сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-82-870

С.В.Вышенский, Ю.П.Иванов

СПЕКТРАЛЬНОСТЬ ФУНКЦИИ ГЕЛЛ-МАННА-ЛОУ

1982

I. В работе [I] исходя из представления

$$\mathcal{D}(t)=\frac{1}{-t}\left(1+t\int_0^{+\infty}\frac{dt'}{t'-t}\;a(t')\right)^{-1} \tag{I}$$

для пропагатора фотона на основе теории источников [2] было выведено уравнение Гелл-Манна-Лоу (ГМЛ), продемонстрирована связь функции ГМЛ со спектральным весом $a(t)$ из соотношения (I), а также установлено неравенство

$$\psi(x) < x \tag{2}$$

для функции ГМЛ. Неравенство (2) позднее также было получено в работе [3].

Использование представления (I) вызвано тем обстоятельством, что к нему приводит обычный способ (см., например, книгу [2]) суммирования неограниченно повторяющихся электрон-позитронных петель (главное логарифмическое приближение). Полученное таким образом выражение (I) обладает хорошо известным нефизическим полюсом при пространственно-подобном значении аргумента. Рассуждения в [I] не совсем последовательны, поскольку в них предполагается отсутствие нефизических особенностей выражения (I), а в промежуточных выкладках - ограниченность "голого заряда", несмотря на то, что в дальнейшем с необходимостью делается вывод о бесконечном значении этой величины.

В работе [4] предложен метод суммирования диаграмм, позволяющий в том же приближении получить фотонный пропагатор в представлении Челлена-Лемана:

$$\mathcal{D}(t)=\frac{1}{-t-i0}+\int_0^{\infty}\frac{dt'}{t'-t-i0}\,\rho(t')\;,\quad \rho(t)>0. \tag{3}$$

Возникает естественное желание получить результаты работы [I], исходя из аналитических свойств выражения (3) и не делая предположений о величине "голого заряда". Эта задача и решается в данной работе.

2. Рассмотрим выражение

$$G(t)=-te^2\mathcal{D}(t)=e^2\left[1-t\int_0^{\infty}\frac{dt'}{t'-t-i0}\;\rho(t')\right] \quad . \tag{4}$$

Совершая замену переменных $t=-\theta^{-1}$ и обозначая $\sigma(\theta)=t\rho(t)$, $e^2 g(\theta)=G(t)$ получим:

$$g(\theta)=1-\int_{-\infty}^{0}\frac{d\theta'}{\theta'-\theta-i0}\,\sigma(\theta') . \tag{5}$$

Заметим, что $\sigma(\theta)>0$ $\forall\theta<0$. Полагая $\theta=x+iy$, выясним аналитические свойства функции $g(\theta)$. Очевидно, она не имеет полюсов на всей комплексной плоскости. Отсутствуют также комплексные нули ($y\neq0$), поскольку мнимая часть выражения (5)

$$-y\int\frac{d\theta'}{(\theta'-x)^2+y^2}\,\sigma(\theta')\neq0.$$

При действительных $\theta>0$ нулей тоже нет, поскольку здесь $g(\theta)>1$. Если $\theta<0$, то мнимая часть формы (5) равна $-\pi\sigma(\theta)$. Однако $\sigma>0$, поэтому нулей нет и здесь. Таким образом, функция $g(\theta)$ не обращается в нуль на всей комплексной плоскости, не имеет полюсов и обладает линией скачков $(-\infty,0)$. Такая функция представима в виде /5/

$$g(\theta)=\exp\left[-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{d\theta'}{\theta'-\theta-i0}\,\tilde\varphi(\theta')\right] , \tag{6}$$

где $\tilde\varphi$ – действительная функция.

Сравнивая действительные и мнимые части выражений (5) и (6), получим:

$$\pi\sigma(\theta)=\exp\left[-\frac{1}{\pi}\fint_{-\infty}^{0}\frac{d\theta'}{\theta'-\theta}\,\tilde\varphi(\theta')\right]\sin\tilde\varphi(\theta) , \tag{7}$$

$$\mathrm{tg}\,\tilde\varphi(\theta)=\frac{\pi\sigma(\theta)}{1-\fint\frac{d\theta'}{\theta'-\theta}\,\sigma(\theta')} , \tag{8}$$

где использовано главное значение интегралов по Коши. Из (7) следует, что $\sin\tilde\varphi(\theta)>0$ (поскольку $\sigma>0$) на разрезе. Непрерывность рассматриваемых весовых функций приводит к

$$0<\tilde\varphi(\theta)<\pi. \tag{9}$$

С помощью (6) функцию (4) представим в виде

$$G(t)=e^2\exp\left[-\frac{t}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{dt'}{t'(t'-t-i0)}\,\varphi\left(\frac{t'}{m^2},e^2\right)\right] , \tag{10}$$

где $\varphi(t/m^2,e^2)=\tilde\varphi(\theta)$.

