 + x_3 & -x_3 & & & \\
\hline
 & & & -x_{n-1} & x_{n+1} + x_n & -x_n \\
 & 0 & & & & \\
 & & & 0 & -x_n & x_n + x_{n+1}
\end{array}\right)$$

т.е.

$$C_{ij}\, \vec\Delta_i\, \vec\Delta_j = \sum_{k=1}^{n+1} (\vec\Delta_k - \vec\Delta_{k-1})^2\, x_k\,,$$

$$\vec\Delta_0 = \vec\Delta_{n+1} = 0\,. \qquad /2.11/$$

Применяя к представлению /2.9/ метод, изложенный в работах /1/, можем получить главный член амплитуды рассеяния на малые углы при высоких энергиях в $(n+1)$ порядке:

$$G_{n+1}(s, \vec p, \vec k) =$$

$$= isg\, \frac{(-4\pi^2 g)^n}{(n+1)!} \int \ldots \int \prod_{i=1}^{n+1} \left(\frac{dx_i\, \rho(x_i)}{x_i} \right) \frac{\exp\{\, t \,/\, \sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{1}{x_j} \}}{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{1}{x_j}} \,. \qquad /2.12/$$

Это выражение легко приводится к обычной эйкональной форме с помощью представления

$$\frac{e^{\,t \,/\, \sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{1}{x_j}}}{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{1}{x_j}} = \frac{1}{4\pi} \int d^2\vec\rho\; e^{i \vec\rho\, \vec\Delta_\perp}\; e^{-\frac{\rho^2}{4} \sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{1}{x_j}}$$

$$t = -\vec\Delta_\perp^{\,2} \,.$$

Именно, после суммирования по n получаем:

$$G(s, \vec p, \vec k) = \frac{s}{(2\pi)^3} \int d^2\vec\rho\; e^{i \vec\rho\, \vec\Delta_\perp}\, \frac{e^{2i\chi_s(\rho)} - 1}{2i} \qquad /2.13/$$

$$2i\chi_s(\rho) = -4\pi^2 g \int_0^\infty \frac{dx}{x}\, \rho(x)\, e^{-\rho^2/4x} = \frac{2i}{s} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, g\left(s, \sqrt{\rho^2 + z^2}\right),$$

где ρ? $\rho(x, s)$

где $g(s, r)$ - фурье-образ квазипотенциала /2.6/.

3. Изучим теперь высокоэнергетическое поведение амплитуды рассеяния на фиксированные углы, т.е. в пределе

$$s \to \infty, t \to \infty, \frac{|t|}{s} = \frac{1}{2}(1-z) \text{ -фиксировано.} \qquad /3.1/$$

В /3.1/ мы обозначили буквой z косинус угла рассеяния. В пределе /3.1/ основной вклад в асимптотику интеграла /2.9/ дает область $1/\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{x_j} \approx 0$, так как в противном случае имеем убывающую экспоненту $\exp\{-|t|/\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{x_j}\}$.

Для исследования вкладов различных областей обращения в нуль параметров x_i представим каждый из интегралов по dx_i в /2.9/ в виде:

$$\int_0^\infty dx_i = \int_0^\epsilon dx_i + \int_\epsilon^\infty dx_i \quad ,$$

где $\epsilon \approx 1/s^{1-a}$, $0<a<1$. В результате получаем представление

$$G_{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} G_{n+1}^{(m)} \quad , \qquad /3.2/$$

где $G_{n+1}^{(m)}$ задано формулой /2.9/, в которой интегрирование по каким-либо m параметрам x_i проводится в области вблизи нуля, а по остальным - от ϵ до ∞.

