сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-82-910

Р.М.Ямалеев

О СВЯЗИ МЕЖДУ ГЕНЕРАТОРАМИ ТРЕХ- И ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ПОВОРОТОВ С ОПЕРАТОРАМИ ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ ЧАСТИЦ СО СПИНАМИ 1 И 1/2

1982

§1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно принципу соответствия уравнение Шредингера в квазиклассическом приближении в нулевом порядке по постоянной Планка ($\hbar$) переходит в уравнение Гамильтона-Якоби. При этом квантовый оператор энергии, определяющий структуру соответствующего волнового уравнения для частиц с нулевым спином, переходит в классический гамильтониан, сохраняя функциональную форму зависимости энергии от импульсов. Этот подход породил простой рецепт первичного квантования: чтобы произвести квантование, достаточно в выражении для классического гамильтониана взаимно сопряженные обобщенные координаты и импульсы заменить на соответствующие операторы, а скобки Пуассона - на коммутатор [/1/]. Выяснилось, что такой рецепт имеет весьма ограниченную область действия: он применим только в декартовой системе координат и только для частиц со спином, равным нулю. Ограничения обусловлены тем, что в операторном представлении важен порядок расположения динамических величин в гамильтониане, который должен быть учтен еще на классическом уровне. Как известно [/2/], каждой системе координат, в которой производится разделение переменных, сопоставляется определенный генератор преобразования. Порядок операторов в гамильтониане в различных системах координат диктуется структурой соответствующих генераторов. Например, если квантование осуществляется в сферической системе координат, то необходимо учитывать структуру генератора трехмерных вращений. Процедура квантования в сферической системе координат выполняется путем построения определенной системы алгебраических уравнений на динамические величины /см. /1//. Последующая замена динамических величин в этой системе на соответствующие операторы приводит к оператору Гамильтона в сферических координатах. Замечательно, что система операторов /1/ в квантовой механике определяет структуру оператора Гамильтона для частиц со спином 1. Переход от 3-мерного пространства в евклидово пространство 4-х измерений позволяет обобщить эту схему и для получения оператора Гамильтона уравнения Паули, то есть для частиц со спином 1/2. Таким образом, устанавливается связь между структурой генераторов 3- и 4-мерных поворотов и структурой оператора Гамильтона для частиц со спинами 1 и 1/2. Операторы спина при этом определяются инфинитезимальными операторами соответствующих групп преобразований. Связь спина 1/2 с 4-мерным пространством осуществляется в кватернионном представлении волновой функции уравнения Паули; в рамках 4-мерного формализма оно же эквивалентно вектор-энергии. При этом

$$\vec{p} \to \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}, \quad \mathcal{E} \to \mathcal{E} - e\phi . \qquad /9/$$

Далее, введем матрицы $\hat{r}(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z)$ - инфинитезимальные операторы группы 3-мерных вращений:

$$\hat{r}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{r}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{r}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \qquad /10/$$

Пользуясь матрицами $\hat{r}$, уравнение /1/ мы можем переписать в виде

$$(\vec{r}) \cdot 2m\mathcal{E} = (\vec{M}\hat{r} + s)(\vec{p}), \qquad /11/$$

где запись $(\vec{r})$ означает столбец

$$(\vec{r}) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} .$$

Подставляя выражения для $\vec{M}$ и s из /1/ в /11/ и учитывая коммутационные соотношения

$$[p_x, p_y] = -ih\frac{e}{c}\mathcal{H}_x ,$$

$$[p_y, p_z] = -ih\frac{e}{c}\mathcal{H}_y , \qquad /12/$$

$$[p_z, p_x] = -ih\frac{e}{c}\mathcal{H}_z ,$$

получим

$$\vec{r} \cdot 2m\mathcal{E} = \vec{r}\, p^2 - [\vec{r} \times \vec{\mathcal{H}}]\, 2m\mu , \quad \mu = \frac{ihe}{2mc} .$$

Или, применяя /10/:

$$(\vec{r})(2m\mathcal{E} - (\vec{p}^{\,2} + \mu(\hat{r}\vec{\mathcal{H}}))) = 0 ,$$

откуда в силу полной произвольности величин r_x, r_y, r_z следует

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} + \mu(\hat{r}\vec{\mathcal{H}}) \; - \qquad /13/$$

гамильтониан для частицы со спином 1.

