сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-82-907

А.В.Сермягин

О СВЯЗИ УРАВНЕНИЙ ЛОРЕНЦА-ДИРАКА И КЛЕЙНА-ГОРДОНА

1982

§1. При описании движения заряда средствами классической электродинамики возникает задача, связанная с учетом реакции собственного электромагнитного поля заряда. Согласно уравнениям Максвелла излучение ускоренного заряда уносит энергию и импульс, реакция излучения имеет диссипативный характер, что необходимо принимать во внимание. Соответствующее классическое релятивистское уравнение движения точечного заряда - уравнение Лоренца-Дирака /ЛД/ - имеет вид:

$$m_0 \dot{v}^i = e\mathcal{F}^{ik} v_k - \frac{ae^2}{\epsilon'} \dot{v}^i + \frac{2}{3} e^2 (\ddot{v}^i + v^i \dot{v}^k \dot{v}_k). \qquad /1/$$

Здесь m_0 - затравочная, или механическая, масса заряда; $v^i = \frac{dz^i}{d\tau}$ - 4-скорость заряда; нормировка 4-скорости $v^k v_k = 1$ отвечает метрике /+ - - -/; $z^i = z^i(\tau)$ - мировая линия заряда; точка означает дифференцирование по собственному времени τ; дифференциал собственного времени в выбранной системе единиц, в которой скорость света $c = 1$, совпадает с элементом длины мировой линии $d\tau = (dz^k dz_k)^{1/2}$; e - заряд; a - безразмерный множитель порядка единицы; ϵ' - малый инвариантный параметр, стремящийся к нулю для точечного заряда и совпадающий по размерности с τ; $\mathcal{F}^{ik} = \partial^i A^k - \partial^k A^i$ - тензор внешнего электромагнитного поля, которое считается заданным, A^u - 4-потенциал внешнего электромагнитного поля; $\partial^k = \partial/\partial x_k$.

Уравнение /1/ строго следует из классической электродинамики /1/ и может быть получено, в частности, из уравнения движения Ньютона с силой Лоренца,

$$m_0 \dot{v}^i(\tau) = e\,\mathcal{F}^{ik}(\tau)\, v_k(\tau) + e\,\mathcal{F}^{ik}_{self}(\tau - \epsilon')\, v_k(\tau), \qquad /2/$$

предельным переходом при $\epsilon' \to 0$; тензор собственного электромагнитного поля, $\mathcal{F}^{ik}_{self}(\tau - \epsilon')$, вычисляется из запаздывающих потенциалов Лиенара-Вихерта и разлагается в ряд по степеням собственного времени запаздывания ϵ'. Неисчезающие в пределе $\epsilon' \to 0$ члены этого ряда и составляют реакцию собственного электромагнитного поля заряда /три последних слагаемых в /1//.

Коэффициент $\frac{ae^2}{\epsilon'}$ называется собственной электромагнитной массой точечного заряда; она бесконечна, что является отражением степени несовершенства классической электродинамики в вопросе происхождения массы электрического заряда. Бесконечность устраняется либо процедурой перенормировки массы /считается, что механическая масса m_0 содержит отрицательную бесконечность, так что в сумме обе массы дают наблюдаемое значение массы электрона $m = m_0 + \frac{ae^2}{\epsilon'}$ /, либо использованием для вычисления собственного поля заряда полуразности запаздывающих и опережающих потенциалов; в этом последнем случае в уравнении фигурирует механическая масса m_0, соответствующая наблюдаемой, и уравнение ЛД принимает вид:

$$m_0 \dot{v}^i = e\mathcal{F}^{ik} v_k + m_0 \tau_0 (\ddot{v}^i + v^i \dot{v}^k \dot{v}_k), \qquad /3/$$

