

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

1141/83

10/3-83

P2-82-914

С.Н.Николаев, А.В.Радюшкин

ВАКУУМНЫЕ ПОПРАВКИ  
К КХД ПРАВИЛАМ СУММ ДЛЯ ЧАРМОНИЯ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1982

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Метод КХД правил сумм<sup>/1/</sup> пользуется в настоящее время все большей популярностью среди теоретиков, занимающихся приложениями КХД к расчету физических величин. Весьма привлекательной чертой метода является его близость в вычислительном аспекте к стандартным методам теории возмущений. В то же время, благодаря включению в схему ненулевых вакуумных средних /BC/ локальных операторов типа  $\langle \bar{q}q \rangle$ ,  $\langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle$  и т.п., метод КХД правил сумм позволяет исследовать такие свойства адронов, как массы, лептонные ширины и формфакторы, существенным образом зависящие от динамики взаимодействия на больших расстояниях, т.е. от непертурбативных эффектов.

В отсутствие последовательной теории КХД вакуума вакуумные средние упомянутого типа фактически играют роль фундаментальных констант, характеризующих вакуумную структуру. Для их оценки, однако, можно воспользоваться существующими моделями вакуумных флуктуаций: приближением разреженного инстантонного газа /см., например, <sup>/1/</sup> /, моделью инстантонной жидкости<sup>/2/</sup>, инстантонной моделью Илленфрида и Моллер-Пройскора<sup>/3/</sup> и т.д. Имеются также попытки вычисления BC  $\langle GG \rangle$ ,  $\langle GGG \rangle$  в теории поля на решетке<sup>/4,5/</sup>. Подставляя модельные значения BC в соответствующие правила сумм, можно судить о правильности допущений и предположений, лежащих в основе той или иной модели КХД вакуума.

Можно также поставить задачу феноменологического определения BC в рамках метода КХД правил сумм путем фитирования имеющихся экспериментальных данных. Однако для надежного определения BC при учете лишь нескольких первых членов степенного ряда необходимо знать характер сходимости этого ряда. Этот вопрос исследовался в точно решаемых моделях - нерелятивистской потенциальной теории<sup>/6-8/</sup> и двумерной хромодинамике<sup>/9,10/</sup>. Было установлено, что хотя в целом картина в этих моделях согласуется с предположениями работы<sup>/1/</sup>, однако степенной ряд по  $1/m_c^2$  для аналогов чармония сходится довольно медленно. Вследствие этого оценки на параметр  $\phi$  /аналогичный  $\langle g^2 G^2 \rangle / m_c^4$  /, полученные фитированием точного результата /"экспериментальных данных"/ формулами низшего нетривиального /т.е.  $O(\phi)$  / приближения, являются довольно грубыми. Как правило, величина  $\phi$  занижается в 2-3 раза.

В этой связи представляется важным выяснить, с какой именно ситуацией - быстрой или медленной сходимостью ряда по  $1/m_c^2$  - мы имеем дело в реальном случае 4-мерной КХД. Для этого необходимо провести вычисление высших степенных поправок /типа  $\langle G^3 \rangle / m_c^6$ ,

ОБЪЕДИНЕННЫЕ ИНСТИТУТЫ

ЕВРЕЙСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА

$\langle G^4 \rangle / m_c^8$  /, что является весьма непростой задачей, особенно в прямолинейном подходе /1/. В сообщении /11/ нами был предложен новый метод, позволяющий получать степенные поправки к рассматриваемым поляризационным операторам непосредственно в терминах ВС калибровочно-инвариантных операторов\*. Соответствующий алгоритм /подробно описанный в /15/ / был реализован нами на ЭВМ с использованием программы аналитических вычислений SCHOONSCHIP /16/

В настоящей работе проведено вычисление степенных поправок к КХД правилам сумм для чармония ( $J^{PC} = 0^{++}, 0^{-+}, 1^{--}, 1^{+-}$ ) вплоть до членов ( $m_c^8$ ). Краткое обсуждение полученных нами результатов для векторного канала ( $J^{PC} = 1^{--}$ ) дано в /17/.

## 2. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР В ВАКУУМНОМ ГЛЮОННОМ ПОЛЕ

### 2.1. Вводные замечания

Основной величиной, исследуемой в методе квантово-хромодинамических правил сумм, является поляризационный оператор  $\Pi^\Gamma(q)$ , связанный с некоторым током  $j^\Gamma$ :

$$\Pi^\Gamma(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ j^\Gamma(x) j^\Gamma(0) \} | 0 \rangle. \quad /2.1/$$

В данной работе мы ограничимся рассмотрением простейших  $\bar{c}c$ -токов ( $\Gamma = 1, i\gamma_5, \gamma_\mu, (q_\mu q_\nu / q^2 - g_{\mu\nu}) \gamma_\nu \gamma_5$ ), связанных с КХД правилами сумм для чармония. Согласно анализу, выполненному в /1/, амплитуду  $\Pi(q)$  необходимо вычислять в области  $q^2 < 0$ , в которой поправки к простейшему вкладу /рис.1а/ малы вследствие асимптотической свободы.

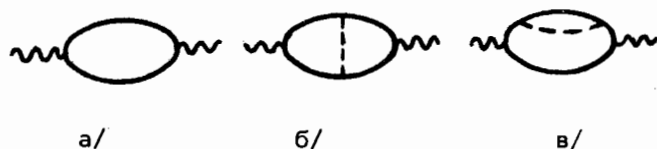


Рис.1. Диаграммы теории возмущений для  $\Pi^\Gamma(q)$ .

Во-первых, имеются теоретико-возмущенческие /или пертурбативные/ поправки, простейшие из которых связаны с диаграммами рис.1б,в. Явные выражения для их вкладов в случае векторного тока можно получить, используя расчеты, приведенные в книге Швин-

\* Независимо аналогичная схема расчетов была разработана в статьях /12-14/.



Рис.2. Однопетлевые диаграммы, соответствующие взаимодействию с вакуумным глюонным полем.

гера /18/. Для других токов вклады диаграмм рис.1б,в были вычислены Рейндерсом и др. /19/ /см. также /20/ /. Что касается поправок следующего порядка /т.е. 3-петлевых/, то, насколько нам известно, в настоящее время не существует расчетного метода, позволяющего вычислить их вклады при ненулевых массах кварков. Однако после ренормгруппового "улучшения" ряда теории возмущений вклады диаграмм высших порядков подавлены множителем  $\alpha_s / \pi \leq 0,1$  на каждую петлю, и поэтому вкладом высших пертурбативных поправок можно, как правило, пренебречь.

Во-вторых, в КХД необходимо учесть также поправки, обусловленные непертурбативными флуктуациями вакуумных полей. Как подчеркивалось в работе /1/, именно эти поправки /а не высшие члены разложения по  $\alpha_s$  / ответственны за нарушение асимптотической свободы при  $q^2$  близких к порогу рождения  $\bar{c}c$ -пары. Некоторые из диаграмм, описывающих взаимодействия, обусловленные вакуумными полями, показаны на рис.2. В дополнение к двум внешним линиям, соответствующим токам, входящим в определение /2.1/, эти диаграммы имеют также внешние линии, соответствующие легким частицам /т.е. u-, d-, s-кваркам и глюонам/, поглощаемым или испускаемым вакуумными полями /1/.

В этой работе главное внимание будет уделено вычислению наиболее важных 1-петлевых диаграмм, которые, как легко заметить, соответствуют вакуумным поправкам к пертурбативной диаграмме низшего порядка.

### 2.2. Ковариантный метод внешнего поля

Амплитуда  $\Pi^\Gamma(q)$ , отвечающая сумме 1-петлевых диаграмм типа показанных на рис.2,1а, выражается через свертку кварковых пропагаторов во внешнем вакуумном поле A:

$$\Pi^\Gamma(q) = i \int d^4x e^{iqx} \text{Sp} \{ \Gamma_1 S^c(x, y; A) \Gamma_2 S^c(y, x; A) \}. \quad /2.2/$$

Вычисление поляризационного оператора  $\Pi^\Gamma(q)$  произведем с использованием представления пропагатора кварка в поле A, при котором

зависимость от векторного потенциала выделяется в виде экспоненциальных множителей <sup>/11,15/</sup>

$$S^c(x, y; A) = \hat{E}(x, z_0; A) S^c(x, y; G, D, z_0) \hat{E}(z_0, y; A), \quad /2.3/$$

где  $z_0$  - некоторая фиксированная /т.е. не зависящая от  $x, y$  / точка в пространстве, а  $\hat{E}(x, z_0; A)$  - упорядоченная экспонента, соответствующая прямолинейному пути,

$$\hat{E}(x, z_0; A) = P \exp[ig(x^\mu - z_0^\mu) \int_0^1 dt \hat{A}_\mu(z_0 + t(x - z_0))]. \quad /2.4/$$

Экспоненты  $\hat{E}$ , входящие в  $S^c(x, y; A)$ , сокращаются в /2.2/ с аналогичными множителями в  $S^c(y, x; A)$ , так что в приведенном выражении можно заменить  $S^c$  на  $S^c(x, y; G, D, z_0)$ . Используя для  $S^c(G, D)$  разложение по напряженности глюонного поля  $G(z_0)$ ,

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad /2.5/$$

и ее ковариантным производным  $D \dots DG(z_0)$ ,

$$G_{\mu\nu}^a; a_1 \dots a_n = (\tilde{D}_{a_n}^a)^{aa_1} (\tilde{D}_{a_{n-1}}^a)^{a_1 a_2} \dots (\tilde{D}_{a_1}^a)^{a_{n-1} b} G_{\mu\nu}^b \quad /2.6/$$

/где  $\tilde{D}_a = \partial_a - ig A_a^b \sigma^b$ ,  $\sigma^a$  - матрицы калибровочной группы в глюонном /присоединенном/ представлении/, получаем ряд вкладов типа показанных на рис.3, в которых внешним линиям соответствуют  $G_{\mu\nu}^a; a_1 \dots a_n$ ,

а кварк-глюонной вершине - фактор  $\tau^a \gamma_\mu (\partial_\nu - i(y - z_0)_\nu) (\partial_{a_1} - i(y - z_0)_{a_1}) \dots$

$\dots (\partial_{a_n} - i(y - z_0)_{a_n})$ . Число ковариантных производных будем указывать рядом с вершиной диаграмм.

