объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна



Р2-82-813

К.В.Рерих

# МЕТОД РЕКУРРЕНТНОГО ПОСТРОЕНИЯ ОБЩИХ ИНТЕГРАЛОВ И ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ

Направлено в журнал "ТМФ"

1982

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе[1] был развит новый подход к проблеме построения общего решения уравнений Чу-Лоу[2], использующий аппарат теории преобразований Кремона /см. также [3] /. В рамках этого подхода было получено общее функциональное трехпараметрическое уравнение на инвариантные формы двух переменных, отношение которых при возведении их в подходящие степени дает общий интеграл системы уравнений Чу-Лоу - четную антипериодическую функцию $C(w)$, локальная зависимость от которой общего решения этих уравнений была установлена ранее в [5] на основе другого подхода [4]. В [1] были также указаны структура второго общего интеграла и функциональное уравнение, решением которого он является. Эти интегралы определяют неявным образом две из трех искомых функций, входящих в уравнения Чу-Лоу. Решение нелинейного разностного уравнения для третьей функции при найденных предварительно первых двух исчерпывает проблему построения общего решения уравнений Чу-Лоу.

Первый шаг на этом пути был сделан в[6], где получено общее решение уравнений Чу-Лоу в виде отношений двух рядов по $C(w)$ с точностью до кубических членов по $C(w)$ включительно. /Отметим, что линейное приближение было получено ранее в[7], а квадратичное - независимо в[8] /. Там же, в[6], был предложен механизм получения правильного поведения решения в борновском полюсе уже в линейном, в отличие от [7,8], приближении по $C(w)$. Этот механизм в принципе позволяет находить не нарушающие борновское поведение высшие приближения по $C(w)$, используя на последней стадии известную неопределенность в построении упомянутых выше двух общих интегралов, однако эта процедура не обладает универсальностью.

В настоящей работе решаются полученные в[1] функциональные уравнения, определяющие общие интегралы, путем разложения последних в функциональные ряды по одной из переменных, совпадающих в линейном приближении с $C(w)$. Для коэффициентных функций этих функциональных рядов получены рекуррентные системы линейных разностных уравнений, решения которых для первых двух шагов приведены. Получены уравнения, позволяющие выразить две из трех искомых функций, входящих в уравнения Чу-Лоу, через общие интегралы. Для коэффициентов функционального ряда третьей искомой функции получена рекуррентная система линейных разностных уравнений, позволяющая найти ее как функцию двух первых. Приведено решение системы для первых двух шагов. Таким образом, описанный метод позволяет найти в любом приближении по $C(w)$ общее решение уравнений Чу-Лоу, которое для возможных приложений приведено в заключе́нии в квадратичном по $C(w)$ приближении. В работе сформулированы единообразные условия, накладываемые на поведение при $w=0$ коэффициентных функций во всех порядках и $C(w)$, обеспечивающие правильное поведение общего решения уравнений Чу-Лоу в борновском полюсе.

## 2. РЕКУРРЕНТНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ОБЩИХ ИНТЕГРАЛОВ

Как известно [9], переход к нелинейной краевой задаче на элементы $S$- матрицы и введение униформизующей переменной $w=\pi^{-1}\arcsin\omega$, где $\omega$- энергия пиона в лабораторной системе, позволяют свести проблему нахождения всех решений интегральных уравнений Чу-Лоу к решению следующей системы нелинейных разностных уравнений вида [9,10]:

$$S_i(w)S_i(1-w)=1,\qquad S_i(w+1)=1/\sum_j A_{ij}S_j(w), \tag{/1/}$$

в классе мероморфных действительных функций комплексного переменного $w$ /мы не выписываем здесь условия порогового поведения и поведения в борновском полюсе/. В /1/ $S_i(w)$ - элементы $S$ - матрицы в состояниях $i$; $A_{ij}$ - элементы матрицы кроссинг-симметрии:

$$A_{ij}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & -8 & 16\\ -2 & 7 & 4\\ 4 & 4 & 1\end{pmatrix}. \tag{/2/}$$