Как отмечалось выше, $G_{n+1}^{(0)}$ экспоненциально мало в пределе /3.1/. Для $G_{n+1}^{(1)}$ получаем из /2.9/ выражение

$$G_{n+1}^{(1)}(s,\vec{p},\vec{k}) = (isg)^{n+1}\sum_{\ell=1}^{n+1}\int_\epsilon^\infty dx_1 \dots \int_0^\epsilon dx_\ell \dots \int_\epsilon^\infty dx_{n+1}\prod_{j=1}^{n+1}\rho(x_j)\, e^{-x_\ell|t|} \times$$

$$\times J_n(x_1 \dots x_{n+1})\,|_{x_\ell=0} \qquad /3.3/$$

В /3.3/ мы уже учли тот факт, что x_ℓ лежит вблизи нуля. Согласно /2.10/,

$$J_n(x_1,\dots x_{n+1})\,|_{x_\ell=0} \approx$$

$$\approx \frac{1}{(2p^2)^n}\int d^3\vec{\Delta}_1 \dots d^3\vec{\Delta}_n \frac{\exp\{-\tilde{C}_{ij}\vec{\Delta}_i\vec{\Delta}_j\}}{\prod_{i=1}^{\ell-1}(\vec{\Delta}_i\vec{n}_p - i0)\prod_{i=\ell}^{n}(\vec{\Delta}_i\vec{n}_k - i0)}, \qquad /3.4/$$

где $\vec{n}_p$ и $\vec{n}_k$ - единичные векторы вдоль импульсов $\vec{p}$ и $\vec{k}$ соответственно, а

$$\tilde{C}_{ij}\vec{\Delta}_i\vec{\Delta}_j = \sum_{k=1}^{\ell-1}(\vec{\Delta}_k - \vec{\Delta}_{k-1})^2 x_k + \sum_{k=\ell+1}^{n+1}(\vec{\Delta}_k - \vec{\Delta}_{k-1})^2 x_k$$

$$\vec{\Delta}_0 = \vec{\Delta}_{n+1} = 0. \qquad /3.5/$$

Из /3.4/ и /3.5/ следует, что $J_n\,|_{x_\ell=0}$ представимо в виде произведения

$$J_n\,|_{x_\ell=0} = \frac{1}{(2p^2)^n}\tilde{J}_{\ell-1}\tilde{J}_{n-\ell+1} \quad , \qquad /3.6/$$

где

$$\tilde{J}_{\ell-1} = \int d^3\vec{\Delta}_1 \dots d^3\vec{\Delta}_{\ell-1}\frac{\exp\{-\sum_{k=1}^{\ell-1}x_k(\vec{\Delta}_k - \vec{\Delta}_{k-1})^2\}}{\prod_{i=1}^{\ell-1}(\vec{\Delta}_i\vec{n}_p - i0)},$$

$$\tilde{J}_{n-\ell+1} = \int d^3\vec{\Delta}_\ell \dots d^3\vec{\Delta}_n\frac{\exp\{-\sum_{k=\ell+1}^{n+1}x_k(\vec{\Delta}_k - \vec{\Delta}_{k-1})^2\}}{\prod_{i=\ell}^{n}(\vec{\Delta}_i\vec{n}_k - i0)}. \qquad /3.7/$$

Для вычисления $\tilde{J}_{\ell-1}$ и $\tilde{J}_{n-\ell+1}$ удобно направить ось z вдоль $\vec{n}_{p,k}$ и использовать представление

$$e^{-x_k(\vec{\Delta}_k-\vec{\Delta}_{k-1})_z^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi x_k}} \int_{-\infty}^{\infty} dz_k \, e^{iz_k(\vec{\Delta}_k-\vec{\Delta}_{k-1})_z - \frac{z_k^2}{4x_k}},$$

позволяющее проинтегрировать по $\vec{\Delta}$. Например, для $\tilde{J}_{\ell-1}$ получаем:

$$\tilde{J}_{\ell-1} = (i\pi^{3/2})^{\ell-1} \frac{1}{(x_1 \dots x_{\ell-1})^{3/2}} \int_0^{\infty} dz_1 \dots dz_{\ell-1} \, \theta(z_1-z_2) \times$$

$$\times \theta(z_2-z_3) \dots \theta(z_{\ell-1}) \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{z_k^2}{4x_k}\right\}. \qquad /3.9/$$