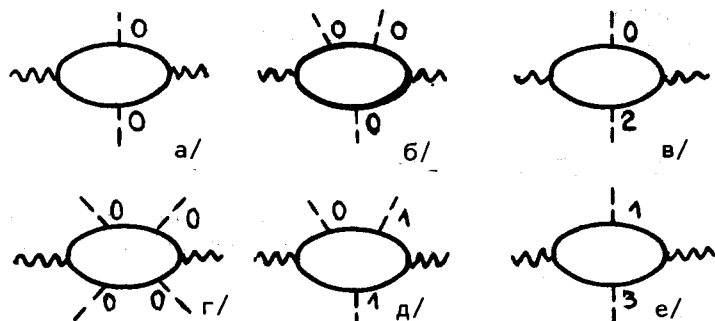


Рис.3. Однопетлевые диаграммы, соответствующие взаимодействию с вакуумным глюонным полем в модифицированной форме п.2.2. а/, б/, г/ GG-, GGG-, GGGG -диаграммы соответственно; в/ G(DDG) - диаграмма, д/ G(DG)(DG) -диаграмма, е/ (DG)(DDDG) -диаграмма.

Зависимость амплитуды  $\Pi^\Gamma(q)$  от  $z_0$ -точки разложения внешнего поля проявляется через аргументы вакуумных матричных элементов составных операторов  $\langle G_{\mu\nu}^a; a_1 \dots a_n(z_0) G_{\mu_1\nu_1}^b; \beta_1 \dots \beta_m(z_0) \dots \rangle$ ,

которые в силу трансляционной инвариантности не зависят от  $z_0$ , а также через множители типа  $(y - z_0)_a$  от тейлоровского разложения внешнего поля. Вычисления, проведенные на ЭВМ с использованием программы аналитических вычислений SCHOONSCHIP<sup>/16/</sup> по схеме, подробно описанной в <sup>/15/</sup> для случая произвольного параметра  $z_0$ , показывают, что  $z_0$ -зависимость нетривиальным образом сокращается для суммы диаграмм с фиксированной размерностью внешнего поля и  $z_0$  является в действительности калибровочным параметром <sup>/11,12,15/</sup>.

### 2.3. Структура вакуумных средних

Вклады диаграмм в  $\Pi^\Gamma(q)$  зависят от вакуумных средних /BC/ составных операторов различных размерностей  $d_i$ , которые сопровождаются множителем  $1/(Q^2)^{d_i/2}$ , где  $Q^2 = -q^2$ .

Таким образом, мы естественно приходим к представлению  $\Pi^\Gamma(q)$  в виде степенного ряда по  $1/Q^2$ . Как уже отмечалось, коэффициенты разложения не зависят от  $z_0$ , то есть разложение калибровочно инвариантно. Но для того, чтобы показать это, необходимо использовать все связи между матричными элементами операторов одинаковой размерности, иными словами, найти для каждой размерности  $d_i$  соответствующий базис BC. Поскольку минимальная размерность оператора, имеющего отличное от нуля вакуумное среднее, равна четырем, то разложение  $\Pi^\Gamma(q)$  начинается с члена, пропорционального  $1/Q^4$ . Соответствующее BC /глюонный конденсат/,

$$\langle g^2 G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle = O_2, \quad /2.7/$$

было впервые введено в рассмотрение в <sup>/1/</sup>. Следующий член разложения ( $\sim 1/Q^6$ ) параметризуется двумя независимыми BC:

$$\langle g^3 f^{abc} G_{\mu\nu}^a G_{\nu\lambda}^b G_{\lambda\mu}^c \rangle = O_3^1$$

и

$$\langle g^4 j_\mu^a j_\mu^a \rangle = O_3^2, \quad /2.8/$$

где  $j_\mu^a$  - цветной ток легких кварков, появляющийся в результате применения уравнений движения

$$G_{\mu\nu}^a; \nu = g j_\mu^a = g \sum_{\psi=u,d,s} \bar{\psi} \gamma_\mu \tau^a \psi. \quad /2.9/$$

Переход к минимальному базису осуществляется применением трансляционной инвариантности, в силу которой справедливо

$$\langle G_{;a_1 \dots a_n} G_{;\beta_1 \dots \beta_m} \rangle = - \langle G_{;a_1 \dots a_{n-1}} G_{;\beta_1 \dots \beta_m} \rangle, \quad /2.10/$$

использованием тождества Бианки:

$$G_{\mu\nu;\lambda} + G_{\nu\lambda;\mu} + G_{\lambda\mu;\nu} = 0, \quad /2.11/$$

и коммутационного тождества:

$$(\tilde{D}_a \tilde{D}_\beta - \tilde{D}_\beta \tilde{D}_a)^{ab} = g f^{abc} G_{a\beta}^c. \quad /2.12/$$

Используя /2.9-2.12/, легко показать, что возникающее в этом порядке среднее по вакууму  $\langle g^2 G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu;aa}^a \rangle$  сводится к  $O_3^1, O_3^2$ :

$$\langle g^2 G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu;aa}^a \rangle = 2(O_3^1 - O_3^2). \quad /2.13/$$

Вычисление вклада, пропорционального  $1/Q^8$ , сопряжено со значительно большим разнообразием возникающих операторных средних размерности 8.

Трансляционная инвариантность и тождество Бианки позволяют свести все ВС локальных операторов типов  $\langle DDDDGG \rangle$  к десяти,  $\langle DDGGG \rangle$  - к пяти и  $\langle GGGG \rangle$  - к четырем.

Далее можно показать, что у ВС типа  $\langle Sp(\hat{G}_{\mu\nu} \hat{G}_{\alpha\beta}) \rangle$  отлична от нуля только часть, пропорциональная антисимметричным структурным константам  $f^{abc}$  цветовой группы  $SU(3)_c$ , поскольку все операторы типа  $d^{abc} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^b G_{\mu\nu}^c$  в вакуумных обкладках равны нулю по свойствам цветовой и лоренц-симметрии, например,

$$\langle d^{abc} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\alpha}^b G_{\nu\beta}^c \rangle = - \langle d^{abc} G_{\nu\mu}^a G_{\nu\beta}^b G_{\mu\alpha}^c \rangle = 0.$$

Антисимметризация по цвету уменьшает число ВС типа  $\langle DDGGG \rangle$  до четырех. Вакуумное среднее  $\langle G_{\mu\nu; \nu\mu}^a G_{\alpha\beta; \beta\alpha}^a \rangle$  равно нулю, поскольку

$$G_{\alpha\beta; \beta\alpha}^a \equiv g j_{a; \alpha}^a = \frac{1}{2} (\tilde{D}_a \tilde{D}_\beta - \tilde{D}_\beta \tilde{D}_a)^{ab} G_{\alpha\beta}^b = \frac{1}{2} g f^{abc} G_{\alpha\beta}^c G_{\alpha\beta}^b = 0.$$

Коммутационное тождество /2.12/ позволяет записать восемь связей между ВС типа  $\langle DDDDGG \rangle$  и  $\langle DDGGG \rangle$  и две связи между последними и ВС  $\langle GGGG \rangle$ -типа, использование которых позволяет выбрать базис вакуумных средних операторов размерности  $d=8$  из семи элементов:

$$\langle g^4 Sp(\hat{G}_{\mu\nu} \hat{G}_{\mu\nu} \hat{G}_{\alpha\beta} \hat{G}_{\alpha\beta}) \rangle \equiv O_4^1, \quad \langle g^4 Sp(\hat{G}_{\mu\nu} \hat{G}_{\alpha\beta} \hat{G}_{\mu\nu} \hat{G}_{\alpha\beta}) \rangle \equiv O_4^2,$$

$$\langle g^4 Sp(\hat{G}_{\mu\nu} \hat{G}_{\nu\alpha} \hat{G}_{\alpha\beta} \hat{G}_{\beta\mu}) \rangle \equiv O_4^3, \quad \langle g^4 Sp(\hat{G}_{\mu\nu} \hat{G}_{\alpha\beta} \hat{G}_{\nu\alpha} \hat{G}_{\beta\mu}) \rangle \equiv O_4^4, \quad /2.14/$$

$$\langle g^5 f^{abc} G_{\mu\nu}^a j_{\mu}^b j_{\nu}^c \rangle \equiv O_4^5, \quad \langle g^3 f^{abc} G_{\mu\nu}^a G_{\nu\lambda}^b G_{\lambda\mu;aa}^c \rangle \equiv O_4^6, \quad \langle g^4 j_{\mu}^a j_{\mu;aa}^a \rangle \equiv O_4^7.$$

