сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-82-819

Нгуен Ван Хьеу

К ТЕОРИИ
ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СУПЕРАЛГЕБРЫ
РАСШИРЕННОЙ СУПЕРСИММЕТРИИ

1982

I. Введение

Попытка построить группу симметрии с антикоммутирующими параметрами привела к созданию теории суперсимметрии /I-5/, обобщение которой - расширенная суперсимметрия - открывает возможность нетривиального объединения пространственно-временной симметрии элементарных частиц с их внутренней симметрией. При этом теория поля, инвариантная относительно локальных суперсимметричных преобразований, автоматически включает в себя гравитацию - (теория супергравитации /6,7/). Наряду с изучением новых привлекательных особенностей теории расширенной суперсимметрии и супергравитации были предложены различные модели спонтанно нарушенной суперсимметрии элементарных частиц /8-I0/. Проблема построения суперсимметрично-инвариантных амплитуд рассеяния рассматривалась в ряде работ /II-I3/. Недавно обсуждалась также возможность построения единой теории элементарных частиц, основанной на $N=8$ расширенной супергравитации /I4,I5/.

Для изучения суперсимметрично-инвариантной матрицы рассеяния нужно построить, вообще говоря, мультиплеты расширенной суперсимметрии - супермультиплеты. Эта проблема была рассмотрена в первых работах по теории суперсимметрии /I6/. В последние годы снова возник интерес к ней в связи с исследованием моделей нарушенной суперсимметрии /I7-20/. При этом с помощью метода индуцированного представления Вигнера строятся векторы состояния частиц в супермультиплетах как элементы представления клиффордовой алгебры.

В настоящей работе рассматривается реализация представлений мультиплетов расширенной суперсимметрии в спинорном базисе. Вместо векторов состояния с заданными импульсами и другими квантовыми числами теперь каждое представление описывается определенным набором ковариантных спиноров, переходящих один в другой в суперсимметричных преобразованиях. Этот формализм весьмы удобен при изучении суперсимметрично-инвариантной матрицы рассеяния, а также при нахождении возможных супермультиплетов связанных состояний двух или более частиц, принадлежащих заданным супермультиплетам.

2. Основные соотношения

Будем рассматривать супералгебру без центральных зарядов. Наряду с оператором полного импульса P_μ супералгебра N-расширенной суперсимметрии содержит еще четырехкомпонентные спинорные генераторы Q^α_k и $\overline{Q}^k_\alpha$, α = I,2,3,4, где индекс k пробегает значения от I до N. Вместо них часто пользуются также двухкомпонентными спинорами Q^a_k и $\overline{Q}^k_{\dot{a}}$, $a, \dot{a}$ = I,2, а вместо матриц Дирака γ_μ – матрицами σ_μ и $\tilde{\sigma}_\mu$ с элементами

$$(\sigma_4)^a{}_{\dot{b}} = (\tilde{\sigma}_4)^{\dot{a}}{}_b = \delta_{ab},$$

$$(\sigma_i)^a{}_{\dot{b}} = -(\tilde{\sigma}_i)^{\dot{a}}{}_b = i[\sigma_i]_{ab}, \quad i = 1,2,3,$$

где $[\sigma_i]_{ab}$ – элементы матриц Паули. Эти генераторы удовлетворяют следующим антикоммутационным соотношениям:

$$\{Q^\alpha_k, \overline{Q}^\ell_\beta\} = \delta^\ell_k(-i\hat{P})^\alpha_\beta = -i\delta^\ell_k(\gamma_\mu)^\alpha_\beta P_\mu, \tag{I}$$

$$\{Q^a_k, \overline{Q}^\ell_{\dot{b}}\} = \delta^\ell_k(-i\hat{P})^a_{\dot{b}} = -i\delta^\ell_k(\sigma_\mu)^a_{\dot{b}} P_\mu,$$

$$\{Q^a_k, Q^b_\ell\} = \{\overline{Q}^k_{\dot{a}}, \overline{Q}^\ell_{\dot{b}}\} = 0 . \tag{2}$$

Для супермультиплета с массой $M \neq 0$ в с.ц.м. эти соотношения сводятся к

$$\{Q^a_k, \overline{Q}^\ell_b\} = M\delta^\ell_k\delta^a_b . \tag{3}$$

Вместо пар индексов (a, k), $(b, \ell)\ldots$ или $(\dot{a}, k)$, $(\dot{b}, \ell)\ldots$ иногда удобно писать $A, B\ldots$ или $\dot{A}, \dot{B}\ldots$ Тогда вместо (3), например, мы имеем

$$\{Q^A, \overline{Q}_B\} = M\delta^A_B , \tag{3}$$

а соотношения (2) можно написать в сокращенном виде:

$$\{Q^A, \overline{Q}_{\dot{B}}\} = (-i\hat{P})^A_{\dot{B}} ,$$

$$\{Q^A, Q^B\} = \{\overline{Q}_{\dot{A}}, \overline{Q}_{\dot{B}}\} = 0 . \tag{2}$$

Каждое представление данной супералгебры состоит из набора ковариантных спиноров с индексами $A = (a, k)$, $B = (b, \ell)\ldots$ $\dot{A} = (\dot{a}, k)$, $\dot{B} = (\dot{b}, \ell)\ldots$

$$\Phi^{A_1\ldots A_r}_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_s} = \Phi^{a_1\ldots a_r,\, \ell_1\ldots\ell_s}_{\dot{b}_1\ldots\dot{b}_s,\, k_1\ldots k_r}$$

или набора ковариантных спиноров

$$\Phi^{\alpha_1\ldots\alpha_r,\, \ell_1\ldots\ell_s}_{\beta_1\ldots\beta_s,\, k_1\ldots k_r} .$$

Действие генераторов супералгебры на эти спиноры задается в виде правил коммутации или антикоммутации между ними в зависимости от того, описывает ли соответствующий спинор высшего ранга бозон или фермион. Эти правила должны удовлетворять тождеству Якоби вместе с антикоммутационными соотношениями (I) или (2).