На основании полученного мы можем сформулировать следующее утверждение: структура оператора Гамильтона для частицы со спином 1 определена функциональной зависимостью энергии от момента импульса как генератора группы 3-мерных вращений, оператор спина - инфинитезимальным оператором данной группы. Таким образом, мы получили рецепт построения оператора Гамильтона для частиц со спином 1. Однако недостаточно его рассматривать только как формальный прием. Система операторов /1/ для теории частиц со спином 1 играет столь же важную методическую роль, что и оператор энергии /2/ для описания частиц с нулевым спином. В рамках классической механики на основе системы /1/ удается развить теорию Гамильтона-Якоби для частиц, обладающих собственным угловым моментом [5]. В теории Гамильтона-Якоби

$$\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{x}}, \quad \mathcal{E} = -\frac{\partial S}{\partial t}, \qquad /14/$$

а уравнение на функцию действия получается, если /14/ подставить в /2/. Из /1/ и /14/ следует, что

$$\operatorname{div}\vec{M} = \vec{r}\operatorname{rot}\vec{p} - \vec{p}\operatorname{rot}\vec{r} = 0 ,$$

то есть $\vec{M} = \operatorname{rot}\vec{U}$. Как показано в [5], при составлении уравнения на $\vec{U} = \vec{U}(\vec{x}, S)$ система /1/ играет ту же роль "костяка", что и выражение для энергии /2/ в теории Гамильтона-Якоби. Модифицированная теория Гамильтона-Якоби, включающая помимо S также $\vec{U}$, описывает классическое движение частиц с собственным угловым моментом. В квантовом случае она переходит в теорию частиц со спином, равным 1.

§3. СТРУКТУРА ГЕНЕРАТОРА ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ПОВОРОТОВ И ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 1/2

Ясно, что связь между генератором группы трехмерных вращений с оператором энергии /13/ достигнута прежде всего благодаря совпадению числа измерений пространства с размером представления волновой функции частицы со спином 1 /3-мерный вектор/. С методической точки зрения более логично было бы предполагать, что основные свойства пространства должны быть связаны с фундаментальным спином - со спином 1/2. Поэтому представляет интерес обобщить систему /1/ с тем, чтобы на ее основе, повторяя вышеизложенную схему, получить оператор Гамильтона для частицы со спином 1/2. Решение этой задачи уже содержится в системе /4/, которая, в свою очередь, обнаруживает неполноту системы пространственных координат /6/. Более того, здесь мы имеем возможность проверить сформулированное выше утверждение на примере спина 1/2.

Рассмотрим, как будет выглядеть аналог системы /1/ в 4-мерном евклидовом пространстве с координатами $(\vec{x}, x_4)$. Искомая система будет определяться шестью генераторами поворота $\mathfrak{M}_{ij}(i,j=1,2,3,4)$, где $\mathfrak{M}_{ij}$ - антисимметричный тензор 2-го ранга, состоящий их двух векторов

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}], \quad \vec{N} = r_4 \vec{p} - \vec{r} p_4. \qquad /15/$$

Далее, введем инфинитезимальные операторы группы 4-мерных поворотов, соответствующие генераторам M и N. Обозначим их через $\hat{\tau}_M$ и $\hat{\tau}_N$. Они имеют известный вид

$$\hat{\tau}_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{\tau} \end{pmatrix}. \qquad /16/$$