Выбор такой параметризации вклада  $\sim 1/Q^8$  продиктован соображениями удобства количественных оценок ВС /см. раздел 3.3/ и был использован нами в работе /17/. Необходимо отметить, что в то время как ВС  $O_4^5, O_4^6$  и  $O_4^7$  "элементарны" по цвету, первые четыре ВС допускают раскрытие цветовой структуры за счет некоторого увеличения числа операторов. В данной работе мы будем пользоваться вместо  $O_4^1, O_4^2, O_4^3$  и  $O_4^4$  их линейными комбинациями:

$$O_4^{1+2} \equiv 4(O_4^1 + O_4^2) = \langle g^4 (d^{abc} G_{\mu\nu}^a G_{\alpha\beta}^b)^2 \rangle + \frac{2}{3} \langle g^4 (G_{\mu\nu}^a G_{\alpha\beta}^a)^2 \rangle,$$

$$O_4^{1-2} \equiv 4(O_4^1 - O_4^2) = \langle g^4 (f^{abc} G_{\mu\nu}^a G_{\alpha\beta}^b)^2 \rangle, \quad /2.15/$$

$$O_4^{3+4} \equiv 4(O_4^3 + O_4^4) = \langle g^4 (d^{abc} G_{\mu\alpha}^a G_{\alpha\nu}^b)^2 \rangle + \frac{2}{3} \langle g^4 (G_{\mu\alpha}^a G_{\alpha\nu}^a)^2 \rangle,$$

$$O_4^{3-4} \equiv 4(O_4^3 - O_4^4) = \langle g^4 (f^{abc} G_{\mu\alpha}^a G_{\alpha\nu}^b)^2 \rangle,$$

имеющими более элементарную цветовую структуру.

#### 2.4. Степенное разложение для поляризационного оператора

Расчет диаграмм типа приведенных на рис.3 до размерности 8 по внешнему полю включительно производится на ЭВМ и включает 3 стадии: вычисление следов от цветowych ( $f^a$ ) и лоренцевых ( $\gamma_\mu$ ) факторов, взятие однопетлевых интегралов с помощью стандартной фейнмановской параметризации и переход к базису ВС, рассмотренному в п.2.3, при котором происходит сокращение зависящих от  $z_0$  членов. Удобно не производить интегрирования по фейнмановскому параметру, поскольку коэффициенты разложения в найденном нами простым интегральном представлении /см. /15/ имеют наиболее компактную форму, оптимальную для последующей обработки.

Окончательно для поляризационного оператора в векторном канале получаем следующее разложение по ВС /2.7/, /2.8/, /2.15/, /2.14/:

$$\Pi^V(q) = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \mathcal{P}^V(Q^2) =$$

$$\begin{aligned}
&= (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \{ C_1^V \Gamma + (-1 + 3J_2 - 2J_3) \frac{O_2}{48\pi^2 Q^4} + \\
&+ (\frac{2}{15} + 4J_2 - \frac{31}{3}J_3 + \frac{43}{5}J_4 - \frac{12}{5}J_5 - \frac{\xi}{10}) \frac{O_3}{72\pi^2 Q^6} + \\
&+ (\frac{41}{45} + \frac{2}{3}J_1 - J_2 - \frac{4}{9}J_3 - \frac{26}{15}J_4 + \frac{8}{5}J_5 + \frac{\xi}{3}J_1 - \frac{3}{5}\xi) \frac{O_3^2}{36\pi^2 Q^6} + \\
&+ (\frac{85}{12} + 15J_1 - \frac{57}{2}J_2 - \frac{301}{3}J_3 + \frac{871}{4}J_4 - 141J_5 + 30J_6 - \frac{\xi}{2}J_1 + \xi - \frac{3}{4}\xi^2) \frac{O_4^{1+2}}{432\pi^2 Q^8} + \\
&+ (\frac{13}{56} - \frac{19}{2}J_1 + \frac{427}{4}J_2 - \frac{575}{2}J_3 + \frac{13553}{40}J_4 - \frac{13669}{70}J_5 + \frac{1391}{28}J_6 - \frac{45}{14}J_7 - \frac{3}{4}\xi J_1 + \\
&\quad + \frac{3}{35}\xi - \frac{9}{140}\xi^2) \frac{O_4^{1-2}}{432\pi^2 Q^8} + \\
&+ (-\frac{661}{30} - 60J_1 + 249J_2 - \frac{1172}{3}J_3 + \frac{3143}{10}J_4 - \frac{978}{5}J_5 + 60J_6 + 2\xi J_1 - \frac{14\xi}{5} + \frac{21\xi^2}{10}) \frac{O_4^{3+4}}{432\pi^2 Q^8} + \\
&+ (\frac{1145}{84} + 33J_1 - \frac{99}{2}J_2 - \frac{983}{3}J_3 + \frac{13027}{20}J_4 - \frac{12591}{35}J_5 + \frac{131}{14}J_6 + \frac{207}{7}J_7 + \frac{\xi}{2}J_1 + \\
&\quad + \frac{104}{35}\xi - \frac{27}{14}\xi^2) \frac{O_4^{3-4}}{432\pi^2 Q^8} + \\
&+ (-\frac{633}{70} + 22J_1 - 269J_2 + 722J_3 - \frac{8893}{10}J_4 + \frac{19762}{35}J_5 - \frac{935}{7}J_6 - \frac{54}{7}J_7 + 3\xi J_1 + \\
&\quad + \frac{248}{35}\xi - \frac{102}{35}\xi^2) \frac{O_4^5}{432\pi^2 Q^8} + \\
&+ (\frac{8}{35} + 8J_1 - 88J_2 + 234J_3 - \frac{1066}{5}J_4 + \frac{284}{35}J_5 + \frac{572}{7}J_6 - \frac{216}{7}J_7 - \frac{23}{35}\xi + \frac{12}{35}\xi^2) \frac{O_4^6}{432\pi^2 Q^8} + \\
&+ (\frac{881}{210} - 2J_1 + 7J_2 + \frac{142}{3}J_3 - \frac{1337}{10}J_4 + \frac{4666}{35}J_5 - \frac{555}{7}J_6 + \frac{162}{7}J_7 - \xi J_1 - \\
&\quad - \frac{128}{35}\xi + \frac{54}{35}\xi^2) \frac{O_4^7}{432\pi^2 Q^8} \},
\end{aligned}$$

где  $\xi \equiv Q^2/m_c^2$ ,

$$J_N(\xi) = \int_0^1 \frac{dx}{[1+x(1-x)\xi]^N} \quad /2.16/ \quad /2.17/$$

- введенные нами в /15/ базисные интегралы, которые легко берутся:

$$J_N(\xi) = \frac{(2N-3)!!}{(N-1)!} \left[ \left(\frac{a-1}{2a}\right)^N \sqrt{a} \ln \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(k-1)!}{(2k-1)!!} \left(\frac{a-1}{2a}\right)^{N-k} \right], \quad /2.18/$$

где  $a = 1 + \frac{4}{\xi}$ .

Результаты для токов с  $J^{PC} = 0^{++}, 0^{-+}, 1^{++}$  вынесены в приложение.

Коэффициенты при  $\langle g^2 Q^2 \rangle$  в проинтегрированной форме совпадают с приведенными в /1,19/. Теоретико-возмущенческий вклад  $C^V$  с учетом первой поправки по  $a_s$  /соответствующий диаграммам 16, в/ также вычислен в /1,19/.

### 3. ПРАВИЛА СУММ ДЛЯ ЧАРМОНИЯ

#### 3.1. Общий формализм

С помощью дисперсионных соотношений можно связать инвариантную амплитуду  $\mathcal{P}^\Gamma$  /см. /2.16// с ее мнимой частью:

$$-\frac{d}{dQ^2} \mathcal{P}^\Gamma(Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{4m_c^2}^{\infty} \frac{\text{Im} \mathcal{P}^\Gamma(s)}{(s+Q^2)^2} ds. \quad /3.1/$$

В свою очередь,  $\text{Im} \mathcal{P}^\Gamma(s)$  можно связать с некоторым сечением. В частности, для векторного тока

$$\text{Im} \mathcal{P}^V(s) = \frac{9}{64\pi^2 a^2} \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{charm}) = \frac{3}{16\pi} R_c(s), \quad /3.2/$$

где  $a = 1/137$ ,  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{charm})$  - полное сечение  $e^+e^-$ -аннигиляции в частицы, содержащие с-кварк,  $R_c = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{charm})/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ . Таким образом, /3.1/ позволяет в конечном итоге связать параметры КХД-вакуума с наблюдаемыми величинами и тем самым проверить имеющиеся модели вакуумной структуры.