3. Супермультиплеты с ненулевой массой

Если частицы в супермультиплете обладают ненулевой массой $M \neq 0$, то можно работать в с.ц.м. и ограничиться рассмотрением антикоммутационного соотношения (3) ради простоты. В ряде работ[16-20] было построено так называемое фундаментальное представление рассматриваемой супералгебры. В спинорном базисе такое фундаментальное представление супералгебры N-расширенной суперсимметрии состоит из набора спиноров

$$\Phi, \quad \Phi^{A}, \quad \Phi^{A_1 A_2}, \ldots\ldots \Phi^{A_1 \ldots A_{2N}},$$

причем спиноры высших рангов полностью антисимметричны относительно перестановок пар индексов

$$\Phi^{ABC} = -\Phi^{BAC} = \Phi^{BCA} = -\Phi^{CBA} = \cdots,$$

а соответствующие правила коммутации или антикоммутации имеют вид

$$\begin{gathered}
[Q^{A}, \Phi] = \Phi^{A}, \quad \{Q^{A_1}, \Phi^{A_2}\} = \Phi^{A_1 A_2}, \ldots \\
\{Q^{A_1}, \Phi^{A_2 \ldots A_{2N}}\} = \Phi^{A_1 \ldots A_{2N}}, \\
[\bar{Q}_B, \Phi] = 0, \quad \{\bar{Q}_B, \Phi^{A}\} = M \delta_B^{A} \Phi, \\
[\bar{Q}_B, \Phi^{A_1 A_2}] = M\left(\delta_B^{A_1} \Phi^{A_2} - \delta_B^{A_2} \Phi^{A_1}\right), \ldots \\
[\bar{Q}_B, \Phi^{A_1 \ldots A_{2N}}] = M\left(\delta_B^{A_1} \Phi^{A_2 \ldots A_{2N}} - \delta_B^{A_2} \Phi^{A_1 A_3 \ldots A_{2N}} + \ldots - \delta_B^{A_{2N}} \Phi^{A_1 \ldots A_{2N-1}}\right).
\end{gathered} \tag{4}$$

Спиноры с парными индексами $A, B \ldots$ выражаются через обычные спиноры спиновой группы $SU(2)$ с индексами $a, b \ldots$, несущие также индексы внутренней симметрии $k, l = 1, 2, \ldots N$. В качестве примера приводим формулы для случая $N=2$. Мы имеем

$$\begin{aligned}
&\Phi = \varphi, \quad \Phi^{A} \equiv \Phi^{a}_{k} = \varphi^{a}_{k}, \\
&\Phi^{AB} \equiv \Phi^{ab}_{kl} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varepsilon^{ab}\varphi_{kl} + \varepsilon_{kl}\varphi^{ab}\right), \\
&\Phi^{ABC} \equiv \Phi^{abc}_{klm} = \frac{1}{3\sqrt{6}}\Big\{\varepsilon^{ab}\left(\tilde{\varphi}^{c}_{k}\varepsilon_{lm} + \tilde{\varphi}^{c}_{l}\varepsilon_{km}\right) \\
&\quad + \varepsilon^{bc}\left(\tilde{\varphi}^{a}_{l}\varepsilon_{mk} + \tilde{\varphi}^{a}_{m}\varepsilon_{lk}\right) + \varepsilon^{ca}\left(\tilde{\varphi}^{b}_{m}\varepsilon_{kl} + \tilde{\varphi}^{b}_{k}\varepsilon_{ml}\right)\Big\}, \\
&\Phi^{ABCD} \equiv \Phi^{abcd}_{klmn} = \frac{1}{6\sqrt{6}}\Big\{\varepsilon^{ab}\varepsilon^{cd}\left(\varepsilon_{lm}\varepsilon_{nk} + \varepsilon_{km}\varepsilon_{nl}\right) \\
&\quad - \varepsilon^{ac}\varepsilon^{bd}\left(\varepsilon_{ml}\varepsilon_{nk} + \varepsilon_{kl}\varepsilon_{nm}\right) + \varepsilon^{ad}\varepsilon^{bc}\left(\varepsilon_{nl}\varepsilon_{mk} + \varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn}\right)\Big\}\tilde{\varphi},
\end{aligned} \tag{5}$$

где φ^{a}_{k} и $\tilde{\varphi}^{a}_{k}$ – дублеты группы внутренней симметрии $SU(N=2)$ со спином I/2, φ^{ab} – симметричный спинор второго ранга спиновой группы, описывающий синглет группы внутренней симметрии со спином I:

$$\varphi^{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_i)_{ac}\varepsilon_{cb}V_i,$$

φ_{kl} – симметричный спинор второго ранга группы внутренней симметрии, описывающий триплет со спином 0:

$$\varphi_{kl} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{km}(\sigma_i)_{ml}\pi_i,$$

а φ и $\tilde{\varphi}$ – синглеты группы внутренней симметрии со спином 0.