$\hat{\tau}$ - 3-рядная матрица, определенная в /10/:

$$\tau_{Nx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_{Ny} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tau_{Nz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Применяя $\vec{M}$ и $\vec{N}$, матрицы $\hat{\tau}_M$, $\hat{\tau}_N$, систему /1/ можно обобщить двумя способами. В первом случае мы получим систему вида

$$\begin{pmatrix} r_4 \\ \vec{r} \end{pmatrix} 2m\mathcal{E} = (\vec{M}\hat{\tau}_M + \vec{N}\hat{\tau}_N)\begin{pmatrix} p_4 \\ \vec{p} \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} p_4 \\ \vec{p} \end{pmatrix},$$

$$s = (\vec{r}\,\vec{p}) + r_4 p_4. \qquad /17/$$

Подставляя выражения для $\vec{M}$, $\vec{N}$ и s в /17/, в отсутствие взаимодействия получим выражение для энергии

$$2m\mathcal{E} = \vec{p}^{\,2} + p_4^2 \qquad /18/$$

в 4-мерном пространстве. Перепишем /17/ в векторных обозначениях:

$$r_4\, 2m\mathcal{E} = (\vec{N}\,\vec{p}) + s p_4,$$
$$\vec{r}\; 2m\mathcal{E} = -\vec{N} p_4 + s\vec{p} - [\vec{M} \times \vec{p}]. \qquad /19/$$

Включая в /19/ электромагнитное взаимодействие и учитывая коммутационные соотношения /12/, получим

$$r_4\, 2m\mathcal{E} = r_4(\vec{p}^{\,2} + p_4^2) - (\vec{r}\,[p_4, \vec{p}]),$$
$$\vec{r} \cdot 2m\mathcal{E} = \vec{r}(\vec{p}^{\,2} + p_4^2) - [\vec{r} \times \vec{\mathcal{H}}]2m\mu + r_4[p_4, \vec{p}]. \qquad /20/$$

Если предположить, что $[p_4, \vec{p}] = 0$, то есть

$$\vec{\mathcal{H}}_4 = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial \vec{x}} = 0,$$

то из первого уравнения следует, что $r_4 = 0$, поскольку для частиц со спином в магнитном поле

$$2m\mathcal{E} \neq \vec{p}^{\,2} + p_4^2.$$

Таким образом, в этом случае из /20/ непосредственно следует /13/ - оператор Гамильтона для частиц со спином 1. В общем случае из /20/ получится уравнение, аналогичное уравнению Прока в формализме Штюкельберга /8/.

Наша основная цель - получить оператор Гамильтона для частиц со спином 1/2. Она достигается при втором способе обобщения /1/. Введем следующие комбинации:

$$\vec{\mathfrak{M}}_\pm = \vec{M} \pm \vec{N}, \quad \hat{\tau}_\pm = \hat{\tau}_M \pm \hat{\tau}_N. \qquad /21/$$

Матрицы $\hat{\tau}_\pm$ можно рассматривать как инфинитезимальный оператор генератора $\mathfrak{M}_\pm$. Матрицы $i\hat{\tau}_+$ и $i\hat{\tau}_-$, каждая в отдельности, идентичны базису матриц Паули - для них справедливы те же самые соотношения коммутации и антикоммутации, что и для матриц Паули. Это легко доказывается, если заметить, что

$$\hat{\tau}_{+1} = \gamma_1, \quad \hat{\tau}_{+2} = \gamma_3, \quad \hat{\tau}_{+3} = \gamma_1\gamma_3,$$

и воспользоваться уже известными соотношениями для γ-матриц Дирака. Искомую систему в терминах /21/ запишем в виде

$$\binom{r_4}{\vec r} 2m\mathcal{E} = (\vec{\mathfrak{M}}_\pm \hat{r}_\pm)\binom{p_4}{\vec p} + s\binom{p_4}{\vec p}.$$

Используя свойства $\hat{r}$ -матриц, последнее уравнение можно также преобразовать к виду

$$(r_4 \pm \vec r \hat{r}_\pm) 2m\mathcal{E} = (\vec{\mathfrak{M}}_\pm \hat{r}_\pm \pm s)(p_4 \pm \hat{r}_\pm \vec p). \qquad /22/$$