В работе /1/ для этой цели было предложено рассматривать отношение  $r_n = M_n/M_{n-1}$  моментов  $M_n$ :

$$M_n^\Gamma(Q^2, m_c^2) = \frac{1}{n!} \left(-\frac{d}{dQ^2}\right)^n \mathcal{P}^\Gamma(Q^2, m_c^2) \Big|_{Q^2=0}. \quad /3.3/$$

В векторном канале моменты от теоретического выражения для  $\mathcal{P}^V$  /2.16/ имеют следующий вид:

$$M_n^V = \frac{3}{4\pi^2} \frac{(n+1)(n-1)!}{(2n+3)!! (2m_c^2)^n} \left\{ 1 + a_n^V a_s - \frac{(n+3)!}{(n-1)!(2n+5)} \frac{O_2}{144m_c^4} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(n+4)!(3n^2+8n-5)O_3^1}{(n-1)!(2n+5)(2n+7)12960m_c^6} - \frac{(n+2)!(n+4)(3n^3+47n^2+244n+405)O_3^2}{(n-1)!(2n+5)(2n+7)9720m_c^6} + \\
& + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+5)(2n+7)(2n+9)5184m_c^8} \times \\
& \times \left[ \left( \frac{1}{4}n^5 + \frac{29}{8}n^4 + \frac{38}{3}n^3 - \frac{811}{24}n^2 - \frac{1075}{4}n - 396 \right) O_4^{1+2} + \right. \\
& + \left( -\frac{1}{224}n^6 + \frac{671}{3360}n^5 + \frac{2203}{672}n^4 + \frac{7891}{480}n^3 + \frac{3011}{105}n^2 - \frac{257}{56}n - 42 \right) O_4^{1-2} + \\
& + \left( \frac{1}{2}n^5 + \frac{217}{20}n^4 + \frac{1643}{15}n^3 + \frac{35209}{60}n^2 + \frac{15703}{10}n + 1638 \right) O_4^{3+4} + \\
& + \left( \frac{23}{560}n^6 + \frac{3443}{1680}n^5 + \frac{46519}{1680}n^4 + \frac{12229}{80}n^3 + \frac{46569}{140}n^2 + \frac{6541}{140}n - 510 \right) O_4^{3-4} - \\
& - \left( \frac{3}{280}n^6 + \frac{1367}{840}n^5 + \frac{8157}{280}n^4 + \frac{27883}{120}n^3 + \frac{35121}{35}n^2 + \frac{161939}{70}n + 2232 \right) O_4^5 - \\
& - \left( \frac{3}{70}n^6 + \frac{289}{210}n^5 + \frac{533}{35}n^4 + \frac{1171}{15}n^3 + \frac{6666}{35}n^2 + \frac{6344}{35}n \right) O_4^6 + \\
& + \left. \left( \frac{9}{280}n^6 + \frac{247}{280}n^5 + \frac{1937}{168}n^4 + \frac{10801}{120}n^3 + \frac{8797}{21}n^2 + \frac{14709}{14}n + 1080 \right) O_4^7 \right\}, \quad /3.4/
\end{aligned}$$

где  $a_n^V$  - коэффициенты, характеризующие величину двухпетлевой теоретико-возмущенческой поправки /см./<sup>19/</sup>/. При не слишком больших  $n$  /практически до  $n \leq 10$ / поправки к основному вкладу  $M_n^{(0)}$  в /3.4/ малы, что позволяет находить отношение  $r_n$  в виде ряда

$$r_n^V = \frac{M_n^{(0)V}}{M_{n-1}^{(0)V}} \left\{ 1 + (a_n^V - a_{n-1}^V) a_s + (b_n^V - b_{n-1}^V) \frac{O_2}{m_c^4} + \dots \right\}, \quad /3.5/$$

который имеет улучшенную сходимость ввиду вычитания однотипных поправок. Величина  $r_n$  имеет, кроме того, более слабую зависимость от  $m_c$  - токовой массы кварка ( $r_n \sim 1/m_c^2$ ) и определяется из экспериментальных данных с более высокой точностью, чем  $M_n$ .

### 3.2. Обработка экспериментальных данных

Воспользовавшись для  $\mathcal{P}(Q^2, m_c^2)$  спектральным представлением /3.1/, получаем для моментов  $M_n$  при  $Q^2 = 0$ :

$$M_n = \frac{3}{16\pi^2} \int \frac{R(s) ds}{s^{n+1}}. \quad /3.6/$$

Интегрирование в /3.6/ производим с использованием приближения узких резонансов, предложенного в /1/ /см. также /21/ для величины  $R(s)$ :

$$R(s) = \frac{9\pi}{\alpha^2} s \sum_V \delta(s - m_V^2) \frac{\Gamma_{e^+e^- \rightarrow V}}{m_V} + \frac{4}{3} \left( 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right) \theta(s - E_\Pi^2), \quad /3.7/$$

где последнее слагаемое учитывает вклад континуума, начинающегося с порога образования  $D\bar{D}$ -пары  $E_\Pi = 4,2_{-0,1}^{+0,1}$  ГэВ/. Для чармония с  $J^{PC} = 1^{--}$  мы используем последние данные, заимствованные из обзора /22/ /см. таблицу/.

Таблица

$m_V$ /МэВ/	$\Gamma_{e^+e^- \rightarrow V}$ /кэВ/
3096,93 $\pm$ 0,09	4,60 $\pm$ 0,39
3686,00 $\pm$ 0,10	2,05 $\pm$ 0,21
3769,9 $\pm$ 2,5	0,257 $\pm$ 0,046
4028,7 $\pm$ 2,8	0,75 $\pm$ 0,15
4159,0 $\pm$ 2,0	0,77 $\pm$ 0,23
4415,0 $\pm$ 5,7	0,49 $\pm$ 0,13

Аппроксимация  $R(s)$  приближением /3.7/ позволяет получить для моментов  $M_n$  выражение в виде суммы по резонансам:

$$M_n = \frac{27}{16\pi\alpha^2} \left[ \sum_V \frac{\Gamma_V}{m_V^{2n+1}} + \frac{4\alpha^2}{27\pi} \left( 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right) \frac{1}{nE_\Pi^{2n}} \right]. \quad /3.8/$$

Отношение  $r_n = M_n/M_{n-1}$  вычисляется по экспериментальным данным с более высокой точностью, чем моменты, ввиду корреляции ошибок в  $M_n$  и  $M_{n-1}$ . На рис.4а показано изменение  $r_n^V$  с указанием средне-квадратичной ошибки. Выход отношения  $r_n$  на плато легко видеть, выделяя в /3.8/ ведущий вклад нижнего резонанса:

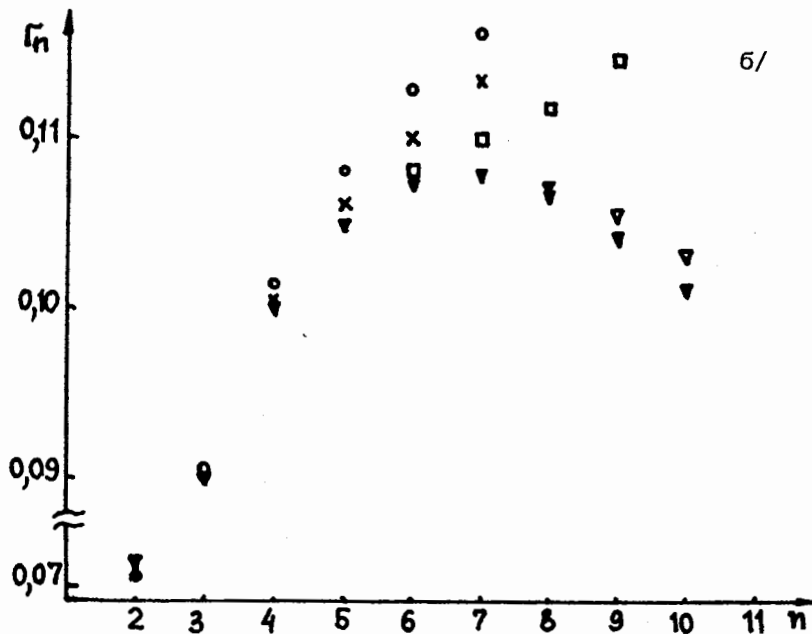
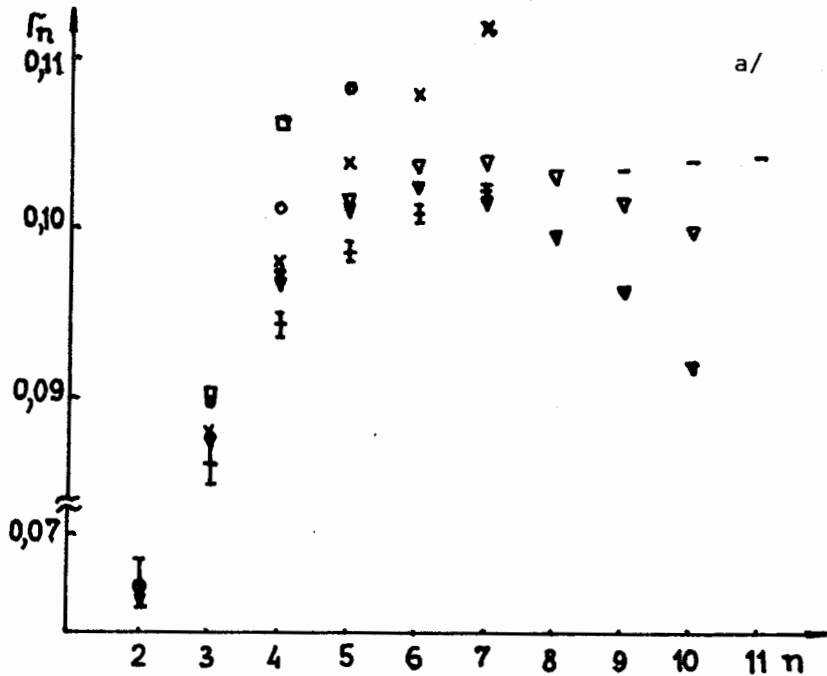