В обеих частях соотношений (4) переходим из системы центра масс в произвольную систему отсчета. Получим тогда следующие ковариантные формулы:

$$
\begin{aligned}
&[Q^{A},\Phi]=\Phi^{A}, \qquad \{Q^{A_1},\Phi^{A_2}\}=\Phi^{A_1A_2},\ \ldots \\
&\{Q^{A_1},\Phi^{A_2\ldots A_{2N}}\}=\Phi^{A_1\ldots A_{2N}}, \\
&[\bar{Q}_{\dot{B}},\Phi]=0, \quad \{\bar{Q}_{\dot{B}},\Phi^{A}\}=(-i\hat{p})^{A}_{\dot{B}}\Phi, \\
&[\bar{Q}_{\dot{B}},\Phi^{A_1A_2}]=(-i\hat{p})^{A_1}_{\dot{B}}\Phi^{A_2}-(-i\hat{p})^{A_2}_{\dot{B}}\Phi^{A_1},\ \ldots \\
&[\bar{Q}_{\dot{B}},\Phi^{A_1\ldots A_{2N}}]=(-i\hat{p})^{A_1}_{\dot{B}}\Phi^{A_2\ldots A_{2N}}-(-i\hat{p})^{A_2}_{\dot{B}}\Phi^{A_1\ldots A_{2N}} \\
&\qquad +\ldots-(-i\hat{p})^{A_{2N}}_{\dot{B}}\Phi^{A_1\ldots A_{2N-1}},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где p_μ – импульс частиц в супермультиплете, или в терминах спиноров Дирака:

$$
\begin{aligned}
&[Q^{\alpha}_{k},\Phi]=\Phi^{\alpha}_{k}, \quad \{Q^{\alpha_1}_{k_1},\Phi^{\alpha_2}_{k_2}\}=\Phi^{\alpha_1\alpha_2}_{k_1k_2},\ \ldots \\
&\{Q^{\alpha_1}_{k_1},\Phi^{\alpha_2\ldots\alpha_{2N}}_{k_2\ldots k_{2N}}\}=\Phi^{\alpha_1\ldots\alpha_{2N}}_{k_1\ldots k_{2N}}, \\
&[\bar{Q}^{\ell}_{\beta},\Phi]=0, \quad \{\bar{Q}^{\ell}_{\beta},\Phi^{\alpha}_{k}\}=\delta^{\ell}_{k}(-i\hat{p})^{\alpha}_{\beta}\Phi, \\
&[\bar{Q}^{\ell}_{\beta},\Phi^{\alpha_1\alpha_2}_{k_1k_2}]=\delta^{\ell}_{k_1}(-i\hat{p})^{\alpha_1}_{\beta}\Phi^{\alpha_2}_{k_2}-\delta^{\ell}_{k_2}(-i\hat{p})^{\alpha_2}_{\beta}\Phi^{\alpha_1}_{k_1},\ \ldots \\
&[\bar{Q}^{\ell}_{\beta},\Phi^{\alpha_1\ldots\alpha_{2N}}_{k_1\ldots k_{2N}}]=\delta^{\ell}_{k_1}(-i\hat{p})^{\alpha_1}_{\beta}\Phi^{\alpha_2\ldots\alpha_{2N}}_{k_2\ldots k_{2N}}-\ldots \\
&\qquad -\delta^{\ell}_{k_{2N}}(-i\hat{p})^{\alpha_{2N}}_{\beta}\Phi^{\alpha_1\ldots\alpha_{2N-1}}_{k_1\ldots k_{2N-1}}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Ковариантные спиноры в правых частях соотношений (7) для случая $N=2$, например, выражаются через ковариантные физические волновые функции следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\Phi^{\alpha}_{k}=\psi^{\alpha}_{k}, \\
&\Phi^{\alpha\beta}_{k\ell}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{M-i\hat{p}}{2M}\gamma_5C\right)^{\alpha\beta}\varphi_{k\ell}+\frac{1}{2}\varepsilon_{k\ell}\left(\frac{M-i\hat{p}}{2M}\gamma_\mu C\right)^{\alpha\beta}V_\mu, \\
&\Phi^{\alpha\beta\gamma}_{k\ell m}=\frac{1}{3\sqrt{6}}\left\{\left(\frac{M-i\hat{p}}{2M}\gamma_5C\right)^{\alpha\beta}\left(\tilde{\psi}^{\gamma}_{k}\varepsilon_{\ell m}+\tilde{\psi}^{\gamma}_{\ell}\varepsilon_{km}\right)+\left(\frac{M-i\hat{p}}{2M}\gamma_5C\right)^{\beta\gamma}\cdot\right. \\
&\qquad\left.\left(\tilde{\psi}^{\alpha}_{\ell}\varepsilon_{mk}+\tilde{\psi}^{\alpha}_{m}\varepsilon_{\ell k}\right)+\left(\frac{M-i\hat{p}}{2M}\gamma_5C\right)^{\gamma\alpha}\left(\tilde{\psi}^{\beta}_{m}\varepsilon_{k\ell}+\tilde{\psi}^{\beta}_{k}\varepsilon_{m\ell}\right)\right\}, \\
&\Phi^{\alpha\beta\gamma\delta}_{k\ell mn}=\frac{1}{6\sqrt{6}}\left\{\left(\frac{M-i\hat{p}}{2M}\gamma_5C\right)^{\alpha\beta}\left(\frac{M-i\hat{p}}{2M}\gamma_5C\right)^{\gamma\delta}\left(\varepsilon_{\ell m}\varepsilon_{nk}+\varepsilon_{km}\varepsilon_{n\ell}\right)\right. \\
&\qquad-\left(\frac{M-i\hat{p}}{2M}\gamma_5C\right)^{\alpha\gamma}\left(\frac{M-i\hat{p}}{2M}\gamma_5C\right)^{\beta\delta}\left(\varepsilon_{m\ell}\varepsilon_{nk}+\varepsilon_{k\ell}\varepsilon_{nm}\right) \\
&\qquad\left.+\left(\frac{M-i\hat{p}}{2M}\gamma_5C\right)^{\alpha\delta}\left(\frac{M-i\hat{p}}{2M}\gamma_5C\right)^{\beta\gamma}\left(\varepsilon_{n\ell}\varepsilon_{mk}+\varepsilon_{k\ell}\varepsilon_{mn}\right)\right\}\tilde{\varphi},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где C – матрица зарядового сопряжения.