Поскольку

$$(\vec{\mathfrak{M}}_\pm \hat{r}_\pm \pm s) = (r_4 \pm \vec r \hat{r}_\pm)(p_4 \mp \hat{r}_\pm \vec p),$$

то /22/ есть факторизация /18/ в базисе $\hat{r}$ -матриц, а именно:

$$2m\mathcal{E} = (p_4 \mp \hat{r}_\pm \vec p)(p_4 \pm \hat{r}_\pm \vec p). \qquad /23/$$

В базисе матриц Паули соответственно получим

$$2m\mathcal{E} = (p_4 \pm i\hat{\sigma}\vec p)(p_4 \mp i\hat{\sigma}\vec p).$$

Линейные комбинации генераторов $\vec M$ и $\vec N$,

$$\vec{\mathfrak{M}}^{1/2}_\pm = (\vec M \pm \vec N)/2, \qquad /24/$$

удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и оператор момента импульса. Следовательно, согласно общей теории таких операторов

$$(\vec{\mathfrak{M}}^{(1/2)}_\pm)^2 \psi = \ell(\ell+1)\psi,$$

$$(\vec{\mathfrak{M}}^{(1/2)}_\pm)_z \psi = \pm m\psi, \qquad /25/$$

где ℓ в общем случае может принимать последовательность значений: 1/2, 1, 3/2, а m – $\pm 1/2$, ± 1, $\pm 3/2$ и т.д. или какую-то подпоследовательность этих значений /например, последовательность целых чисел для собственных значений оператора момента импульса/. Из теории гипергеометрических функций[9] следует, что

$$(\vec N \pm \vec M)^2 \psi = L(L+(f-2))\psi,$$

$f = 4$ – размерность пространства, $L = 0,1,2,\ldots$

Введем следующие обозначения:

$$L = \ell' - 1, \quad \ell = (\ell' - 1)/2.$$

Тогда

$$(\mathfrak{M}^{(1/2)}_\pm)^2 \psi = \left(\frac{\vec N \pm \vec M}{2}\right)^2 \psi = \frac{\ell'-1}{2}\left(\frac{\ell'-1}{2} + 1\right)\psi = \ell(\ell+1)\psi.$$

Таким образом, ℓ пробегает всю последовательность значений 1/2, 1, 3/2 и т.д., а m – соответственно $\pm 1/2$, ± 1 и т.д.

Итак, собственные значения оператора $\vec{\mathfrak{M}}^{(1/2)}_\pm$ кратны 1/2, этой же величине равны собственные значения соответствующего инфинитезимального оператора, а дифференциальное уравнение, построенное на структуре $\vec{\mathfrak{M}}^{(1/2)}_\pm$, есть уравнение Паули для спина 1/2. Ситуация, в точности аналогичная для оператора момента импульса: собственные значения кратны 1, собственные значения инфинитезимального оператора равны 1, а соответствующее дифференциальное уравнение есть уравнение Паули для спина 1.

Согласно модифицированной теории Гамильтона-Якоби[5] частица со спином 1 в рамках классической механики может быть смоделирована как частица с собственным угловым моментом. В собственной системе отсчета это есть обычный гироскоп. В случае спина 1/2 ~~получается очень интересная классическая модель вращающегося~~ волчка. В этом случае вращение индуцируется генератором $\vec{\mathfrak{M}}^{(1/2)}_\pm$. Под действием такого генератора поворота 4-мерный евклидов вектор $(\vec x, x_4)$ ведет себя как спинор $(x_1 + ix_2, x_3 + ix_4)$. Следовательно, внутреннее пространство классической модели электрона есть спинорное пространство, в то время как внешнее пространство, то есть пространство движения центра тяжести волчка как точки, есть 4-мерное евклидово пространство. Замечательно, что таким свойством обладает только 4-мерное евклидово пространство.