Рис.4. Отношение  $\Gamma_n = M_n/M_{n-1}$ : а/ для векторного канала, б/ для псевдоскалярного канала. (—) — эксперимент; (o) — отношение  $\Gamma_n$  с учетом первой  $O(\alpha_s)$ -поправки теории возмущений; ( $\nabla$ ) —  $O(G^2)$ - кривая при  $\langle g^2 G^2 \rangle = \langle g^2 G^2 \rangle_{SVZ} = /0,83 \text{ ГэВ}^4/$ ; ( $\square$ ) — отношение  $\Gamma_n$  с учетом  $O(G^3)$ -поправки; (x) — то же с учетом  $O(G^4)$ -поправки с оценкой ВС /2.15/, /3.11/ по ГВД; ( $\square$ ) — то же с учетом  $O(G^4)$ - поправки с оценкой ВС /2.15/, /3.12/ по инстантонной модели /3/. Остальные ВС оценены согласно п.3.3.

$$M_n = \frac{27}{16\pi^2} \frac{\Gamma_{V_H}}{m_{V_H}^{2n+1}} (1 + \delta_n(\Sigma)), \quad /3.9/$$

где вклад  $\delta_n$  от высших резонансов и континуума быстро уменьшается с ростом n. В случае векторного канала вклад  $J/\psi$  в  $M_n^V$  уже для  $M_4$  составляет почти 90%. Для отношения  $\Gamma_n$  моментов /3.9/ дает

$$\Gamma_n = \frac{1}{m_{V_H}^2} \frac{(1 + \delta_n)}{(1 + \delta_{n-1})}, \quad /3.10/$$

откуда ясно, что доминирование низшего резонанса в  $\Gamma_n$  проявляется еще быстрее, чем в  $M_n$ . В области насыщения одним резонансом  $\Gamma_n$  выходит на асимптотическое значение, определяемое массой основного уровня  $1/\Gamma_n^V \text{ асим.} = m_{J/\psi}^{-2} = 0,104 \text{ ГэВ}^{-2} /$ .

### 3.3. Оценки вакуумных средних

Для сравнения теоретического отношения  $\Gamma_n$ , определяемого по формуле /3.5/, с экспериментальным необходимо уметь вычислять вакуумные средние, значение которых зависит от плохо известных на сегодняшний день деталей структуры квантохромодинамического вакуума.

В работе /1/ путем фитирования экспериментальных данных кривой, полученной с учетом только первых теоретико-возмущенческой и степенной поправок, найдено значение  $\langle g^2 G^2 \rangle$ , равное /0,83 ГэВ<sup>4</sup>/см. рис.4а/. Величина глюонного конденсата задает масштаб вакуумных флуктуаций, позволяет определить размерный параметр модели КХД вакуума, например, плотность инстантонов и т.д. Отношение  $\langle g^2 G^2 \rangle / m_c^4 = 1/5,3$  определяет характерный параметр степенного ряда, качественно задающий размер подавления высших поправок, поскольку ВС не сводятся к степени  $\langle g^2 G^2 \rangle$ . Напомним, что  $m_c = 1,26 \text{ ГэВ}$  по нормировке  $\Gamma_{2\text{теор.}}$  на эксперимент /1/ /см. рис.4а/.



Для 4-кварковых операторов воспользуемся гипотезой доминантности промежуточного вакуумного состояния<sup>/1/</sup> /гипотезой вакуумной доминантности, ГВД/:

$$\langle j_\mu^a j_\mu^a \rangle = -\frac{4}{3} \langle \bar{u} u \rangle^2;$$

$$\langle f^{abc} G_{\mu\nu}^a j_\mu^b j_\nu^c \rangle = -\frac{3}{4} \langle \bar{u} u \rangle \langle \bar{u} \sigma_{\mu\nu} \hat{G}_{\mu\nu} u \rangle.$$

Согласно оценкам различных авторов<sup>/1,2/</sup> ГВД для 4-кварковых операторов работает с точностью не хуже 50%  $\langle g^3 f G^3 \rangle$  вычисляется в приближении разреженного инстантонного газа /ПРИГ/. Если принять, что  $\langle g^2 G^2 \rangle = 0,83 \text{ ГэВ}^4$ , то

$$\langle g^3 f G^3 \rangle_{\text{приг.}} = (0,1 \text{ ГэВ}^2) \cdot \langle g^2 G^2 \rangle = (0,80 \text{ ГэВ}^2)^6$$

/см. работу<sup>/1/</sup>, что несколько меньше, чем результат расчетов  $\langle g^3 f G^3 \rangle$  в решеточных моделях<sup>/5/</sup>.

Для BC операторов, содержащих комбинацию  $D_\alpha D^\alpha$ , мы принимаем масштабную гипотезу /МГ/, по которой

$$\langle f G G G; \alpha\alpha \rangle = M^2 \langle f G G G \rangle, \quad \langle j j; \alpha\alpha \rangle = M^2 \langle j j \rangle,$$

где  $M^2$  - параметр, характеризующий среднюю виртуальность вакуумных глюонов. Его значение определим, используя  $\langle g^2 G G; \alpha\alpha \rangle = M^2 \langle g^2 G G \rangle$  и формулу /2.13/, что дает  $M^2 = 0,3 \text{ ГэВ}^2$ , согласующееся с физической интерпретацией данного параметра. Аналогично, используя  $\langle g \bar{u} (\sigma \hat{G}) u \rangle = 2 \langle \bar{u} \hat{D}_\alpha \hat{D}^\alpha u \rangle$  и предполагая, что кварки и глюоны в вакууме имеют одинаковую среднюю виртуальность, получаем оценку  $\langle g \bar{u} (\sigma \hat{G}) u \rangle = 2M^2 \langle \bar{u} u \rangle$ , согласующуюся с более ранней оценкой<sup>/23/</sup>, введенной другим способом.

Все BC нормированы при  $\mu^2 = -4m_c^2$ . Для параметра  $\Lambda$  принимается  $\Lambda = 100 \text{ МэВ}$ , что соответствует  $\alpha_s(2m_c) = 0,2$ , а  $\alpha_s(\mu_0) = 0,7$ , где  $\mu_0 = 200 \text{ МэВ}$  - точка ренормировки, в которой  $\langle \bar{u} u \rangle$  принимает значение  $- /0,24 \text{ ГэВ}^3$ , предписываемое алгеброй токов<sup>/1/</sup>.

Для BC /2.15/, имеющих структуру  $\langle g^4 G G G G \rangle$ , применение ГВД дает

$$O_4^{1+2} = \frac{65}{144} \langle g^2 G^2 \rangle^2, \quad O_4^{1-2} = \frac{45}{144} \langle g^2 G^2 \rangle^2.$$

/3.11/

$$O_4^{3+4} = \frac{38}{144} \langle g^2 G^2 \rangle^2, \quad O_4^{3-4} = \frac{9}{144} \langle g^2 G^2 \rangle^2.$$

В литературе, однако, существуют утверждения<sup>/2,24/</sup> о том, что ГВД неприменима к оценке BC операторов, составленных из глюонных полей. Согласно<sup>/2,24/</sup> ГВД занижает отношение  $\langle g^4 G^4 \rangle / \langle g^2 G^2 \rangle^2$

в 5-10 раз. Для сравнения приведем значения BC /2.15/, следующие из инстантонной модели Ильгенфрица и Мюллер-Пройскера<sup>/3/</sup>:

$$O_4^{1+2} = \langle v_0 \rangle, \quad O_4^{1-2} = 2 \langle v_0 \rangle, \quad O_4^{3+4} = \frac{3}{4} \langle v_0 \rangle \text{ и } O_4^{3-4} = \langle v_0 \rangle, \quad /3.12/$$

где  $\langle v_0 \rangle = /2,0 \pm 0,4/ \cdot 10^{20} \lambda_L^8$ ,  $\lambda_L = /2,52 \pm 0,42/ \text{ МэВ}$ , что также

дает  $\langle g^4 G^4 \rangle$ , в 6 раз большее, чем  $\langle g^4 G^4 \rangle_{\text{ГВД}}$ .

Все операторы  $O_4^{1\pm 2}$  дают в  $\Gamma_n$  вклад одного знака, поэтому разница в относительных весах не столь существенна и, следовательно, в инстантонных моделях поправки  $O(G^4)$ -порядка примерно в 5-10 раз больше, чем в предположении справедливости ГВД, что и видно из рис.4а.

### 3.4. Анализ правил сумм для чармония

Используя для BC значения, найденные в рамках приведенной выше системы оценок /для  $O_4^{1+2}$ ,  $O_4^{1-2}$ ,  $O_4^{3+4}$ ,  $O_4^{3-4}$  принимается минимальное значение, задаваемое ГВД/, получаем с учетом  $O(G^4)$ -поправок кривые рис.4а в векторном (V) канале ( $J^{PC} = 1^{--}$ ) и рис.4б в псевдоскалярном (P) канале ( $J^{PC} = 0^{-+}$ ), которые не согласуются с экспериментом уже при малых ( $n \geq 3$ ) и не позволяют определить положение плато  $\Gamma_{n\text{эксп}}$  соответствующего области насыщения правил

сумм одним резонансом. Причина плохого согласования - в большой величине  $O(G^4)$ -вклада, структура которого при  $n=6$  подробно рассмотрена в<sup>/17/</sup>.