Наряду с рассмотренным выше фундаментальным представлением с ненулевой массой супералгебры N – расширенной суперсимметрии приведем теперь ее максимальное представление, содержащее все другие представления в том смысле, что линейное пространство любого представления данной супералгебры всегда можно отождествить с одним подпространством линейного пространства этого максимального представления. В терминах ковариантных спиноров с парными индексами $A, B\ldots$ и $\dot{A}, \dot{B}\ldots$ такое максимальное представление состоит из следующего набора спиноров, полностью антисимметричных по парным индексам каждого типа:

$$\begin{array}{llll}
\Phi & \Phi^{A} & \Phi^{A_1A_2} \ldots\ldots & \Phi^{A_1\ldots A_{2N}} \\
\Phi_{\dot{B}} & \Phi^{A}_{\dot{B}} & \Phi^{A_1A_2}_{\dot{B}} \ldots\ldots & \Phi^{A_1\ldots A_{2N}}_{\dot{B}} \\
\Phi_{\dot{B}_1\dot{B}_2} & \Phi^{A}_{\dot{B}_1\dot{B}_2} & \Phi^{A_1A_2}_{\dot{B}_1\dot{B}_2} \ldots\ldots & \Phi^{A_1\ldots A_{2N}}_{\dot{B}_1\dot{B}_2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\Phi_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N}} & \Phi^{A}_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N}} & \Phi^{A_1A_2}_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N}} \ldots\ldots & \Phi^{A_1\ldots A_{2N}}_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N}}.
\end{array} \tag{9}$$

Они получаются из скалярной компоненты Φ посредством правил коммутации или антикоммутации вида

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\dot{B}} = [\bar{Q}_{\dot{B}}, \Phi], \quad \Phi_{\dot{B}_1\dot{B}_2} = \{\bar{Q}_{\dot{B}_1}, \Phi_{\dot{B}_2}\}, \ldots \\
&\Phi_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N}} = \{\bar{Q}_{\dot{B}_1}, \Phi_{\dot{B}_2\ldots\dot{B}_{2N}}\}, \\
&\Phi^{A} = [Q^{A}, \Phi], \quad \Phi^{A}_{\dot{B}} = \{Q^{A}, \Phi_{\dot{B}}\}, \ldots \\
&\Phi^{A}_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N}} = [Q^{A}, \Phi_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N}}], \ldots \\
&\Phi^{A_1A_2}_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N}} = \{Q^{A_1}, \Phi^{A_2}_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N}}\} \ldots
\end{aligned} \tag{10}$$

Коммутатор или антикоммутатор любого спинора данного набора и одного из генераторов $Q^{A}, \bar{Q}_{\dot{B}}$ всегда можно выразить в виде линейной комбинации спиноров этого набора, если применять тождество Якоби и соотношения (2) вместе с определениями (10).

Рассматриваемое максимальное представление приводимо, но не вполне приводимо, т.е. не разлагается в прямую сумму неприводимых представлений. Нетрудно проверить, что спиноры в последней строке приведенной выше таблицы (9)

$$\Phi_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N}}, \ \Phi^{A}_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N}}, \ \Phi^{A_1A_2}_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N}}, \ldots \ \Phi^{A_1\ldots A_{2N}}_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N}}$$

образуют одно неприводимое представление, которое можно отождествлять с фундаментальным представлением. Оно является нетривиальной частью приводимого, но не вполне приводимого представления, состоящего из спиноров двух последних строк таблицы (9):

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N-1}}, \ \Phi^{A}_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N-1}}, \ \Phi^{A_1A_2}_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N-1}}, \ldots \ \Phi^{A_1\ldots A_{2N}}_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N-1}}, \\
&\Phi_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N}}, \ \Phi^{A}_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N}}, \ \Phi^{A_1A_2}_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N}}, \ldots \ \Phi^{A_1\ldots A_{2N}}_{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2N}}.
\end{aligned}$$

Вообще говоря, совокупности всех спиноров r последних строк, $1 < r \leqslant 2N$, всегда образуют приводимые представления, содержащиеся в данном максимальном представлении.