Подставим /3.9/ и аналогичное выражение для $\tilde{J}_{n-\ell+1}$ в формулу /3.3/ и проинтегрируем по x_k $(k \neq \ell)$. При этом учтем, что

$$isg\pi^{3/2} \int_{\epsilon}^{\infty} dx \frac{\rho(x)}{x^{3/2}} e^{-\frac{z^2}{4x}} \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} g(s,r)\big|_{\rho=0}. \qquad /3.10/$$

Симметризуя полученные подынтегральные выражения по z_k, приходим к представлению

$$G_{n+1}^{(1)} = isg\int_0^{\epsilon} dx\,\rho(x)\, e^{-|t|x} \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{(\ell-1)!(n-\ell+1)!} \left\{\frac{i}{s}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, g(s,z,\rho=0)\right\}^n$$

$$= \frac{isg}{n!} \int_0^{\epsilon} dx\,\rho(x)\, e^{-|t|x} \,[2i\chi_s(0)]^n. \qquad /3.11/$$

Так как $|t| \to \infty$, то основную роль в /3.11/ играют малые $x \sim 1/s$, т.е. замена

$$isg\int_0^{\epsilon} dx\,\rho(x)\, e^{-|t|x} \longrightarrow isg\int_0^{\infty} dx\,\rho(x)\, e^{-|t|x} = g(s,|t|)$$

не изменит асимптотики выражения /3.11/.

В результате вклад $G_{n+1}^{(1)}$ в полную амплитуду имеет вид

$$G^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} G_{n+1}^{(1)} = g(s,|t|)\, e^{2i\chi_s(0)}. \qquad /3.12/$$

В формуле /3.12/ квазипотенциал $g(s,|t|)$ определен выражением /2.6/ /напомним, что $\Delta^2 = |t| \to \infty$ /, а $\chi_s(0)$ – значение в нуле эйкональной фазы /2.13/. Для выбранного нами класса аналитических потенциалов, обладающих свойством /1.3/, мы можем также написать

$$isg\int_0^{\epsilon} dx\,\rho(x,s)\, e^{-|t|x} \approx \frac{ig}{s^N}\int_0^{\infty} d\eta\,\psi(\eta)\, e^{-\frac{|t|}{s}\eta} = \frac{ig}{s^N} f\left(\frac{|t|}{s}\right),$$

т.е. амплитуда $G^{(1)}$ имеет асимптотический вид

$$G^{(1)} \approx \frac{ig}{s^N} f\left(\frac{|t|}{s}\right) e^{2i\chi_s(0)}, \qquad /3.13/$$

что приведет к степенному падению дифференциального сечения в соответствии с выражением /1.1/.

Рассмотрим теперь член $G_{n+1}^{(2)}$ в разложении /3.2/:

$$G_{n+1}^{(2)} = (isg)^{n+1} \sum_{\ell<k=1}^{n+1} \int_{\epsilon}^{\infty} dx_1 \dots \int_0^{\epsilon} dx_\ell \dots \int_0^{\epsilon} dx_k \dots \int_{\epsilon}^{\infty} dx_{n+1} \, e^{-\frac{|t|\, x_\ell x_k}{x_\ell + x_k}}$$

$$/3.14/$$

$$\times \prod_{j=1}^{n+1} \rho(x_j)\, J_n(x_1,\dots,x_{n+1})\big|_{x_\ell, x_k \to 0} = \sum_{\ell<k=1}^{n+1} G_{\ell k}.$$