Мы будем использовать систему уравнений /1/ в более удобной для нас форме, предложенной в [4]:

$$x'=F(x,y),\quad y'=-F(y,x),\qquad F(x,y)=\frac{x+2x^2-xy-2y^2}{1+3x+3y-2x^2-3xy-2y^2}, \tag{/3/}$$

$$x'=x(w+1),\; y'=y(w+1),\; x(-w)=-x(w),\; y(-w)=y(w).$$

$$t'\cdot t(w)=(1-2y'-x')(1-2y+x), \tag{/4/}$$

$$t'=t(w+1),\; t(-w)=t(w).$$

Связь $S_i(w)$ в /1/ с функциями $x(w)$, $y(w)$ и $t(w)$ из /3/ и /4/ дается формулой

$$S_i(w)=(\xi_i+\eta_i\,y(w)+\lambda_i\,x(w))/t(w), \tag{/5/}$$

где $\xi$, $\eta$, $\lambda$ - собственные векторы матрицы $A$ из /2/:

$$A(\xi,\eta)=(\xi,\eta),\quad A\lambda=-\lambda,$$
$$\xi=(1,1,1),\quad \eta=(4,-2,1),\quad \lambda=(-4,-1,2). \tag{/6/}$$

В [1] нами были получены структуры двух общих интегралов системы /3/:

$$\Phi_1(x^2,y)=C(w),\quad \text{где}\quad C(w+1)=-C(w),\; C(-w)=C(w),$$

$$\Phi_2^{-1}(x,y)=\frac{1+\phi(x^2,y)}{x}=w+\beta(w),\quad \text{где}\; \beta(w+1)=\beta(w),\; \beta(-w)=-\beta(w),$$

которые удовлетворяют функциональным уравнениям:

$$\Phi_1(x'^2,y')=-\Phi_1(x^2,y),\qquad \frac{1+\phi(x'^2,y')}{x'}=\frac{1+\phi(x^2,y)}{x}+1. \tag{/7/}$$

Для дальнейшего рассмотрения более удобно перейти от переменных $x$ и $y$ к $z$, $v$:

$$z=1/x,\quad v=(y-x^2)/x^2. \tag{/8/}$$

Тогда уравнения /3/ для $z$ и $v$ примут вид

$$z'=z+1-h(z,v)zv,\qquad v'=-\frac{vz^2}{(1+z)^2}\,g(z,v), \tag{/9/}$$

где

$$h(z,v)=p(z)\,[1+2z+v][1+2(1+\frac{z}{4})p(z)v+p(z)v^2]^{-1},$$

$$g(z,v)=[1+(1+\frac{1}{2}z)^{-2}v][1+(1-z)^{-2}v][1+2(1+\frac{z}{4})p(z)v+p(z)v^2]^{-2} \tag{/10/}$$

и

$$p(z)=[(1-z^2)(1+\frac{z}{2})]^{-1}.$$

Уравнения /7/ в переменных /8/ примут вид

$$F(z',v')=-F(z,v), \tag{/11/}$$

$$\bar\phi(z',v')=\bar\phi(z,v)+h(z,v)zv, \tag{/12/}$$

где $F(z,v)=\Phi_1(z^{-2},(v+1)z^{-2})$ и $\bar\phi(z,v)=z\phi(z^{-2},(v+1)z^{-2})$.

Разлагая функции $F$ и $\bar\phi$ из /11/ и /12/ в ряды по степеням $z^2v$:

$$F(z,v)=\sum_{k=1}^{\infty}F^{(k)}(z)(zv^2)^k, \tag{/13/}$$

$$\bar\phi(z,v)=\sum_{k=1}^{\infty}\bar\phi^{(k)}(z)(z^2v)^k, \tag{/14/}$$

$$h(z,v)=\sum_{k=0}^{\infty}h^{(k)}(z)v^k, \tag{/15/}$$

получим рекуррентную систему разностных уравнений на функции $F^{(k)}(z)$ и $\phi^{(k)}(z)$:

$$(-1)^{\ell} F^{(\ell)}(z+1) + F^{(\ell)}(z) = -\sum_{k=1}^{\ell-1} \mathfrak{L} F^{(k)}(z), \qquad /16/$$

$$(-1)^{\ell} \bar{\phi}^{(\ell)}(z+1) - \bar{\phi}^{(\ell)}(z) = -\sum_{k=1}^{\ell-1} \mathfrak{L} \bar{\phi}^{(k)}(z) + \frac{h^{(\ell-1)}(z)}{z^{2\ell-1}}, \qquad /17/$$