Таким образом, наряду с неприводимым фундаментальным представлением были найдены $2N$ приводимых, но не вполне приводимых представлений, содержащих в себе фундаментальное представление и содержащих друг друга. Каждому такому представлению соответствует его сопряженное представление, отличающееся тем, что в наборе спиноров и в соотношениях коммутации или антикоммутации с генераторами повсюду производится замена $A \leftrightarrow \dot{A}$. Нетрудно проверить, что с точностью до линейного преобразования базиса максимальное представление совпадает с его сопряженным и содержит также все представления, сопряженные рассмотренным выше $2N$-представлениям, каждое из которых состоит из всех спиноров r последних строк таблицы (9), $1 \leqslant r \leqslant 2N$. Не будем обращать внимания на внешние индексы $a, b \ldots \dot{a}, \dot{b} \ldots$ группы Лоренца и внешние индексы $k, l \ldots$ группы $SU(N)$, не затрагиваемые суперсимметричными преобразованиями. Тогда найденные выше представления составляют множество всевозможных представлений с ненулевой массой суперагебры N -расширенной суперсимметрии, с точностью до эквивалентностей.

4. Супермультиплеты с нулевой массой

Как известно, каждая свободная безмассовая частица со спином s может находиться только в одном из двух состояний с определенным импульсом p_μ и со спиральностью $\pm s$. Эти состояния можно описать посредством симметричных спиноров группы Лоренца с $r = 2s$ индексами $\varphi^{a_1 \ldots a_r}$ и $\varphi_{\dot{b}_1 \ldots \dot{b}_r}$, удовлетворяющими уравнениям

$$(\hat{p})^{\dot{a}}_{b} \varphi^{bcd\ldots} = (\hat{p})^{\dot{b}}_{a} \varphi_{\dot{b}\dot{c}\dot{d}\ldots} = 0, \tag{11}$$

в эквивалентном виде

$$(\hat{p})^{b}_{\dot{a}} \varphi^{cde\ldots} = (\hat{p})^{c}_{\dot{a}} \varphi^{bde\ldots} = (\hat{p})^{d}_{\dot{a}} \varphi^{bce\ldots} = \ldots,$$

$$(\hat{p})^{a}_{\dot{b}} \varphi_{\dot{c}\dot{d}\dot{e}\ldots} = (\hat{p})^{a}_{\dot{c}} \varphi_{\dot{b}\dot{d}\dot{e}\ldots} = (\hat{p})^{a}_{\dot{d}} \varphi_{\dot{b}\dot{c}\dot{e}\ldots} = \ldots \tag{12}$$

где

$$(\hat{p})^{\dot{a}}_{b} = p_\mu (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}}_{b}, \quad (\hat{p})^{a}_{\dot{b}} = p_\mu (\sigma_\mu)^{a}_{\dot{b}}, \quad p_4 = i p_0 .$$

В работах [16-20] была изучена серия безмассовых супермультиплетов, каждый из которых содержит состояния со спиральностями, меняющимися от максимального значения λ до минимального значения $\lambda - \frac{N}{2}$. Положим

$$r = 2\lambda, \quad t = |2\lambda - N| .$$

Если $\lambda > \frac{N}{2}$, то супермультиплет с максимальной спиральностью λ описывается следующим набором ковариантных симметричных спиноров группы Лоренца

$$\Phi^{a_1 \ldots a_r}, \quad \Phi^{a_1 \ldots a_{r-1}, k}, \quad \Phi^{a_1 \ldots a_{r-2}, k_1 k_2}, \ldots, \quad \Phi^{a_1 \ldots a_t, k_1 \ldots k_N},$$

причем спиноры с двумя или более индексами $k_1, k_2 \ldots$ группы $SU(N)$ полностью антисимметричны по отношению к этим индексам. Они удовлетворяют следующим правилам коммутации или антикоммутации:

$$[Q^{b}_{l}, \Phi^{a_1 \ldots a_r}]_{\mp} = 0,$$

$$[\bar{Q}^{l}_{\dot{b}}, \Phi^{a_1 \ldots a_r}]_{\mp} = (-i\hat{p})^{a_1}_{\dot{b}} \Phi^{a_2 \ldots a_r, l} \ldots \mp (-i\hat{p})^{a_r}_{\dot{b}} \Phi^{a_1 \ldots a_{r-1}, l},$$

$$[Q^{a_1}_{k}, \Phi^{a_2 \ldots a_r, l}]_{\pm} = \delta^{l}_{k} \Phi^{a_1 \ldots a_r},$$

$$[\bar{Q}^{l_1}_{\dot{b}}, \Phi^{a_2 \ldots a_r, l_2}]_{\pm} = (-i\hat{p})^{a_2}_{\dot{b}} \Phi^{a_3 \ldots a_r, l_1 l_2} \pm (-i\hat{p})^{a_r}_{\dot{b}} \Phi^{a_2 \ldots a_{r-1}, l_1 l_2}, \tag{13}$$

$$\left[Q^{a_1}_k, \Phi^{a_2\dots a_{t+1}, l_1\dots l_N}\right]_\mp = \delta^{l_1}_k \Phi^{a_1\dots a_{t+1}, l_2\dots l_N} -$$
$$-\delta^{l_2}_k \Phi^{a_1\dots a_{t+1}, l_1 l_3 \dots l_N} + \dots \mp \delta^{l_N}_k \Phi^{a_1\dots a_{t+1}, l_1\dots l_{N-1}},$$
$$\left[\bar{Q}^k_{\dot{b}}, \Phi^{a_1\dots a_t, l_1\dots l_N}\right]_\mp = 0,$$