В отличие от вычисления $G^{(1)}_{n+1}$ мы теперь не можем всюду в J_n положить $x_\ell = x_k = 0$, так как при этом, вообще говоря, могут появиться расходимости в интегралах по $\vec{\Delta}_i$. Это происходит вследствие исчезновения в форме $C_{ij}\vec{\Delta}_i\vec{\Delta}_j$ при x_ℓ, $x_k \to 0$ членов, квадратичных по $\vec{\Delta}_\ell$ и $\vec{\Delta}_k$. Наибольшую опасность в этом смысле представляют значения k и ℓ, отличающиеся на единицу. Это означает, что именно эти члены и дадут главный вклад в асимптотику $G^{(2)}_{n+1}$. При переходе в J_n к пределу x_ℓ, $x_{\ell+1} \to 0$ мы удержим поэтому члены, обеспечивающие нам сходимость интеграла по $\vec{\Delta}_\ell$. Именно,

$$C_{ij}\vec{\Delta}_i\vec{\Delta}_j\Big|\xrightarrow[x_\ell,\, x_{\ell+1}\to 0]{}\sum_{i=1}^{\ell-1}(\vec{\Delta}_i-\vec{\Delta}_{i-1})^2 x_i+\vec{\Delta}_\ell^2(x_\ell+x_{\ell+1})+$$

$$+\sum_{i=\ell+2}^{n+1}(\vec{\Delta}_i-\vec{\Delta}_{i-1})^2 x_i\,. \qquad /3.15/$$

Тогда можно написать выражение, аналогичное /3.6/:

$$J_n(x_1,\dots,x_{n+1})_{x_\ell,\,x_{\ell+1}\to 0}\approx\frac{1}{(2p^2)^{n-1}}\tilde{J}_{\ell-1}\,\tilde{J}_{n-\ell}\,J\,, \qquad /3.16/$$

где $\tilde{J}_{\ell-1}$ определено формулами /3.7/ и /3.9/, $\tilde{J}_{n-\ell}$ совпадает с $\tilde{J}_{n-\ell+1}$ при замене $\ell\to\ell+1$, а J задано выражением

$$J=\int d^3\vec{\Delta}_\ell\,\frac{e^{-\vec{\Delta}_\ell^2(x_\ell+x_{\ell+1})}}{\epsilon(\vec{\Delta}_\ell+\vec{\lambda}_\ell)\,[\,(\vec{\Delta}_\ell+\vec{\lambda}_\ell)^2-p^2-i0\,]}\,, \qquad /3.17/$$

$$\vec{\lambda}_\ell=\frac{x_\ell\vec{p}+x_{\ell+1}\vec{k}}{x_\ell+x_{\ell+1}}\,.$$

Подставляя выражения для $\tilde{J}_{\ell-1}$, $\tilde{J}_{n-\ell}$ и J в формулу, определяющую $G_{\ell,\ell+1}$, получаем:

$$G_{\ell,\ell+1}=(isg)^2\frac{[\,i\chi_s(0)\,]^{n-1}}{(\ell-1)!(n-\ell)!}\int_0^\epsilon dx_\ell\,dx_{\ell+1}\,\rho(x_\ell)\,\rho(x_{\ell+1})\,e^{-|t|\frac{x_\ell x_{\ell+1}}{x_\ell+x_{\ell+1}}}J. \qquad /3.18/$$

Производя замену $x_\ell, x_{\ell+1}\to\frac{\eta_1}{s},\frac{\eta_2}{s}$ и переходя к пределу $s\to\infty$, получаем для нашего класса квазипотенциалов

$$G_{\ell,\ell+1}=\frac{(ig)^2}{s^{2N}}\frac{[\,i\chi_s(0)\,]^{n-1}}{(\ell-1)!(n-\ell)!}\int_0^{s^a}d\eta_1\,d\eta_2\,\psi(\eta_1)\,\psi(\eta_2)\,e^{-\frac{|t|}{s}\frac{\eta_1\eta_2}{\eta_1+\eta_2}}\tilde{J} \qquad /3.19/$$

$$\tilde{J}=\int\frac{d^3\vec{\Delta}}{|\vec{\Delta}+\tilde{\vec{\lambda}}|}\,\frac{e^{-\vec{\Delta}^2(\eta_1+\eta_2)}}{[\,(\vec{\Delta}+\tilde{\vec{\lambda}})^2-\frac{1}{4}-i0\,]}\,,\qquad \tilde{\vec{\lambda}}=\frac{\eta_1\vec{n}_p+\eta_2\vec{n}_k}{2(\eta_1+\eta_2)}$$