$\ell = 1, 2, \ldots,$
где действие оператора $\mathfrak{L}$ на $F^{(k)}(z)$ и $\bar{\phi}^{(k)}(z)$ определяется из /9-14/ следующим образом:

$$\mathfrak{L} G^{(k)}(z) = \sum_{s=0}^{\ell-k} \frac{1}{s!} \frac{d^s}{dz^s} G^{(k)}(z+1) \sum_{n=s}^{\min(\ell-k,\, s+2k)} \frac{(-1)^{n+k} C_{2k}^{n-s} a_{n,k}^{\ell-k-n}(z)}{(1+z)^{n-s} z^{2\ell-2k-n}}. \qquad /18/$$

Функция $h^{(k)}(z)$ определяется из /10/ и /15/:

$$h^{(k)}(z) = (-1)^k [p(z)]^{\frac{k+1}{2}} \left[(1+2z)\sqrt{p(z)}\, C_k^1\left(\left(1+\frac{z}{4}\right)\sqrt{p(z)}\right) - C_{k-1}^1\left(\left(1+\frac{z}{4}\right)\sqrt{p(z)}\right)\right], \qquad /19/$$

а $a_{n,k}^{\ell}(z)$ - из соотношения

$$[h(z,v)]^n [g(z,v)]^k = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{n,k}^{\ell}(z) v^{\ell} \qquad /20/$$

и задается следующей формулой:

$$a_{n,k}^{\ell}(z) = \sum_{m=\max(0,\,\ell-n-2k)}^{\ell} (-1)^m C_m^{2k+n}\left(\left(1+\frac{z}{4}\right)\sqrt{p(z)}\right) b_{n,k}^{\ell-m}(z) [p(z)]^{n+m/2}, \qquad /21/$$

где

$$b_{n,k}^{\ell}(z) = \sum_{p=\max(0,\,\ell-n-k)}^{\min(\ell,k)} \sum_{q=\max(0,\,\ell-n-p)}^{\min(k,\,\ell-p)} C_n^{\ell-p-q} C_k^p C_k^q (1+2z)^{n-\ell+p+q} \left(1+\frac{1}{2}z\right)^{-2p} (1-z)^{-2q}.$$

Метод решения подобных разностных уравнений известен - это разложение на элементарные дроби. Легко видеть, что решения уравнений /16-17/ определены при каждом $\ell$ с точностью до произвольной периодической /антипериодической в зависимости от $\ell$ / функции z. Это обстоятельство есть следствие общего допустимого произвола в решениях уравнений /11/ и /12/, а именно: если $C_1(w) = F_1(z,v)$ и $w_1^* = w + \beta_1(w) = z + \bar{\phi}_1(z,v)$ удовлетворяют /11/ и /12/, то $C_2(w) = P(C_1, w_1^*)$ и $w_2^* = Q(C_1, w_1^*)$ также являются решениями /11/, /12/, где произвольные функции P и Q удовлетворяют условиям



$$P(-C_1, w_1^*+1) = -P(C_1, w_1^*), \quad P(C_1, -w_1^*) = P(C_1, w_1^*),$$

$$Q(-C_1, w_1^*+1) = Q(C_1, w_1^*) + 1, \quad Q(C_1, -w_1^*) = -Q(C_1, w_1^*).$$

Решения уравнений /16/, /17/ с учетом /18-21/ при $\ell = 1,2$ имеют вид

$$F^{(1)}(z) \equiv 1, \quad F^{(2)}(z) = \frac{-9+20z^2+z^4}{3z^2(z^2-1)^2} - \frac{2}{3}\phi(z) + 3\alpha_1(z),$$

$$\bar{\phi}^{(1)}(z) = 2/(z(z^2-1)) + 2\gamma_1(z), \qquad /22/$$

$$\bar{\phi}^{(2)}(z) = \frac{6-z^2+z^4}{3z^3(z^2-1)^2} + \bar{\psi}(z) + 2F^{(2)}(z)\gamma_1(z) + 2\frac{d\gamma_1(z)}{dz}\bar{\phi}^{(1)}(z) + \gamma_2(z),$$