где выбирается верхний или нижний знак в зависимости от того, четно или нечетно соответствующее число r, t или N. Если же $\lambda < \frac{N}{2}$, то супермультиплет с максимальной спиральностью λ описывается следующим набором ковариантных симметричных спиноров группы Лоренца

$$\Phi^{a_1\dots a_r}, \Phi^{a_1\dots a_{r-1}, k}, \dots, \Phi^{a, k_1\dots k_{r-1}},$$
$$\Phi^{k_1\dots k_r} \sim \Phi_{l_1\dots l_t}, \Phi_{\dot{b}, l_1\dots l_{t-1}}, \dots$$
$$\Phi_{\dot{b}_1\dots \dot{b}_{t-1}, l}, \Phi_{\dot{b}_1\dots \dot{b}_t},$$

причем спиноры с двумя или более индексами группы $SU(N)$ $k_1, k_2\dots$ и $l_1, l_2\dots$ полностью антисимметричны по отношению к этим индексам. Они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left[Q^b_l, \Phi^{a_1\dots a_r}\right]_\mp = 0,$$
$$\left[\bar{Q}^l_{\dot{b}}, \Phi^{a_1\dots a_r}\right]_\mp = (-i\hat{p})^{a_1}_{\dot{b}} \Phi^{a_2\dots a_r, l} - \dots \mp (-i\hat{p})^{a_r}_{\dot{b}} \Phi^{a_1\dots a_{r-1}, l},$$

....

(I4)

$$\left[Q^a_l, \Phi^{k_1\dots k_r}\right] = \delta^{k_1}_l \Phi^{a, k_2\dots k_r} - \dots \mp \delta^{k_r}_l \Phi^{a, k_1\dots k_{r-1}},$$
$$\left[\bar{Q}^k_{\dot{b}}, \Phi_{l_1\dots l_t}\right] = \delta^k_{l_1} \Phi_{\dot{b}, l_2\dots l_t} - \dots \mp \delta^k_{l_t} \Phi_{\dot{b}, l_1\dots l_{t-1}},$$

....

$$\left[Q^a_l, \Phi_{\dot{b}_1\dots \dot{b}_t}\right]_\mp = (-i\hat{p})^a_{\dot{b}_1} \Phi_{\dot{b}_2\dots \dot{b}_t, l} - \dots \mp (-i\hat{p})^a_{\dot{b}_t} \Phi_{\dot{b}_1\dots \dot{b}_{t-1}, l}.$$

В частном случае, когда число N четно, в рассмотренной выше серии неприводимых безмассовых супермультиплетов выделяется специальное неприводимое представление с $r = t = 2\lambda = \frac{N}{2}$, описывающее самосопряженный супермультиплет, переходящий в себя в преобразовании CPT. Для $N = 4$ такое представление состоит из следующего набора ковариантных спиноров:

$$\Phi^{(ab)}, \Phi^{a,k}, \Phi^{[kl]} \sim \Phi_{[k'l']}, \Phi_{\dot{a},k}, \Phi_{(\dot{a}\dot{b})}, \tag{I5}$$

а для $N = 8$ оно содержит ковариантные спиноры:

$$\Phi^{(abcd)}, \Phi^{(abc)k}, \Phi^{(ab)[kl]}, \Phi^{a[klm]}, \Phi^{[klmn]} \sim \Phi_{[k'l'm'n']},$$
$$\Phi_{\dot{a}[klm]}, \Phi_{(\dot{a}\dot{b})[kl]}, \Phi_{(\dot{a}\dot{b}\dot{c})k}, \Phi_{(\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d})}, \tag{I6}$$

где круглая скобка обозначает полную симметричность по отношению к перестановкам соответствующих индексов, а квадратная – полную антисимметричность. В работе [13] эти специальные неприводимые представления применяются для описания преонов.

Наряду с вышерассмотренными неприводимыми представлениями данной супералгебры, описывающими безмассовые супермультиплеты, существуют еще приводимые представления различных видов. Среди них имеются максимальные представления, которые не могут содержаться ни в каких других представлениях. Приведем одно из максимальных представлений для случая $N=4$. Оно описывается следующим набором ковариантных спиноров:

$$
\begin{array}{lllll}
\Phi & \Phi^{l}_{\dot b} & \Phi^{l_1 l_2}_{\dot b_1 \dot b_2} \cdots\cdots & \Phi^{l_1 l_2 l_3 l_4}_{\dot b_1 \dot b_2 \dot b_3 \dot b_4} & \\
\Phi^{a}_{k} & \Phi^{l}_{k} & \Phi^{l_1 l_2}_{\dot b, k} \cdots\cdots & \Phi^{l_1 l_2 l_3 l_4}_{\dot b_1 \dot b_2 \dot b_3, k} & \\
\Phi^{a_1 a_2}_{k_1 k_2} & \Phi^{a, l}_{k_1 k_2} & \Phi^{l_1 l_2}_{k_1 k_2} \cdots\cdots & \Phi^{l_1 l_2 l_3 l_4}_{\dot b_1 \dot b_2, k_1 k_2} & \\
\Phi^{a_1 a_2 a_3}_{k_1 k_2 k_3} & \Phi^{a_1 a_2, l}_{k_1 k_2 k_3} & \Phi^{a, l_1 l_2}_{k_1 k_2 k_3} \cdots\cdots & \Phi^{l_1 l_2 l_3 l_4}_{\dot b, k_1 k_2 k_3} & \\
\Phi^{a_1 a_2 a_3 a_4}_{k_1 k_2 k_3 k_4} & \Phi^{a_1 a_2 a_3, l}_{k_1 k_2 k_3 k_4} & \Phi^{a_1 a_2, l_1 l_2}_{k_1 k_2 k_3 k_4} \cdots\cdots & \Phi^{l_1 l_2 l_3 l_4}_{k_1 k_2 k_3 k_4} . & (17)
\end{array}
$$

Спиноры в таблице (I7) полностью симметричны по отношению к индексам Лоренца $a_1, a_2 \ldots$ и $\dot b_1, \dot b_2 \ldots$, но полностью антисимметричны по отношению к индексам $SU(N)$ каждого сорта $k_1, k_2 \ldots$ и $l_1, l_2 \ldots$. Последняя строка таблицы (I7) описывает одно неприводимое представление, а каждая совокупность всех спиноров в r последних строках этой таблицы, $1 < r \leq 4$, образует одно приводимое, но не вполне приводимое представление рассматриваемой супералгебры.