3. Здесь нас интересует поведение $G(T)$ при $|T|\gg m^2$. Введем промежуточную массу λ: $|T|\gg\lambda^2\gg m^2$. Тогда

$$-\frac{T}{\pi}\int_{0}^{\lambda^2}\frac{dt}{t}\,\frac{\varphi}{t-T}\cong\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\lambda^2}\frac{dt}{t}\,\varphi .$$

И выражение (10) приобретает вид

$$G(T)\cong e_\lambda^2\exp\left[-\frac{T}{\pi}\int_{\lambda^2}^{\infty}\frac{dt}{t}\,\frac{\varphi(t/m^2,e^2)}{t-T}\right] , \tag{11}$$

где

$$e_\lambda^2=e^2\exp\left[\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\lambda^2}\frac{dt}{t}\,\varphi\right] . \tag{12}$$

Явное исчезновение спектральных масс, меньших чем λ из (11), обусловлено появлением эффективного заряда $e_\lambda>e$. Попробуем переписать весовую функцию φ в терминах массы λ вместо m и "заряда" e_λ вместо e (мы предполагаем разрешимость (12) относительно e):

$$\varphi\left(\frac{t}{m^2},e^2\right)=\omega\left(\frac{t}{\lambda^2},e_\lambda^2,\frac{m^2}{\lambda^2}\right) . \tag{13}$$

Обратим внимание на то, что $m^2/\lambda^2\ll 1$. Здесь вступает в игру один из основных принципов /1/ теории источников:

если экспериментальная ситуация не позволяет точно измерить физический параметр, то описание такой ситуации мало чувствительно к точному значению этого параметра.

В данном случае ситуация описывается соотношением $|T|\gg m^2$, а параметром является электронная масса m. То есть в распоряжении экспериментатора имеется слишком мало времени для точного определения импульсно-энергетических характеристик, а значит, и массы. Упомянутый принцип позволяет пренебречь зависимостью от m^2/λ^2 в (13):

$$\varphi(t/m^2,e^2)\cong\omega(t/\lambda^2,e_\lambda^2) .$$

Это соотношение справедливо при $\lambda^2\gg m^2$. В частности, выбирая $t\gg m^2$ и полагая $\lambda^2=t$, получим:

$$\varphi(t/m^2,e^2)\cong\omega(1,e_t^2)\equiv\Omega(e_t^2) . \tag{14}$$

Дифференцируя (12) по λ^2 и полагая $\lambda^2=t$, получаем уравнение

$$\frac{t}{e_t^2}\,\frac{d e_t^2}{dt}=\frac{1}{\pi}\,\Omega(e_t^2),$$

интегрируя которое приходим к

$$\ln\frac{t}{\sim m^2}=\pi\int_{e^2}^{e_t^2}\frac{dx}{x\,\Omega(x)} ,$$

где $\sim m^2$ обозначает значение t, при котором e_t^2 переходит в e^2 (заметим, что соотношение (I2) имеет смысл лишь при $\lambda \gg m$). Очевидно, мы получили уравнение ГМЛ, причем функция ГМЛ равна

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} x\, \Omega(x),$$

откуда, имея в виду соотношения (9) и (I4), немедленно следует неравенство (2).

Функция $\psi(x)$ связана со спектральным весом $\rho(t)$ из (3) соотношениями (8),(I4). Еще проще связь между $\psi(x)$ и спектральной функцией φ фазового представления (I0).

4. Используя метод, развитый в [6], можно убедиться в справедливости асимптотического равенства

$$-t e^2 \mathcal{D}(t) \sim e_{-t}^2\,, \qquad t \to -\infty\,,$$

что соответствует описанию Гелл-Манна-Лоу.

В [4] найдено асимптотическое поведение эффективного заряда в однопетлевом приближении для поляризационного оператора:

$$-t e^2 \mathcal{D}(t) \propto t^{\varkappa}\,, \quad t \to -\infty,\ \varkappa \approx 2\alpha/3\pi \approx 1{,}5 \cdot 10^{-3}.$$

Используя найденное там же выражение для ρ и учитывая (8), получим:

$$\operatorname{tg} \varphi(t) \to \pi\varkappa\,, \quad t \to +\infty\,.$$

Неравенство (9) позволяет заключить, что с ростом t от 0 до $+\infty$ фаза φ представления (I0) возрастает от 0 и в бесконечности стремится к константе $\varphi_\infty \approx \pi\varkappa$.

Авторы благодарны В.А.Мещерякову, С.В.Михайлову и Д.В.Ширкову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

I. J. Schwinger.Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1974, 71, p. 3024.
2. Ю.Швингер Частицы, источники, поля, т.I и 2."Мир", М., I973, I976.
3. N.V. Krasnikov.Nucl. Phys., 1981, B192, p.497.
4. S.V. Vyshensky. Preprint JINR, E2-82-681, Dubna, 1982.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. "Наука", М., I977.
6. J.Schwinger. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1974, 71,p.5047.

Рукопись поступила в издательский отдел
I6 декабря I982 года.

Вышенский С.В., Иванов Ю.П. P2-82-870
Спектральность функции Гелл-Манна-Лоу

С использованием методов теории источников Швингера продемонстрирована связь электродинамической функции Гелл-Манна-Лоу со спектральным весом представления Челлена-Лемана для фотонного пропагатора. Показано, что полный фотонный пропагатор в таком представлении не имеет нефизических особенностей. Это позволяет получить соотношение между пропагатором и уравнением Гелл-Манна-Лоу, причем функция Гелл-Манна-Лоу выражается через спектральный вес и удовлетворяет простому неравенству $\psi(x) < x$. Не делается никаких предположений о величине "голого" заряда.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Vyshenskij S.V., Ivanov Yu.P. P2-82-870
Spectrality of Gell-Mann-Low Function

The connection between the electrodynamical Gell-Mann-Low function and the spectral weight of the Källen-Lehmann representation for the photon propagator is demonstrated by the methods of Schwinger source theory. The total propagator is asummed to be presented in the Källen-Lehmann form and thus posesses no non-physical singularities. The Gell-Mann-Low function is expressed through the spectral weight and satisfies a simple inequality $\psi(x) < x$. No assumption as to the "base" charge value is made.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.