где $\phi(z)$ и $\bar{\psi}(z)$ выражаются через известные G- и $\psi$- функции Эйлера:

$$\phi(z) = G(z) - \frac{1}{z} - \frac{\pi}{\sin \pi z}, \qquad \phi(-z) = \phi(z),$$

$$\bar{\psi}(z) = \frac{2}{z} - 2\frac{d}{dz}\left(\psi(z) + \frac{1}{2z} + \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\pi z\right), \quad \bar{\psi}(-z) = -\bar{\psi}(z),$$

а функции $\alpha_1(z)$ и $\gamma_{1,2}(z)$ имеют следующие свойства:

$$\alpha_1(z+1) = -\alpha_1(z), \quad \alpha_1(-z) = \alpha_1(z),$$

$$\gamma_1(z+1) = -\gamma_1(z), \quad \gamma_1(-z) = -\gamma_1(z), \qquad /23/$$

$$\gamma_2(z+1) = \gamma_2(z), \quad \gamma_2(-z) = -\gamma_2(z).$$

Как легко видеть, при следующем выборе поведения функций $\alpha_1(z)$, $\gamma_1(z)$ и $\gamma_2(z)$ в нуле:

$$\alpha_1(z) \underset{z\to 0}{\sim} \frac{1}{z^2} + \text{const} + O(z^2), \quad \gamma_1(z) \underset{z\to 0}{\sim} \frac{1}{z} + O(z), \qquad /24/$$

$$\gamma_2(z) \underset{z\to 0}{\sim} -\frac{2}{z^3} - \left(\frac{17}{3} + 2F^{(2)}(0) - 2\bar{\phi}^{(1)\prime}(0)\right)\frac{1}{z} + O(z),$$

функции $F^{(2)}(z)$, $\bar{\phi}^{(1)}(z)$ и $\bar{\phi}^{(2)}(z)$ будут регулярны в нуле. Можно показать, что и при всех $\ell$ уравнения /16/, /17/ имеют регулярные в нуле решения:

$$F^{(k)}(z) \underset{z\to 0}{\sim} \text{const} + O(z^2), \quad \bar{\phi}^{(k)}(z) \underset{z\to 0}{\sim} \text{const}\cdot z + O(z^3), \qquad /25/$$

а при $z = \pm n$ /n =1,2,... / имеют полюса порядка $(2k-2)$ и $(2k-1)$ соответственно.

Таким образом, решая уравнения /16/, /17/ при дополнительном условии /25/, мы получим функции $F(z, v)$ и $\bar{\phi}(z, v)$, регулярные в точке $z=0$, $(\bar{v}z^2)=0$. Ниже мы будем предполагать, что они голоморфны в некоторой окрестности этой точки.

## 3. РЕКУРРЕНТНОЕ ПОСТРОЕНИЕ $x(w)$ И $y(w)$

Будем рассматривать следующие уравнения:

$$C(w) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}(z)\,(vz^2)^k,$$
$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\phi}^{(k)}(z)(vz^2)^k, \qquad \bar{\phi}^{(0)}(z) \equiv z, \tag{26}$$

как неявное задание $vz^2$ и $z$ как функций $w$ и $C$ /здесь и ниже для краткости мы произвели замену $w + \beta(w) \to w$):

$$vz^2 = \sum_{k=1}^{\infty} V^{(k)}(w)C^k, \qquad V^{(1)}(w) \equiv 1,$$
$$z = \sum_{k=0}^{\infty} Z^{(k)}(w)C^k, \qquad Z^{(0)}(w) \equiv w. \tag{27}$$

Поскольку якобиан отображения /26/ $z,\ vz^2 \to w, C$ не равен нулю в точке $z=0$, $(vz^2)=0$, то согласно сказанному выше и теореме о неявных функциях /см. стр. 329 в [11]/ функции $vz^2$ и $z$ будут голоморфными в окрестности $w=C=0$, а $V^{(k)}(w)$ и $Z^{(k)}(w)$ - голоморфными функциями $w$ в окрестности $w=0$.