Максимальное представление (I7) является типичным в следующем смысле: для получения любого другого максимального представления с нулевой массой достаточно исходить из спиноров в таблице (I7) и затем либо добавить к ним определенное число r верхних непунктирных (нижних пунктирных) индексов группы Лоренца, либо убрать с них такое же число r нижних пунктирных (верхних непунктирных) индексов группы Лоренца, либо добавить к ним r_1 верхних (нижних) и одновременно убрать с них r_2 нижних (верхних) индексов, $r_1 + r_2 = r$, так, чтобы после этого появились лишь спиноры Лоренца со всеми пунктирными или со всеми непунктирными индексами. Каждая совокупность всех спиноров последних строк новой таблицы также образует одно приводимое представление. Можно показать, что таким образом мы получим все супермультиплеты с нулевой массой.

Заметим, что для описания безмассовых частиц с высшими спинами вместо симметричных спиноров группы Лоренца с индексами $a, b \ldots$ и $\dot a, \dot b \ldots$ часто пользуются также другими ковариантными величинами. Так, например, частица с нулевой массой и спином I описывается либо спинорами φ^{ab} и $\varphi_{\dot a \dot b}$, либо четырехмерным вектором V_μ, удовлетворяющим условию поперечности

$$p_\mu V_\mu = 0 ,$$

причем эти величины связаны между собой следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\varphi^{ab} \sim (\sigma_{\mu\nu})^{ab} (p_\mu V_\nu - p_\nu V_\mu) , \\
&\varphi_{\dot a \dot b} \sim (\tilde\sigma_{\mu\nu})_{\dot a \dot b} (p_\mu V_\nu - p_\nu V_\mu) , \\
&(\sigma_{\mu\nu})^{ab} = \frac{1}{4} \left[(\sigma_\mu)^{a}_{\dot c} (\tilde\sigma_\nu)^{\dot c}_{d} - (\sigma_\nu)^{a}_{\dot c} (\tilde\sigma_\mu)^{\dot c}_{d} \right] \varepsilon^{db} , \\
&(\tilde\sigma_{\mu\nu})_{\dot a \dot b} = \frac{1}{4} \varepsilon_{\dot a \dot c} \left[(\tilde\sigma_\mu)^{\dot c}_{d} (\sigma_\nu)^{d}_{\dot b} - (\tilde\sigma_\nu)^{\dot c}_{d} (\sigma_\mu)^{d}_{\dot b} \right] .
\end{aligned}
$$

5. Обсуждение

Мы изложили спинорный формализм теории представлений супералгебры N-расширенной суперсимметрии, в рамках которого каждое представление данной супералгебры, т.е. каждый супермультиплет описывается некоторым набором ковариантных спиноров, выражающихся через физические волновые функции свободных частиц. Такой спинорный базис является весьма удобным аппаратом для построения суперсимметрично-инвариантной матрицы рассеяния. Он будет также полезным в дальнейшем изучении феноменологии нарушенной суперсимметрии взаимодействий элементарных частиц. Кроме того, при его помощи легко решить задачу нахождения возможных супермультиплетов связанных состояний двух или более частиц, принадлежащих заданным представлениям рассматриваемой супералгебры. Интерес к этой задаче в последнее время возрос в связи с изучением суперсимметричных составных моделей элементарных частиц. По сравнению с методом нахождения семейств полюсов Редже в спиральных амплитудах рассеяния, развитым в ряде работ /II-I3/, применяемый нами чисто алгебраический метод, основанный на спинорном формализме, намного проще и нагляднее.

В качестве примера рассмотрим составные частицы, образуемые из двух безмассовых преонов, принадлежащих специальному неприводимому представлению (I5) супералгебры с $N = 4$. Их векторы состояния должны преобразоваться как произведения двух волновых функций в двух различных наборах спиноров с импульсами p_μ и q_μ. Последние обозначаются через

$$\varphi^{(ab)},\ \varphi^{a,k},\ \varphi^{[kl]},\ \varphi_{\dot a,k},\ \varphi_{(\dot a\dot b)},$$
$$\tilde\varphi^{(ab)},\ \tilde\varphi^{a,k},\ \tilde\varphi^{[kl]},\ \tilde\varphi_{\dot a,k},\ \tilde\varphi_{(\dot a\dot b)}.$$

Для изучения супермультиплета безмассовых составных частиц мы ограничимся случаем, когда четырехмерные импульсы p_μ и q_μ параллельны друг другу. Можно показать, что существуют линейные комбинации произведений двух волновых функций в различных вышеприведенных наборах спиноров, образующие неприводимый супер-