Можно показать, что из /3.19/ следует ограничение на асимптотическое поведение $G_{\ell,\ell+1}$:

$$G_{\ell,\ell+1}<\frac{1}{s^N\,s^{N(1-a)}}\,,\qquad 0<a<1\,. \qquad /3.20/$$

Сравнивая /3.20/ с /3.13/, убеждаемся, что вклад в амплитуду рассеяния от $G^{(1)}$ асимптотически больше, чем от $G^{(2)}$. Можно убедиться аналогичным образом, что это справедливо в отношении любой амплитуды $G^{(m)}$ с $m>1$. Таким образом, формула /3.12/ определяет всю амплитуду рассеяния G. Если теперь подставить /3.12/ в /2.4/, то получим асимптотическое выражение для полной амплитуды рассеяния:

$$T(s,\vec{p},\vec{k})\approx e^{2i\chi_s(0)}\,[\,g(s,|t|)+g(s,|u|)\,]\,. \qquad /3.21/$$

В заключении этого раздела заметим, что /3.12/ может быть получена экстраполяцией эйконального представления /2.13/ в область больших передач импульса. Действительно, используя разложение /2.12/ и изложенный метод, получим при $t \to -\infty$

$$G_{n+1}^{\text{эйк.}} \approx isg \frac{(-4\pi^2 g)^n}{n!} \left(\int_0^\infty dx \frac{\rho(x)}{x} \right)^n \int_0^\epsilon dx\, \rho(x)\, e^{-|t|x} =$$

$$= g(s,|t|) \frac{1}{n!} \left(-4\pi^2 g \int_0^\infty dx \frac{\rho(x)}{x} \right)^n$$

и после суммирования по n и использования выражения /2.13/ для эйкональной фазы $\chi_s(\rho)$:

$$G^{\text{эйк.}} \Big|_{|t|\to\infty} \approx g(s,|t|)\, e^{2i\chi_s(0)} ,$$

что в точности совпадает с /3.12/.

4. Приведем несложный пример использования полученных формул. В качестве квазипотенциала g выберем гауссов квазипотенциал с малой добавкой, удовлетворяющей условию /1.3/. Именно,

$$\rho(x) = \delta(x-a) + \left(\frac{h}{isg}\right) \frac{1}{s^{M-I}} x^m e^{-bx} \qquad m > 0 . \qquad /4.1/$$

При рассеянии на малые углы основной вклад дает область $s \to \infty$, x - фиксировано, т.е. $\rho(x) \to \delta(x-a)$, и мы получаем эйкональное представление для рассеяния на гауссовом потенциале. При этом эйкональная фаза определена выражением /см. /2.13//

$$2i\chi_s^{\text{эйк.}}(\rho) = -\frac{4\pi^2 g}{a} e^{-\rho^2/4a} ; \quad 2i\chi_s^{\text{эйк.}}(0) = -\frac{4\pi^2 g}{a} . \qquad /4.2/$$

При рассеянии на фиксированные углы доминирует область $s \to \infty$, $xs = \eta$ - фиксировано. При этом

$$\psi(\eta) = \lim_{s\to\infty} s^N \rho\left(s, x = \frac{\eta}{s}\right) = \frac{h}{ig} \eta^m ,$$
$$N = M + m . \qquad /4.3/$$

Используя результаты /3.13/, /3.21/ и обозначение /3.1/, получаем

$$T(s,\vec{p},\vec{k}) = \frac{hm!\, 2^{m+I}}{s^N} e^{-\frac{4\pi^2 g}{a}} \left[\frac{1}{(1-z)^{m+I}} + \frac{1}{(1+z)^{m+I}} \right] . \qquad /4.4/$$

Мы видим, что выбранный нами в качестве примера квазипотенциал, определяемый плотностью ρ /4.1/, приводит к степенному падению амплитуды рассеяния на фиксированные углы. При этом зависимость амплитуды от косинуса угла рассеяния такова, что имеются одинаковые пики при рассеянии вперед и назад, как и должно быть в случае тождественных частиц. Отметим, что учет спина рассеивающихся частиц приводит, вообще говоря, к появлению в амплитуде дополнительной зависимости от z, определяемой спиновой структурой квазипотенциала.