где

$$\tau_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{m_0}.$$

§2. Уравнение /3/ имеет ряд нефизических решений, среди которых наиболее противоречит представлению о диссипативном характере реакции излучения самоускоряющееся решение, когда заряд, выйдя из внешнего поля, продолжает самопроизвольно неограниченно ускоряться - эффект послеускорения. Именно, пусть в /3/ $\mathcal{F}^{ik} = 0$; умножая скалярно обе стороны /3/ на $\dot{v}_i$ и учитывая соотношение ортогональности $\dot{v}^k v_k = 0$, являющееся следствием нормировки 4-скорости, получаем

$$m_0 \dot{v}^k \dot{v}_k = m_0 \tau_0 \ddot{v}^k \dot{v}_k = \frac{m_0 \tau_0}{2}\frac{d}{d\tau}(\dot{v}^k \dot{v}_k), \qquad /4/$$

откуда

$$\dot{v}^k \dot{v}_k = -\lambda^2 \exp(3 m_0 \tau / e^2); \qquad /5/$$

постоянная интегрирования $\lambda^2 \geq 0$ ввиду пространственного подобия 4-ускорения. Отсюда видно, что для ненулевых λ^2 ускорение неограниченно растет.

§3. Этот своеобразный "эффект Мюнхаузена" считается дефектом классической электродинамики; однако не является ли послеускорение прообразом квантовых свойств реальных микрочастиц или, во всяком случае, решений более реалистичных уравнений /достаточно вспомнить Zitterbewegung Шредингера дираковского электрона/? В самом деле, пусть в /5/ $m_0 = 0$, тогда квадрат 4-ускорения такого безмассового заряда постоянен. Если безмассовая частица движется со скоростью света, то отличие от нуля постоянного квадрата 4-ускорения означает, что пространственный вектор ускорения перпендикулярен вектору скорости, т.е. частица совершает, вообще говоря, сложное движение.

§4. Такое наблюдение позволяет установить связь уравнений ЛД и Клейна-Гордона /КГ/. В качестве первого шага надо заметить, что /1/ можно записать /внешнее поле отсутствует/ в виде

$$m_0 \dot{v}^i(\tau) = -\frac{ae^2}{\epsilon'}\dot{v}^i\left(\tau - \frac{2}{3}\frac{\epsilon'}{a}\right) + \frac{2}{3}e^2 v^i(\tau)\dot{v}^k(\tau)\dot{v}_k(\tau)$$

/где $\epsilon' \to 0$/ или переобозначив $\epsilon = (2/3)\epsilon'/a$:

$$m_0 \dot{v}^i = -\frac{2}{3}e^2\frac{\dot{v}^i(\tau-\epsilon)}{\epsilon} + \frac{2}{3}e^2 v^i \dot{v}^k \dot{v}_k, \qquad /6/$$

или введя изотропный 4-вектор [2]:

$$R^k = x^k - z^k(\tau - \epsilon), \qquad /7/$$

$$R^k R_k = 0, \qquad /8/$$

$$m_0 \dot{v}^i = -\frac{2}{3}e^2\frac{\dot{v}^i(\tau-\epsilon)}{R^k v_k} + \frac{2}{3}e^2 v^i \dot{v}^k \dot{v}_k, \qquad /9/$$

где $\lim\limits_{\epsilon \to 0}(\epsilon / R^k v_k) = 1.$

Изотропный 4-вектор R^k направлен из запаздывающей точки $z^k(\tau-\epsilon)$ на мировой линии заряда в точку наблюдения x, которая одновременна с $z^k(\tau)$. Условие /8/ задает собственное время запаздывания ϵ как функцию координаты x^k точки наблюдения и позволяет выразить частную производную по координатам точки наблюдения через производную по собственному времени.