§4. О СИММЕТРИИ МЕЖДУ СПИНАМИ 1 И 1/2 В РАМКАХ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ФОРМАЛИЗМА

По сути в формулах /18/ и системах /17/ и /22/ отражена симметрия между спинами 1 и 1/2, возникающая в рамках 4-мерного формализма. Для ее рассмотрения перейдем на язык уравнений. Для частицы со спином 1 в отсутствие взаимодействия допустимы следующие системы уравнений:

$$0 = \vec p \vec M, \qquad /26.1/$$

$$0 = -p_4 \vec M + \vec p \times \vec N,$$

$$2m\mathcal{E}\begin{pmatrix} U_4 \\ \vec{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}\vec{N} + p_4 s \\ -p_4\vec{N} + [\vec{p}\times\vec{M}] + \vec{p}s \end{pmatrix}, \qquad /26.2/$$

здесь приняты обозначения

$$\vec{M} = -[\vec{p}\times\vec{U}],\ \vec{N} = \vec{p}U_4 - p_4\vec{U},\ s = \vec{p}\vec{U} + p_4U_4. \qquad /27/$$

Складывая и вычитая уравнения /24.1/, /24.2/, получим уравнения Паули для спина 1/2:

$$2m\mathcal{E}\begin{pmatrix} U_4 \\ \vec{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}(\vec{N}+\vec{M}) + p_4 s \\ -p_4(\vec{N}+\vec{M}) + \vec{p}\times(\vec{N}+\vec{M}) + \vec{p}s \end{pmatrix}, \qquad /28.1/$$

$$2m\tilde{\mathcal{E}}\begin{pmatrix} U_4 \\ \vec{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}(\vec{N}-\vec{M}) + p_4 s \\ -\vec{p}(\vec{N}-\vec{M}) - \vec{p}\times(\vec{N}-\vec{M}) + \vec{p}s \end{pmatrix}. \qquad /28.2/$$

Уравнения /28.1/ и /28.2/ переходят друг в друга при пространственных отражениях, следовательно, они являются нерелятивистскими пределами квадрированных уравнений Дирака. Операция комбинирования путем складывания и вычитания есть на самом деле поворот на угол $\pi/4$. Поэтому /28.1-2/ допускает более общую однопараметрическую форму записи, а именно:

$$2m\mathcal{E}\begin{pmatrix} U_4 \\ \vec{U} \end{pmatrix}\sin\theta = \begin{pmatrix} \vec{p}(\vec{N}\sin\theta + \vec{M}\cos\theta) + p_4 s\sin\theta \\ -p_4(\vec{N}\sin\theta + \vec{M}\cos\theta) + \vec{p}\times(\vec{N}\cos\theta + \vec{M}\sin\theta) + \vec{p}s\sin\theta, \end{pmatrix} \qquad /29.1/$$

$$2m\mathcal{E}\begin{pmatrix} U_4 \\ \vec{U} \end{pmatrix}\cos\theta = \begin{pmatrix} \vec{p}(\vec{N}\cos\theta - \vec{M}\sin\theta) + p_4 s\cos\theta \\ -p_4(\vec{N}\cos\theta - \vec{M}\sin\theta) - \vec{p}\times(\vec{N}\sin\theta - \vec{M}\cos\theta) + \vec{p}s\cos\theta. \end{pmatrix} \qquad /29.2/$$

При $\theta = 0$ /29.1-2/ переходит в /26.1-2/, при $\theta = \pi/4$ получим /28.1-2/. Уравнения /29.1-2/ не инвариантны относительно пространственной инверсии.