Из эйконального представления с фазой /4.2/ следует, что

$$\sigma_{tot} = 8\pi a\, I(x) , \quad I(x) = \int_0^x \frac{dy}{y}(1 - e^{-y}) ,$$
$$x = \frac{4\pi^2 g}{a} , \qquad /4.5/$$

откуда

$$\sigma_{tot} < a \ln x , \qquad x \to \infty . \qquad /4.6/$$

С другой стороны, из /4.4/ видно, что для сохранения степенного закона убывания амплитуды рассеяния на большие углы необходимо, чтобы рост x не превышал ln s. Если считать [7], что рассеяние на малые углы описывается гауссовым квазипотенциалом с радиусом $a \sim \ln s$, то получаем в нашей модели ограничение на рост полного сечения

$$\sigma_{tot} \lesssim \mathrm{Const}\ \ln s\ (\ln \ln s)\ . \qquad /4.7/$$

Формула /4.7/ является примером отмеченной во Введении корреляции между рассеянием на малые и большие углы.

Авторы выражают глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову, А.А.Логунову, А.Н.Тавхелидзе за внимание к работе и ценные замечания. Мы признательны В.Р.Гарсеванишвили, А.В.Ефремову, А.Н.Квинихидзе, Р.М.Мурадяну, А.Н.Сисакяну, Л.Д.Соловьеву, Р.Н.Фаустову и Д.В.Ширкову за плодотворные обсуждения.

Литература

1. *В.Г.Кадышевский, А.Н.Тавхелидзе. В сборнике "Проблемы теоретической физики", "Наука", М., 1969. А.А.Логунов, О.А.Хрусталев. ЭЧАЯ, 1, 72, Атомиздат, 1970. В.Р.Гарсеванишвили, В.А.Матвеев, Л.А.Слепченко. ЭЧАЯ, 1, 91, Атомиздат, 1970.*
   V.R. Garsevanishvili, V.A.Matveev, L.A.Slepchenko, A.N.Tavkhelidze. Phys.Rev., D1, 849, 1971.
2. *D.I.Blokhintsev. Nucl.Phys., 31, 628, 1962.*
   S.P.Alliluev, S.S.Gershtein, A.A.Logunov. Phys.Lett., 18, 195, 1965.
3. *G.Giacomelli. Rapporteur's Talk at the XVI-th International Conference on High Energy Physics, Batavia, 1972.*
   D.Cline et al. Nucl.Phys., 55B, 157, 1973.
4. *V.A.Matveev, R.M.Muradyan, A.N.Tavkhelidze. Lett Nuovo Cimento, 7, 719, 1973.*
   В.А.Матвеев, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе. ОИЯИ, Е2-8048, Дубна, 1974.
5. *A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, I.T.Todorov, O.A.Khrustalev. Nuovo Cim., 30, 134, 1963.*
6. *В.Р.Гарсеванишвили, С.В.Голоскоков, В.А.Матвеев, Л.А.Слепченко. ЯФ, 10, 627, 1969.*
   А.А.Архипов, В.И.Саврин, Н.Е.Тюрин. ЯФ, 14, 1066, 1971.
7. *С.П.Кулешов, В.А.Матвеев, А.Н.Сисакян, М.А.Смондырев, А.Н.Тавхелидзе. ОИЯИ, Е2-7720, Дубна, 1973. С.В.Голоскоков, В.А.Матвеев. ЯФ, 16, 1297, 1972.*

Рукопись поступила в издательский отдел 15 августа 1974 года.