Дифференцируя /8/ по координатам точки наблюдения, легко найти:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}R^k R_k = R_k\left(\delta_i^k - \frac{dz^k}{d\tau_r}\frac{\partial \tau_r}{\partial x^i}\right),$$

откуда

$$\frac{\partial \tau_r}{\partial x^i} = \frac{R_i}{R^k v_k}, \qquad /10/$$

где $\tau_r = \tau - \epsilon$, так что если $\phi = \phi(\tau_r)$ - некоторая функция запаздывающего собственного времени, то

$$\partial^i \phi(\tau_r) = \frac{R^i}{R^k v_k} \dot{\phi}. \qquad /11/$$

Для того, чтобы найти представление оператора д'Аламбера в производных по запаздывающему собственному времени, определим сначала

$$\partial^i R^k v_k = (\delta^i_k - v_k \frac{R^i}{R^n v_n}) v^k + R^i \frac{R^k \dot{v}_k}{R^n v_n} = v^i - \frac{R^i}{R^n v_n} + R^i \frac{R^k \dot{v}_k}{R^n v_n}, \qquad /12/$$

затем

$$\partial^n \partial_k \phi(\tau_r) = \partial^n \frac{R_k}{R^m v_m} \dot{\phi} = (\delta^n_k - v_k \frac{R^n}{R^m v_m}) \frac{\dot{\phi}}{R^m v_m} -$$

$$- \frac{R^n \dot{\phi}}{(R^m v_m)^2} (v_k - \frac{R_k}{R^m v_m} + R_k \frac{R^n \dot{v}_n}{R^m v_m}) + \frac{R^n R_k}{(R^m v_m)^2} \ddot{\phi}. \qquad /13/$$

Теперь, полагая в /13/ $n = k$ и учитывая, что $\delta^k_k = 4$, а также /8/, легко получить:

$$\Box^2 \phi(\tau_r) \equiv \partial^k \partial_k \phi(\tau_r) = \frac{2}{R^k v_k} \dot{\phi}. \qquad /14/$$

Используя /14/, можно переписать /9/ в виде

$$m_0 \dot{v}^i(\tau) = -\frac{m_0 \tau_0}{2} \Box^2 v^i(\tau_r) + m_0 \tau_0 v^i(\tau) \dot{v}^k(\tau) \dot{v}_k(\tau), \qquad /15/$$

где $\tau_r \to \tau$.

Бесконечная электромагнитная масса "спрятана" под знак $\Box^2$, поэтому механическая масса в левой части /15/ должна быть отрицательной бесконечностью, так что идеология перенормировки массы в духе §1 сталкивается здесь с трудностями интерпретации, которые не возникают при использовании опережающего воздействия в следующем смысле. Уравнение /8/ имеет два корня, для запаздывающего и опережающего собственного времени; легко видеть, что если $\phi = \phi(\tau_a) = \phi(\tau + \epsilon)$, где τ_a есть опережающее собственное время, то

$$\lim_{\tau_a \to \tau} (|\epsilon| / R^k(\tau_a) v_k(\tau_a)) = -1$$

и

$$\Box^2 \phi(\tau_a) = \frac{2}{R^k(\tau_a) v_k(\tau_a)} \dot{\phi}(\tau_a). \qquad /16/$$

Вводя по определению

$$\Box^2 v^i(\tau) = \frac{1}{2} \lim_{\tau_r, \tau_a \to \tau} \Box^2 (v^i(\tau_r) + v^i(\tau_a)) = -2\ddot{v}^i(\tau), \qquad /17/$$

можно записать свободное уравнение ЛД /3/ в виде

$$m_0 \dot{v}^i(\tau) = -\frac{m_0 \tau_0}{2} \Box^2 v^i(\tau) + m_0 \tau_0 v^i(\tau) \dot{v}^k(\tau) \dot{v}_k(\tau), \qquad /18/$$

где в левой части стоит /конечная/ механическая масса заряда и собственное время является функцией координат.

Далее предстоит предельный переход к нулевой механической массе заряда. В этом пределе скорость заряда будет равна скорости света и соотношение /17/ позволяет интерпретировать самодействие такого заряда как взаимодействие с собственным незапаздывающим электромагнитным полем - полусумма в круглых скобках правой части /17/ есть, очевидно, мгновенное значение 4-скорости.