Включим электромагнитное поле в /26.1-2/ и подставим выражения для N и M из /27/. Далее, введем операторы

$$\vec{\mathcal{H}}_4 = \vec{p}p_4 - p_4\vec{p},\quad \vec{\mathcal{H}} = [\vec{p}\times\vec{p}]. \qquad /30/$$

Оператор $\vec{\mathcal{H}}$ выражается через напряженность магнитного поля:

$$\vec{\mathcal{H}} = ih\frac{e}{c}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}. \qquad /31/$$

Если предположить реальность 4-го пространственного измерения и ввести потенциал A_4, соответствующий этой координате, то

$$\mathcal{H}_4 = ih\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_4}{\partial\vec{x}} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial x_4}\right). \qquad /32/$$

Введем матрицы

$$\hat{r}_a^{\pm} = \hat{r}_N\sin\theta \pm \hat{r}_M\cos\theta,$$
$$\hat{r}_b^{\pm} = \hat{r}_M\sin\theta \pm \hat{r}_N\cos\theta, \qquad /33/$$

которые являются инфинитезимальными операторами, соответствующими генераторам

$$\vec{\mathfrak{M}}_{\pm a} \equiv \vec{N}\sin\theta \pm \vec{M}\cos\theta,$$
$$\vec{\mathfrak{M}}_{\pm b} \equiv \vec{M}\sin\theta \pm \vec{N}\cos\theta, \qquad /34/$$

а генераторы /34/, в свою очередь, определяют структуру уравнений /29.1-2/.

Уравнения /29.1-2/ после подстановки /27/ и включения электромагнитного поля с учетом обозначений /30/ и /33/ запишутся в виде

$$2m\mathcal{E}\begin{pmatrix} U_4 \\ \vec{U} \end{pmatrix}\sin\theta = (\vec{p}^2 + p_4^2)\begin{pmatrix} U_4 \\ \vec{U} \end{pmatrix}\sin\theta - [\hat{r}_a^{+}\vec{\mathcal{H}}_4 + \hat{r}_b^{+}\vec{\mathcal{H}}]\begin{pmatrix} U_4 \\ \vec{U} \end{pmatrix},$$
$$2m\mathcal{E}\begin{pmatrix} U_4 \\ \vec{U} \end{pmatrix}\cos\theta = (\vec{p}^2 + p_4^2)\begin{pmatrix} U_4 \\ \vec{U} \end{pmatrix}\cos\theta - [\hat{r}_a^{-}\vec{\mathcal{H}}_4 + \hat{r}_b^{-}\vec{\mathcal{H}}]\begin{pmatrix} U_4 \\ \vec{U} \end{pmatrix}. \qquad /35/$$

Принимая во внимание только напряженность магнитного поля и вводя однопараметрические операторы спина

$$\vec{S}_{ctg} = \frac{ih}{2}(\hat{r}_M + \hat{r}_N\,\mathrm{ctg}\theta), \qquad /36/$$

$$\vec{S}_{tg} = \frac{ih}{2}(\hat{r}_M\,\mathrm{tg}\theta - \hat{r}_N), \qquad /37/$$

из уравнений /35/ получаем оператор энергии в 3-мерном пространстве следующего вида:

$$\mathcal{E}_{л} = \vec{p}^2/2m + (\vec{S}_{ctg} \cdot \vec{\mathcal{H}})\frac{e}{mc}, \qquad /38/$$

$$\mathcal{E}_{п} = \vec{p}^2/2m + (\vec{S}_{tg} \cdot \vec{\mathcal{H}})\frac{e}{mc}. \qquad /39/$$

Таким образом, $\mathcal{E}_{л}$ и $\mathcal{E}_{п}$ соответствуют разным /левым и правым/ электронам; они по-разному ведут себя в магнитном поле. При $\theta = \pi/4$ эти электроны не различаются и переходят друг в друга при пространственных отражениях.