Возможны несколько взглядов на данную ситуацию. Первый - радикальный, заключающийся в том, что ряд по  $O(G^N)$  при  $N=4$  "взрывается" и при анализе необходимо учитывать только  $O(G^3)$ -вклады, которые достаточно малы. Второй взгляд - разложение справедливо и с включением  $O(G^4)$ -членов, но модели вакуума работают очень грубо и имеется большое подавление высших BC /примерно в 3 раза по сравнению с ГВД и в 20 раз по сравнению с инстантонными оценками/. Но в этих случаях все равно остается рассогласование с экспериментальной кривой для  $\Gamma_n^V$  уже при  $n \geq 3$ . Кроме того, явные вычисления показывают, что масштаб степенных поправок в P-канале много меньше, чем в векторном, а как легко видеть из сравнения  $O(G^2)$ -кривых рис.4а и 4б, для выхода в область насыщения вклад высших степенных поправок в P-канале должен быть большим. Таким образом, мы естественно приходим к выводу о том, что степенной ряд неправильно выстроен уже в первом  $\langle g^2 G^2 \rangle / m_c^4$  члене. Для согласования  $\Gamma_n^V$  при  $3 < n < 5$  требуется увеличение  $\langle g^2 G^2 \rangle$  в 1,4 раза. При увеличении в 1,6 раза сравниваются интервалы для высших поправок в обоих каналах. Конечно, с увеличением  $\langle g^2 G^2 \rangle$

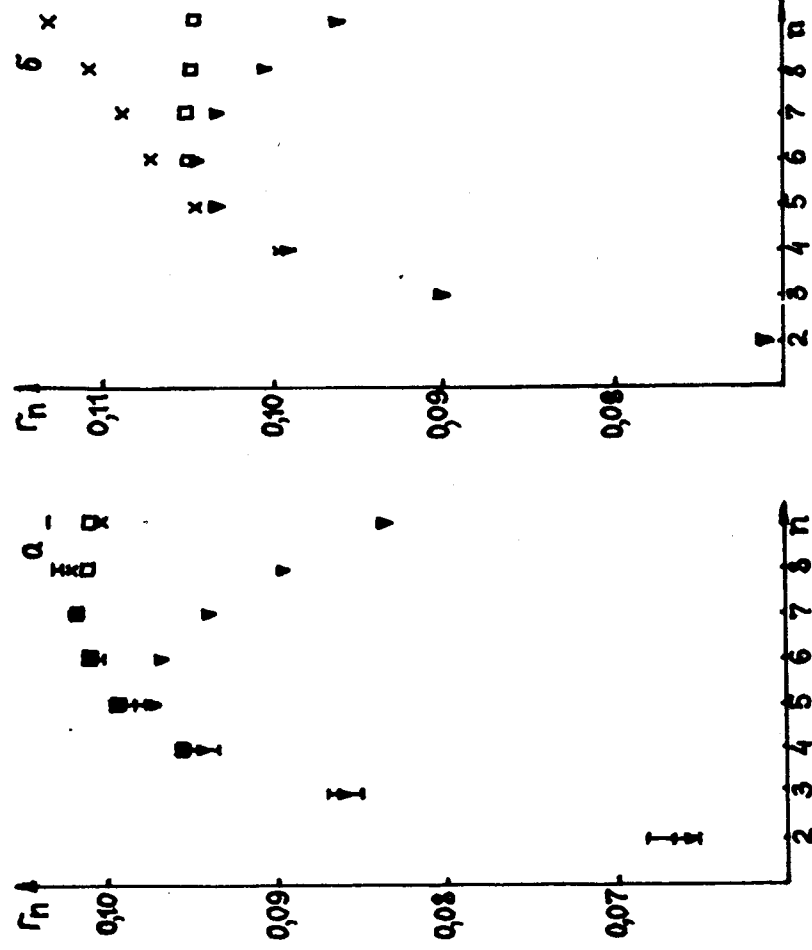


Рис. 5. Отношение  $\Gamma_n = M_n / M_{n-1}$  а/ для векторного, б/ для псевдоскалярного канала: (-) - эксперимент; ( $\nabla$ ) -  $O(G^2)$  - кривая при  $\langle g^2 G^2 \rangle = 1,5 \langle g^2 G^2 \rangle_{SVZ}$  ( $\times$ ) - отношение  $\Gamma_n$  с учетом  $O(G^3)$ ;  $O(G^4)$  - поправок с оценкой ВС /2.15/ по ГВД с подавлением в 2 раза; ( $\square$ ) - то же с оценкой ВС /2.15/, /3.12/ по инстантонной модели /3/ и подавлением в 8 раз. Остальные ВС оценены по п.3.3 при  $\langle g^2 G^2 \rangle = 1,5 \langle g^2 G^2 \rangle_{SVZ}$ .

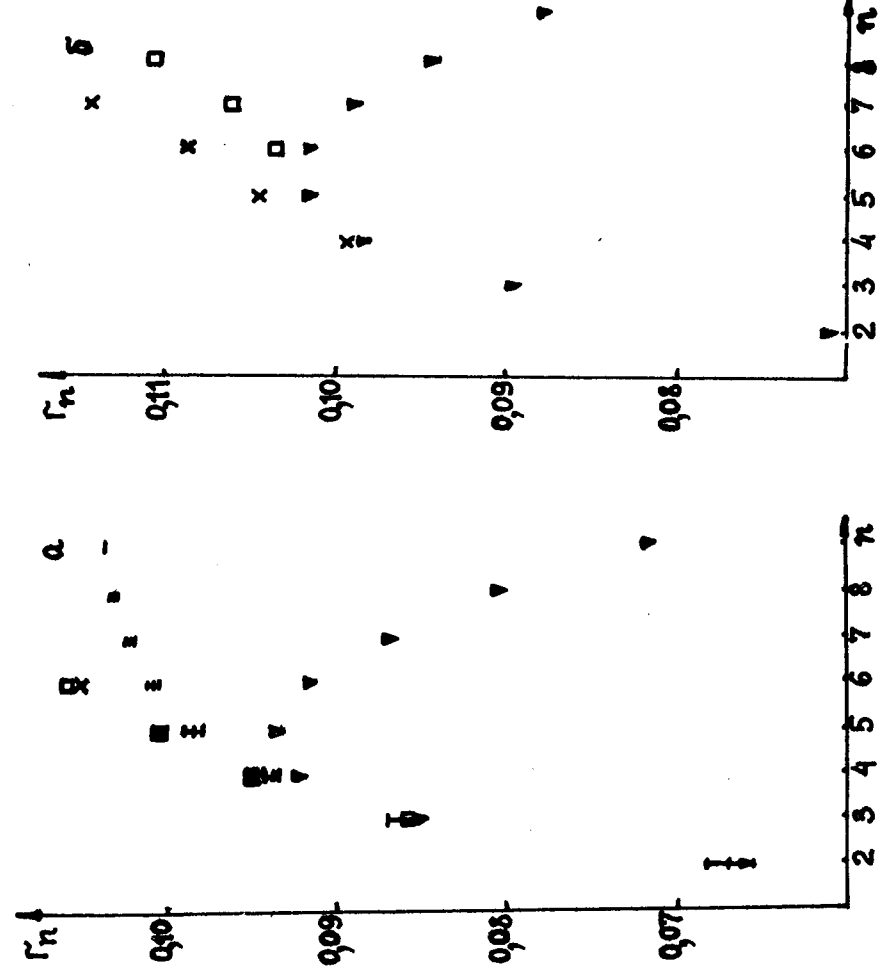


Рис. 6. Отношение  $\Gamma_n = M_n / M_{n-1}$  а/ для векторного, б/ для псевдоскалярного канала: (-) - эксперимент; ( $\nabla$ ) -  $O(G^2)$  - кривая при  $\langle g^2 G^2 \rangle = 2 \langle g^2 G^2 \rangle_{SVZ}$ ; ( $\times$ ) - отношение  $\Gamma_n$  с учетом  $O(G^3)$ ,  $O(G^4)$  - поправок с оценкой ВС /2.15/, /3.11/ по ГВД с подавлением в 1,4 раза; ( $\square$ ) - то же с оценкой ВС /2.15/, /3.12/ по инстантонной модели и подавлением в 3 раза. Остальные ВС оценены по п.3.3 при  $\langle g^2 G^2 \rangle = 2 \langle g^2 G^2 \rangle_{SVZ}$ .

ухудшается сходимость рядов и с учетом только первой поправки уже не дойти по  $n$  до области насыщения одним резонансом. При больших значениях  $\langle g^2 G^2 \rangle$  для согласования с экспериментальной кривой при учете высших  $O(G^3)$ - и  $O(G^4)$ -поправок требуется меньшее дополнительное подавление ВС типа  $\langle g^4 GGGG \rangle$ , но одновременно сужается область применимости разложения  $\Gamma_n$  в степенной ряд, и уже при росте величины глюонного конденсата в 2,2 раза разложение  $\Gamma_n$  в ряд при  $Q^2=0$  теряет смысл, поскольку для всех  $n > 2$  становятся одинаково важны все члены степенного ряда. Итак, если инстантонные модели правильно передают основные черты строения КХД вакуума, то правила сумм неприменимы при  $Q^2=0$ . Такая ситуация согласуется с прогнозами работ<sup>9,10/</sup>, в которых проведен анализ в рамках точно решаемой двумерной хромодинамики и с оценкой  $\langle g^2 G^2 \rangle$  в рамках потенциального подхода<sup>7/</sup>, где получается вдвое большее значение, чем в работах<sup>1,19/</sup>. Если существует механизм подавления высших ВС, который не "ухватывают" инстантонные модели, то возможно получить фит экспериментальных данных в V-канале, согласующийся до  $n=7,8$ /рис.5а/, соответствующий наилучшейходимости степенного ряда при выборе  $\langle g^2 G^2 \rangle = 1,5 \langle g^2 G^2 \rangle_{SVZ}$ , т.е. минимального значения из допустимого интервала  $[1,5-2,2/ \langle g^2 G^2 \rangle_{SVZ}$ . При этих же предположениях в P-канале получаем с учетом высших  $O(G^3)$ - и  $O(G^4)$ -поправок теоретические кривые рис. 5б.