Чтобы не иметь дела с бесконечными компонентами 4-скорости безмассового заряда, целесообразно перейти к четырехмерному волновому вектору /ср. с /13// $k^i = dz^i / d\theta$, касательному к мировой линии заряда. Здесь θ есть некоторый параметр, меняющийся вдоль мировой линии. Полагая $m_0 = 0$, подставляя /5/ в /18/ и вводя вместо 4-скорости безмассового заряда "пропорциональный" ей 4-вектор k^i, можно получить

$$\Box^2 k^i + 2\lambda^2 k^i = 0 \qquad /19/$$

вместе с дополнительным условием

$$k^i k_i = 0, \qquad /20/$$

выражающим безмассовость заряда и определяющим k^i как поле изотропного 4-вектора, каждая компонента которого удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона /19/.

§5. Итак, свободное уравнение Лоренца-Дирака в пределе безмассового заряда и в предположении, что послеускорение имеет место, переходит в свободное уравнение Клейна-Гордона для векторной волновой функции, компоненты которой связаны условием /20/. Поиск физически приемлемых решений системы /19/-/20/ составит предмет отдельного рассмотрения.

§6. Эффект послеускорения, который для массивного заряда явным образом противоречит здравому смыслу, в случае безмассового заряда является любопытным примером "памяти": заряд сохраняет квадрат начального 4-ускорения. Это является, со всеми возможными оговорками, дополнительным свидетельством в пользу гипотезы о том, что отношение мировых констант, $\lambda^2 \sim (m^2/\hbar^2)$, было зафиксировано в момент Большого Взрыва: "проще" всего одинаковые для всех точечных зарядов начальные условия можно создать, "поместив" их в одну точку!

ЛИТЕРАТУРА

1. Байер В.Н., Катков В.М., Фадин В.С. Излучение релятивистских электронов. Атомиздат, М., 1973, с.56. См. также: Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. "Наука", М., 1974, с.123.
2. Новожилов Ю.В., Яппа Ю.А. Электродинамика. "Наука", М., 1978, с.113.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. "Наука", М., 1973, т.2, с.314.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 декабря 1982 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Сермягин А.В. Р2-82-907

О связи уравнений Лоренца-Дирака и Клейна-Гордона

Существование нефизических решений классического релятивистского уравнения Лоренца-Дирака /ЛД/, учитывающего реакцию собственного электромагнитного поля заряда, обычно считается фактом, противоречащим здравому смыслу. Предложено рассматривать парадокс послеускорения - самоускоряющееся решение уравнения ЛД как прообраз квантовых свойств микрочастиц, релятивистского дрожания дираковского электрона. Это позволяет, используя представление оператора д'Аламбера в производных по запаздывающему и опережающему собственному времени на мировой линии заряда, получить из свободного безмассового уравнения ЛД уравнение Клейна-Гордона для векторной волновой функции k^i с дополнительным условием $k^i k_i = 0$. Затрагивается возможная связь послеускорения с проблемой универсальности отношения мировых констант.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Sermyagin A.V. P2-82-907

On Connection between Lorentz-Dirac and Klein-Gordon Equations

Existence of unphysical solutions of the classical relativistic Lorentz-Dirac (LD) equation allowing for the radiation reaction of proper electromagnetic field of charge is considered usually as nonsense. It is suggested to treat the paradox of the afteracceleration or runaway solution of LD equation as a prototype of some sort quantum properties, namely the relativistic Zitterbeweging of Schroedinger. This permits by utilizing the D'Alembertian representation in derivations with respect to retarded and advanced proper time to get from the massless free LD equation the Klein-Gordon equation for vector wave function k^i under condition $k^i k_i = 0$. The possibility of connection between afteracceleration and the problem of universal ratio of world constants is also considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Neutron Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.