§5. КОВАРИАНТНОСТЬ УРАВНЕНИЯ ПАУЛИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

До сих пор мы рассматривали, как структура генераторов поворота диктует определенную структуру волновых уравнений для частиц со спином. При этом мы обнаружили необходимость в 4-мерной формулировке при построении /в рамках данного метода/ уравнений для частиц со спином 1/2. Теперь рассмотрим обратную сторону вопроса, а именно, покажем, что если принять кватернионную формулировку уравнения Паули, то 4-мерность пространства следует из трансформационных свойств самой волновой функции. Уравнение Паули в кватернионной формулировке, то есть в представлении волновой функции в виде

$$\hat{U} = U_4 + i(\vec{\sigma}\,\vec{U}) \qquad /40/$$

в трехмерном пространстве, будем записывать так:

$$\hat{W} = -i(\vec{p}\,\hat{\sigma})(U_4 + i\hat{\sigma}\vec{U}),$$
$$2m\mathcal{E}\hat{U} = i(\vec{p}\,\hat{\sigma})\hat{W}. \qquad /41/$$

Из представления волновой функции в виде /40/ ясно, что генераторы 3-мерных вращений действуют только на векторную часть волновой функции $(\vec{\sigma}\,\vec{U})$. Представление волновой функции /40/ кроме 3-мерных пространственных вращений допускает преобразование поворота в плоскостях (U_4, U_k) $(k = 1,2,3)$. Однако в кватернионном представлении невозможно определить соответствующие генераторы, поэтому необходимо перейти к другому базисному представлению, что может быть достигнуто при использовании γ-матрицы Дирака:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1,2,3), \qquad /42/$$

I - единичная 2x2-матрица, а σ_k - матрицы Паули. Введем соответствие между 4-мерными базисными векторами $(\gamma_0, i\gamma_k)$ и пространственными векторами σ_k, полагая $\sigma_k = \gamma_k \gamma_0$ /10/. Умножая волновую функцию /40/ слева на γ_0,

$$\hat{U} \equiv U\gamma_0 = U_4\gamma_0 + iU^k\gamma_k, \qquad /43/$$

с помощью несложных преобразований приведем уравнение /43/ к виду

$$2m\mathcal{E}\hat{U} = (ip^k\gamma_k)(ip^k\gamma_k)\hat{U}. \qquad /44/$$

В выбранном базисе $(\gamma_0, i\gamma_k)$ матрица представления 3-мерных вращений будет иметь вид

$$S_{ik} = \cos\frac{\theta}{2} + \gamma_i\gamma_k \sin\frac{\theta}{2}, \qquad /45/$$

а матрица поворотов в плоскостях (U_4, U_k)

$$T_{4k} = \cos\frac{\phi}{2} + i\gamma_0\gamma_k \sin\frac{\phi}{2}. \qquad /46/$$

Волновая функция /43/ преобразуется по представлениям

$$\hat{U}' = S\hat{U}\tilde{S}, \quad S\tilde{S} = 1,$$
$$\hat{U}' = T\hat{U}\tilde{T}, \quad T\tilde{T} = 1. \qquad /47/$$

С учетом последнего выражения уравнение /44/ примет вид

$$2m\mathcal{E}(T\hat{U}\tilde{T}) = T(ip^k\gamma_k)\tilde{T}T(ip^k\gamma_k)\tilde{T}T\hat{U}\tilde{T}. \qquad /48/$$

Теперь рассмотрим подробнее, что означает равенство вида

$$\hat{p}' = T(ip^k\gamma_k)\tilde{T}. \qquad /49/$$

Достаточно ограничиться преобразованием в одной плоскости, например в плоскости (U_4, U_1). Тогда

$$p_1' = p_1\cos\phi,$$
$$p_4' = p_1\sin\phi. \qquad /50/$$

Таким образом, если в первоначальной системе отсчета $p_4 = 0$, то в результате преобразования /49/ $p_4' \neq 0$, следовательно, форма $ip^k\gamma_k$ нековариантна относительно преобразования /49/. Ковариантной является форма

$$\hat{p} \equiv p_4\gamma_0 + i\gamma_k p^k,$$

что равносильно переходу в 4-мерное пространство. В этом пространстве уравнение /44/ принимает вид

$$
\begin{aligned}
&W = (p_4\gamma_0 + ip_k\gamma_k)(U_4\gamma_0 + i\gamma_k U_k),\\
&2m\mathcal{E}(U_4\gamma_0 + i\gamma^k U_k) = (p_4\gamma_0 + ip^k\gamma_k)W.
\end{aligned}
\qquad /51/
$$

Оно ковариантно относительно преобразования /47/.