На рис.6а,б показано теоретическое значение  $\Gamma_n$  при увеличении  $\langle g^2 G^2 \rangle$  в 2 раза, когда не требуется дополнительного подавления высших ВС по сравнению с модельными оценками. При этом эксперимент удовлетворительно описывается только в области малых  $n=2,3$ , что не позволяет делать количественные предсказания для низших резонансов.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в области, где доминирует вклад низшего состояния чармония, ряд по  $1/m_c^2$  для отношения  $\Gamma_n$  моментов  $M_n(Q^2=0)$  сходится медленно. Для получения стабильного по отношению к следующим степенным поправкам плато функции  $\Gamma_n$  необходимо учитывать по крайней мере  $O(G^5)$ - и  $O(G^6)$ - вклады в случае наилучшейходимости ряда, которая противоречит имеющимся инстантонным оценкам ВС и требует модификации моделей в сторону уменьшения ВС типа  $\langle g^4 GGGG \rangle$  примерно в 10 раз. Масштаб поправок в скалярном (S) и аксиально-векторном (A) каналах, примерно в три раза больше, чем в рассмотренных случаях. Точный анализ требует обработки моментов в области больших  $Q^2$ , где степенной ряд сходится лучше, но выход на экспериментальное плато, как легко понять по обработке V-канала /см. п.3.2/, совершается соответственно при больших  $n$ . Такой анализ с учетом только  $O(G^2)$ -вклада был проделан в<sup>19/</sup>, но, как видно из вышеизложенного, он основан на

аппроксимации истинной кривой первой поправкой к  $\Pi \Gamma(q)$  с использованием заниженного значения вакуумного конденсата - эффективного параметра  $\langle g^2 G^2 \rangle$ , вбирающего в себя при обработке V-канала<sup>1/</sup> при  $n=5 \div 7$  степенные поправки более высоких порядков. С учетом того, что  $(G^2/m^4)^k$ -члены имеют чередующиеся знаки, следует ожидать, что значение  $\langle g^2 G^2 \rangle$  для Y-частиц должно быть большим, чем для чармония, как это и было обнаружено Волошиным<sup>25/</sup>.

Анализ правил сумм с учетом  $O(G^3)$ - и  $O(G^4)$ -поправок при произвольном  $Q^2$  представляет собой весьма трудную техническую задачу и, скорее всего, не меняет структуры приближения к области насыщения сумм низшим резонансом при некотором увеличении масштаба по  $n$ .

Мы благодарны В.А.Бейлину и М.Мюллер-Пройскеру за стимулирующие дискуссии, А.В.Ефремову, Б.Л.Иоффе и М.А.Шифману за обсуждение результатов и В.А.Мещерякову за интерес к данной работе и поддержку.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Результат вычисления поляризационного оператора  $\Pi \Gamma(q)$  /2.1/ в виде разложения по базисным ВС /2.7/, /2.8/, /2.15/ и /2.14/ для векторного тока ( $j^V = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ ,  $J^PC = 1--$ ) приведен в тексте /2.16/ с использованием для коэффициентов интегрального представления /2.17/.

В тех же обозначениях мы получили:  
а/ для скалярного тока ( $j^S = \bar{\psi} \psi$ ,  $J^PC = 0^{++}$ )

$$\begin{aligned} \Pi^S(q) = & C_1^S \mathbb{1} + (-1 - 2J_1 + 3J_2) \frac{O_2}{32\pi^2 Q^2} + \\ & + \left(-\frac{14}{5} - 9J_1 + 42J_2 - 44J_3 + \frac{69}{5}J_4 - \frac{3}{10}\xi\right) \frac{O_3^1}{144\pi^2 Q^4} + \\ & + \left(\frac{13}{15} - 2J_1 + 9J_2 + \frac{4}{3}J_3 - \frac{46}{5}J_4 - \xi J_1 - \frac{9}{5}\xi\right) \frac{O_3^2}{72\pi^2 Q^4} + \\ & + \left(-\frac{133}{8} - \frac{135}{2}J_1 + \frac{1611}{4}J_2 - 577J_3 + \frac{2427}{8}J_4 - 45J_5 + \frac{3}{4}\xi J_1 - \frac{3}{2}\xi - \frac{9}{8}\xi^2\right) \frac{O_4^{1+2}}{432\pi^2 Q^6} + \\ & + \left(-\frac{2903}{560} - \frac{45}{2}J_1 + \frac{1233}{8}J_2 - \frac{565}{2}J_3 + \frac{18453}{80}J_4 - \frac{3033}{35}J_5 + \frac{675}{56}J_6 + \right. \\ & \left. + \frac{3}{8}\xi J_1 - \frac{27}{70}\xi - \frac{27}{280}\xi^2\right) \frac{O_4^{1-2}}{432\pi^2 Q^6} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{673}{20} + 108 J_1 - 531 J_2 + 517 J_3 - \frac{753}{20} J_4 - 90 J_5 - 3 \xi J_1 + \frac{12}{5} \xi + \right. \\
& + \left. \frac{63}{20} \xi^2 \right) \frac{O_4^{3+4}}{432 \pi^2 Q^6} + \\
& + \left( -\frac{2773}{56} - 234 J_1 + \frac{5823}{4} J_2 - 2086 J_3 + \frac{36543}{40} J_4 + \frac{3888}{35} J_5 - \frac{3105}{28} J_6 + \frac{3}{4} \xi J_1 - \right. \\
& - \left. \frac{237}{35} \xi - \frac{81}{28} \xi^2 \right) \frac{O_4^{3-4}}{432 \pi^2 Q^6} + \\
& + \left( \frac{5359}{140} + 60 J_1 - \frac{663}{2} J_2 + 706 J_3 - \frac{14841}{20} J_4 + \frac{8412}{35} J_5 + \frac{405}{14} J_6 - \frac{15}{2} \xi J_1 - \right. \\
& - \left. \frac{192}{35} \xi - \frac{153}{35} \xi^2 \right) \frac{O_4^5}{432 \pi^2 Q^6} + \\
& + \left( \frac{312}{35} + 45 J_1 - 243 J_2 + \frac{345}{2} J_3 + \frac{2619}{10} J_4 - \frac{12636}{35} J_5 + \frac{810}{7} J_6 + \frac{309}{140} \xi + \frac{18}{35} \xi^2 \right) \frac{O_4^6}{432 \pi^2 Q^6} + \\
& + \left( -\frac{2469}{140} - 12 J_1 - \frac{15}{2} J_2 + 96 J_3 - \frac{3261}{20} J_4 + \frac{6684}{35} J_5 - \frac{1215}{14} J_6 + \frac{9}{2} \xi J_1 + \frac{93}{85} \xi + \right. \\
& + \left. \frac{81}{35} \xi^2 \right) \frac{O_4^7}{432 \pi^2 Q^6} ;
\end{aligned}$$

б/ для псевдоскалярного тока ( $j^P = \bar{\psi} i \gamma_5 \psi$ ,  $J^{PC} = 0^{-+}$ )