мультиплет с нулевой массой и максимальной спиральностью $\lambda = \frac{N}{2} = 2$

$$\Phi^{(abcd)} = \frac{1}{6}\Big[\varphi^{(ab)}\tilde\varphi^{(cd)} + \varphi^{(ac)}\tilde\varphi^{(bd)} + \varphi^{(ad)}\tilde\varphi^{(bc)} + \varphi^{(bc)}\tilde\varphi^{(ad)} + \varphi^{(bd)}\tilde\varphi^{(ac)} + \varphi^{(cd)}\tilde\varphi^{(ab)}\Big],$$

$$\Big[\bar Q^k_{\dot e}, \Phi^{(abcd)}\Big] = (-i\hat P)^a_{\dot e}\,\Phi^{(bcd)k} = (-i\hat P)^b_{\dot e}\,\Phi^{(acd)k} = \ldots\ldots,$$

$$\Big\{\bar Q^l_{\dot f}, \Phi^{(abc)k}\Big\} = (-i\hat P)^a_{\dot f}\,\Phi^{(bc)[lk]} = (-i\hat P)^b_{\dot f}\,\Phi^{(ac)[lk]} = \ldots\ldots,$$

$$\Big[\bar Q^m_{\dot g}, \Phi^{(ab)[lk]}\Big] = (-i\hat P)^a_{\dot g}\,\Phi^{b[mlk]} = (-i\hat P)^b_{\dot g}\,\Phi^{a[mlk]},$$

$$\Big\{\bar Q^n_{\dot h}, \Phi^{a[mlk]}\Big\} = (-i\hat P)^a_{\dot h}\,\Phi^{[nmlk]},$$

$$\Big[\bar Q^p_{\dot a}, \Phi^{[nmlk]}\Big] = 0,$$

$$P_\mu = p_\mu + q_\mu, \qquad P^2 = 0.$$

Таким образом, с чисто алгебраической точки зрения два преона в супермультиплете

$$(+1),\ \left(+\tfrac{1}{2}\right)^k,\ (0)^{[kl]},\ \left(-\tfrac{1}{2}\right)_k,\ (-1),$$

содержащем фотон-подобные состояния в качестве своих компонент с максимальной спиральностью, могут образовать составные частицы в супермультиплете

$$(+2),\ \left(+\tfrac{3}{2}\right)^k,\ (+1)^{[kl]},\ \left(+\tfrac{1}{2}\right)_k,\ (0) + CPT,$$

компоненты с максимальной спиральностью которого являются гравитон-подобными состояниями. Этот результат был установлен в работе/13/ при помощи другого метода, основанного на изучении семейств полюсов Редже в спиральных амплитудах рассеяния. Наш вывод требует лишь проведения рассуждений и вычислений алгебраического характера.

В заключение автор выражает свою искреннюю признательность В.А.Мещерякову, В.И.Огиевецкому, Я.А.Смородинскому и Д.В.Ширкову за интерес к работе и стимулирующие обсуждения.

Литература

1. Ю.А.Гольфанд, Е.П.Лихтман.Письма в ЖЭТФ,13, 452 (1971).
2. Д.В.Волков, В.П.Акулов, ТМФ, 18, 39 (1974).
3. J.Wess, B.Zumino, Phys. Lett., B49, 52 (1974).
4. В.И.Огиевецкий, Л.Мезинческу, УФН, 117, 637 (1975).
5. P.Fayet, S.Ferrara, Phys. Rep. 32C, 249 (1977).
6. P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rep., 68C, 192 (1981).
7. В.И.Огиевецкий, Э.С.Сокачев, ЯФ, 28, 1631 (1978); 31, 264, 821 (1980); 32, 862, 870 (1980).
8. P.Fayet, Phys.Lett., 69B,389(1977); 70B,461(1977).
9. M.Sohnius, Nucl. Phys., B122,291 (1977).
10. S.Weinberg, Phys. Rev., D26,287(1982).
11. M.T.Grisaru, H.N.Pendleton, P.van Nieuwenhuizen, Phys. Rev., D15, 996 (1977).
12. M.T.Grisaru, H.N.Pendleton, Nucl. Phys. B124, 81 (1977).
13. M.T.Grisaru, H.J.Schnitzer, Nucl. Phys. B204, 267 (1982).
14. E.Cremmer, B.Julia, Nucl. Phys., B159, 141 (1979).
15. J.Ellis, M.K.Gaillard, B.Zumino, Phys. Lett., 94B, 343 (1980).

16. A.Salam, J.Strathdee, Nucl. Phys., B80, 499 (1974); B84, 127 (1974); Forschr. der Physik, 26, 57 (1978).
17. W.Nahm, Nucl. Phys., B135, 149 (1978).
18. S.Ferrara, Proc. 9th Int. Conf. on General Relativity and Gravitation, Jena, July, 1980.
19. J.P.Derendinger, S.Ferrara, C.A.Savoy, Nucl. Phys. B188, 77 (1981).
20. S.Ferrara, C.A.Savoy, Lectures at Spring School on Supergravity, ICTP, Trieste, April-May 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 декабря 1982 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Нгуен Ван Хьеу Р2-82-819
К теории представлений супералгебры расширенной суперсимметрии

Предлагается реализация представлений супералгебры N-расширенной суперсимметрии в виде наборов ковариантных спиноров группы Лоренца, носящих также индексы группы внутренней симметрии. Наряду с неприводимыми представлениями рассматриваются также приводимые, но не вполне приводимые представления.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Nguyen Van Hieu P2-82-819
On the Theory of Representations of Extended Supersymmetry Superalgebra

The representations of the N-extended supersymmetry superalgebra are realized in terms of the Lorentz covariant spinors. Beside of the irreducible representations the reducible, but not completely reducible ones, are also considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод автора.