Таким образом, кватернионное представление волновой функции частиц со спином 1/2, что равносильно 4-мерному векторному представлению, имеет с методической точки зрения серьезные последствия: оно с необходимостью приводит к четвертой координате. Волновая функция в спинорном представлении не имеет такой явной связи с 4-мерностью пространства. Преобразованию с генератором /46/ можно дать геометрическую трактовку как обобщенному трансляционному преобразованию /11/. В этом случае угол $\vec{\phi}$ будет связан с вектором трансляции $\vec{A}$ с помощью формулы

$$
\mathrm{tg}\,\vec{\phi} = \vec{A}/R, \qquad /52/
$$

R - фундаментальная константа длины, такая, что при $R \to \infty$ мы возвращаемся в рамки традиционной теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фок В.А. Начало квантовой механики. "Наука", М., 1976.
2. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. "Мир", М., 1981.
3. Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П. Письма в ЖЭТФ, 1971, 13, с.452; Wess J., Zumino B. Nucl.Phys., 1974, B70, p.39.
4. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р2-80-619, Дубна, 1980.
5. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р2-81-849, Дубна, 1981.
6. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р2-81-302, Дубна, 1981.
7. Пестов А.Б. ОИЯИ, Р2-8418, Дубна, 1974.
8. Young J.A., Bludman S.A. Phys.Rev., 1963, 131, 5, p.2326.
9. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. "Наука", М., 1965.
10. Казанова Г. Векторная алгебра. "Мир", М., 1979.
11. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р2-80-732, Дубна, 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 декабря 1982 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Ямалеев Р.М. Р2-82-910
О связи между генераторами трех- и четырехмерных поворотов с операторами Гамильтона для частиц со спинами 1 и 1/2

В рамках нерелятивистской теории показано, что структура оператора Гамильтона для частиц со спином 1 однозначно определяется структурой генератора группы 3-мерных поворотов, оператор спина - инфинитезимальным оператором данной группы. Для частиц со спином 1/2 такая связь устанавливается путем перехода от 3-мерного пространства в евклидово пространство четырех измерений. 4-мерный формализм позволяет строить такие комбинации генераторов поворота, которые обладают теми же коммутационными соотношениями, что и орбитальный момент, собственными значениями, кратными 1/2, инфинитезимальным оператором, идентичным базису матриц Паули. Структура таких комбинаций генераторов соответствует структуре оператора Гамильтона уравнения Паули. В 4-мерном пространстве устанавливается симметрия между уравнениями для частиц со спинами 1 и 1/2. Рассматривается также связь трансформационных свойств волновой функции частицы со спином 1/2 с группой поворотов 4-мерного пространства.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Yamaleev R.M. P2-82-910
On Connection between Generators of Three-and Four-Dimensional Turns with Hamilton's Operators for Particles with 1 and 1/2 Spins

It is shown in the framework of the nonrelativistic theory that the structure of Hamilton's operator for particles with 1 spin is strictly defined by the structure of group generator of three-dimensional turns; operator of spin, by infinitesimal operator of this groups. For particles with 1/2 spin a similar connection is established with way transition from the 3-dimensional space to the Euclidean 4-dimensional space. Four-dimensional formalism allows one to construct such combinations of generator turns, which have commutational relations identical to those of orbital momentum, eigenvalues multiple to 1/2, infinitesimal operator - identical to the basis of Pauli's matrix. The structure of such generator combinations corresponds to that one of Hamilton's operator for Pauli's equation. In 4-dimensional space the symmetry is established between equations for particles with 1 and 1/2 spins. The connection of transformational properties of the wave function of 1/2 spin panticle with the group of 4-dimensional space turns is also considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.
Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.