$$\begin{aligned}
\Pi^P(q) &= C_1^P I + (5 + 6 J_1 - 15 J_2 + 4 J_3) \frac{O_2}{96 \pi^2 Q^2} + \\
& + \left( \frac{14}{5} + 9 J_1 - 48 J_2 + 62 J_3 - \frac{153}{5} J_4 + \frac{24}{5} J_5 + \frac{1}{10} \xi \right) \frac{O_3^1}{144 \pi^2 Q^4} + \\
& + \left( \frac{67}{15} + 8 J_1 - 25 J_2 + \frac{22}{3} J_3 + \frac{42}{5} J_4 - \frac{16}{5} J_5 - \xi J_1 + \frac{3}{5} \xi \right) \frac{O_3^2}{72 \pi^2 Q^4} + \\
& + \left( \frac{35}{8} + \frac{93}{2} J_1 - \frac{1533}{4} J_2 + 782 J_3 - \frac{5325}{8} J_4 + 246 J_5 - 30 J_6 + \frac{3}{4} \xi J_1 + \frac{3}{2} \xi + \right. \\
& + \left. \frac{3}{8} \xi^2 \right) \frac{O_4^{1+2}}{432 \pi^2 Q^6} + \\
& + \left( \frac{53}{112} + 15 J_1 - \frac{1239}{8} J_2 + 403 J_3 - \frac{37323}{80} J_4 + \frac{18507}{70} J_5 + \frac{3621}{56} J_6 + \right. \\
& + \left. \frac{45}{14} J_7 + \frac{3}{8} \xi J_1 + \frac{27}{70} \xi + \frac{9}{280} \xi^2 \right) \frac{O_4^{1-2}}{432 \pi^2 Q^6} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{29}{4} - 24 J_1 + 237 J_2 - 401 J_3 + \frac{2463}{20} J_4 + \frac{588}{5} J_5 - 60 J_6 - 3 \xi J_1 - \right. \\
& - \left. \frac{12}{5} \xi - \frac{21}{20} \xi^2 \right) \frac{O_4^{3+4}}{432 \pi^2 Q^6} + \\
& + \left( \frac{1355}{56} + 183 J_1 - \frac{5721}{4} J_2 + 2789 J_3 - \frac{17613}{8} J_4 + \frac{4407}{7} J_5 + \frac{999}{28} J_6 - \right. \\
& - \left. \frac{207}{7} J_7 + \frac{3}{4} \xi J_1 + \frac{39}{7} \xi + \frac{27}{28} \xi^2 \right) \frac{O_4^{3-4}}{432 \pi^2 Q^6} + \\
& + \left( \frac{995}{28} + 18 J_1 + \frac{513}{2} J_2 - 1112 J_3 + \frac{28263}{20} J_4 - \frac{25974}{35} J_5 + \frac{1725}{14} J_6 + \frac{54}{7} J_7 - \right. \\
& - \left. \frac{15}{2} \xi J_1 - \frac{144}{35} \xi + \frac{51}{35} \xi^2 \right) \frac{O_4^5}{432 \pi^2 Q^6} + \\
& + \left( -\frac{27}{7} - 33 J_1 + 237 J_2 - \frac{717}{2} J_3 + \frac{147}{2} J_4 + \frac{1464}{7} J_5 - \frac{1086}{7} J_6 + \frac{216}{7} J_7 - \right. \\
& - \left. \frac{45}{28} \xi - \frac{6}{35} \xi^2 \right) \frac{O_4^6}{432 \pi^2 Q^6} + \\
& + \left( -\frac{801}{28} - 54 J_1 + \frac{441}{2} J_2 - 246 J_3 + \frac{855}{4} J_4 - \frac{1350}{7} J_5 + \frac{1545}{14} J_6 - \frac{162}{7} J_7 + \right. \\
& + \left. \frac{9}{2} \xi J_1 + \frac{15}{7} \xi - \frac{27}{35} \xi^2 \right) \frac{O_4^7}{432 \pi^2 Q^6} ;
\end{aligned}$$

в/ для аксиально-векторного тока ( $j^A = \bar{\psi} (\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu}) \gamma^\nu \gamma_5 \psi$ ,  $J^{PC} = 1^{++}$ )

$$\begin{aligned}
\Pi^A(q) &= (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \cdot C_1^A I + (1 - J_2) \frac{O_2}{16 \pi^2 Q^4} + \\
& + \left( -\frac{1}{15} - 5 J_2 + \frac{29}{3} J_3 - \frac{23}{5} J_4 + \frac{1}{10} \xi \right) \frac{O_3^1}{72 \pi^2 Q^6} + \\
& + \left( -\frac{13}{15} + 2 J_1 - 9 J_2 - \frac{4}{3} J_3 + \frac{46}{5} J_4 + \xi J_1 + \frac{9}{5} \xi \right) \frac{O_3^2}{108 \pi^2 Q^6} + \\
& + \left( -\frac{59}{12} - 12 J_1 + \frac{69}{2} J_2 + \frac{68}{3} J_3 - \frac{281}{4} J_4 + 30 J_5 - \frac{1}{2} \xi J_1 - \frac{1}{2} \xi + \frac{3}{4} \xi^2 \right) \frac{O_4^{1+2}}{432 \pi^2 Q^8} + \\
& + \left( \frac{1649}{280} + 17 J_1 - \frac{413}{4} J_2 + 175 J_3 - \frac{5639}{40} J_4 + \frac{1903}{35} J_5 - \frac{225}{28} J_6 - \frac{3}{4} \xi J_1 - \right. \\
& - \left. \frac{3}{70} \xi + \frac{9}{140} \xi^2 \right) \frac{O_4^{1-2}}{432 \pi^2 Q^8} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{347}{30} + 48J_1 - 282J_2 + \frac{1240}{3}J_3 - \frac{2509}{10}J_4 + 60J_5 + 2\xi J_1 + \frac{7}{5}\xi - \right. \\
& \left. - \frac{21}{10}\xi^2 \right) \frac{O_4^{3+4}}{432\pi^2 Q^8} + \\
& + \left( -\frac{8339}{420} - 26J_1 - \frac{47}{2}J_2 + \frac{922}{3}J_3 - \frac{5293}{20}J_4 - \frac{1654}{35}J_5 + \frac{1035}{14}J_6 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}\xi J_1 - \frac{31}{35}\xi + \frac{27}{14}\xi^2 \right) \frac{O_4^{3-4}}{432\pi^2 Q^8} + \\
& \left( -\frac{937}{70} - 28J_1 + 207J_2 - 500J_3 + \frac{5131}{10}J_4 - \frac{1116}{7}J_5 - \frac{125}{7}J_6 + 3\xi J_1 + \right. \\
& \left. + \frac{44}{35}\xi + \frac{102}{35}\xi^2 \right) \frac{O_4^5}{432\pi^2 Q^8} + \\
& + \left( -\frac{33}{35} - 16J_1 + 118J_2 - 162J_3 - \frac{193}{5}J_4 + \frac{6184}{35}J_5 - \frac{540}{7}J_6 + \frac{1}{35}\xi - \right. \\
& \left. - \frac{12}{35}\xi^2 \right) \frac{O_4^6}{432\pi^2 Q^8} + \\
& + \left( \frac{85}{42} - 4J_1 + 35J_2 - \frac{212}{3}J_3 + \frac{219}{2}J_4 - \frac{908}{7}J_5 + \frac{405}{7}J_6 - \xi J_1 - \frac{4}{7}\xi - \right. \\
& \left. - \frac{54}{35}\xi^2 \right) \frac{O_4^7}{432\pi^2 Q^8} .
\end{aligned}$$

Здесь  $C_1^{\Gamma=S,P,A}$  - теоретико-возмущенческий вклад, с точностью до двухпетлевой поправки вычисленный в работах /1,19/

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. Nucl.Phys., B, 1979, 147, pp.385, 447.
2. Shuryak E.V. Nucl.Phys.B, 1982, 203, pp.116, 140.
3. Ilgenfritz E.M., Müller-Preussker M. JINR, E2-82-598, Dubna, 1982; Müller-Preussker M. Preprint CERN-TH 3431, Geneva, 1982.
4. Di Giacomo A., Paffuti G. Phys.Lett., B, 1982, 108, p.327.

5. Di Giacomo A. et al. Preprint IFUP-TH 13/82, Pisa, 1982.
6. Вайнштейн А.И. и др. ЯФ, 1980, 32, с.1622.
7. Voloshin M.B. Nucl.Phys. B, 1979, 154, p.365.
8. Bell J.S., Bertlmann R.A. Nucl.Phys.B, 1981, 177, p.218; 187, p.285.
9. Bradley A., Langensiepen C.S., Shaw G. Phys.Lett., B, 1981, 102, p.359.
10. Ditsas P., Shaw G. Phys.Lett., B, 1982, 116, p.188.
11. Nikolaev S.N., Radyushkin A.V. Phys.Lett. B, 1982, 110, p.476.
12. Смилга А.В. ЯФ, 1982, 35, с.473.
13. Shuryak E.V., Vainshtein A.I. Nucl.Phys. B, 1982, 201, p.141.
14. Aliev T.M., Shifman M.A. Phys.Lett.B, 1982, 112, p.401.
15. Nikolaev S.N., Radyushkin A.V. JINR, E2-82-521, Dubna, 1982.
16. Strubbe H. Comp.Phys.Comm., 1974, 8, p.1.
17. Nikolaev S.N., Radyushkin A.V. JINR, P2-82-720, Dubna, 1982.
18. Швингер Ю. Частицы, источники, поля. "Мир", М., 1976, т.2.
19. Reinders L.J., Rubinstein H.R., Yazaki S. Nucl.Phys.B, 1981, 186, p.109.
20. Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. Phys.Lett., B, 1978, 77, p.80.
21. Guberina B. et al. Nucl.Phys., B, 1981, 184, p.476.
22. Review of Particle Properties. Phys.Lett.B, 1982, vol.111.
23. Novikov V.A. et al. Proc.Int.Conf. "Neutrino 78". Lafayette, 1978, p.C278.
24. Baier V.N., Pinelis Yu.F. Preprint IYaf 81-141, Novosibirsk, 1981.
25. Voloshin M.B. Preprint ITEP-21, Moscow, 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел  
29 декабря 1982 года.

### НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

ДЗ-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
ДЗ,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:  
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79  
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Николаев С.Н., Радюшкин А.В. P2-82-914  
Вакуумные поправки к КХД правилам сумм для чармония

Приведены результаты вычисления степенных поправок к КХД правилам сумм для чармония в каналах с  $J^{PC} = 0^{++}, 0^{-+}, 1^{-+}, 1^{++}$  вплоть до членов  $O(G^4)$  включительно. Проведено сравнение полученных теоретических предсказаний с экспериментальными данными.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Nikolaev S.N., Radyushkin A.V. P2-82-914  
Vacuum Corrections to QCD Charmonium Sum Rules

We present the results of our calculations of the power corrections to QCD charmonium sum rules in the channels with  $J^{PC} = 0^{++}, 0^{-+}, 1^{-+}, 1^{++}$  up to  $O(G^4)$  terms, and compare the theoretical predictions obtained with experimental data.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982