Подставляя /27/ в правые части /26/ и разлагая их в ряды по $C(w)$, получим рекуррентные уравнения для определения $V^{(k)}(w)$ и $Z^{(k)}(w)$:

$$V^{(n)}(w) = \delta_{n1} - \sum_{k=2}^{n}\sum_{m=0}^{n-k} V^{(n-m)}_{(k)}(w)\Big(\sum_{\ell=0}^{m}\frac{1}{\ell!}Z^{(m)}_{(\ell)}(w)\frac{d^\ell}{dw^\ell}F^{(k)}(w)\Big),$$

$$Z^{(n)}(w) = -V^{(n)}(w)\bar{\phi}^{(1)}(w) - \sum_{m=1}^{n-1} V^{(n-m)}(w)\Big(\sum_{\ell=0}^{m}\frac{1}{\ell!}Z^{(m)}_{(\ell)}(w)\frac{d^\ell}{dw^\ell}\bar{\phi}^{(1)}(w)\Big) - \tag{28}$$

$$- \sum_{k=2}^{n}\sum_{m=0}^{n-k} V^{(n-m)}_{(k)}(w)\Big(\sum_{\ell=0}^{m}\frac{1}{\ell!}Z^{(m)}_{(\ell)}(w)\frac{d^\ell}{dw^\ell}\bar{\phi}^{(k)}(w)\Big),$$

$n=1, 2, \ldots,$
где $V^{(n)}_{(k)}(w)$ и $Z^{(n)}_{(k)}(w)$ определяются рекуррентным соотношением:

$$G^{(n)}_{(k)}(w) = \sum_{p=1}^{n-k+1} G^{(n-p)}_{(k-1)}(w)\,G^{(p)}_{(1)}(w), \tag{29}$$



$$G^{(p)}_{(1)}(w) \equiv G^{(p)}(w), \qquad G^{(n)}_{(0)}(w) \equiv \delta_{n,0}.$$

Из /27-29/ и /25/ следует, что $(V^{(1)}(w) \equiv 1,\ Z^{(0)}(w) \equiv w)$

$$V^{(m)}_{w\to 0}(w) \sim \text{const} + O(w^2),$$
$$Z^{(m)}_{w\to 0}(w) \sim \text{const}\cdot w + O(w^3). \tag{30}$$

Таким образом, если выбрать следующее поведение $C(w)$ в нуле:

$$C(w)_{w\to 0} \sim -w^2 + O(w^4), \tag{31}$$

то согласно /27/, /30/, /31/ получим

$$v(w)_{w\to 0} \sim -1 + O(w^2), \qquad z(w)_{w\to 0} \sim w + O(w^3),$$

а поведение искомых функций $x(w)$ и $y(w)$, связанных с $v(w)$ и $z(w)$ посредством /8/, при $w=0$ будет следующим:

$$y(w)_{w\to 0} \sim \text{const} + O(w^2),$$
$$x(w)_{w\to 0} \sim \frac{1}{w} + O(w). \tag{32}$$

Выразив с помощью /28/, /29/ $V^{(k)}(w)$ и $Z^{(k)}(w)$ через коэффициентные функции $F^{(k)}(w)$ и $\phi^{(k)}(w)$ и учитывая /8/, мы получим $x(w)$ и $y(w)$ в виде функциональных рядов:

$$x(w) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(w)C^k,$$
$$y(w) = \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(w)C^k.$$

## 4. РЕКУРРЕНТНОЕ ПОСТРОЕНИЕ $t(w)$

Будем искать решение уравнения /4/ для $t(w)$ как функции переменных $z(w)$ и $v(w)$, переходя потом в соответствии с /27/ к переменным $w$ и $C(w)$. Для удобства введем следующую замену:

$$t(z, v) = \frac{(z^2-1)^2}{z^4}\,\bar{t}(z, v)\cdot D^{-1}(w), \tag{33}$$

где мы явно выделили известный [9] $D(w)$ -произвол:

$D(-w) = D(w)$, $\quad D(1-w)D(w) = 1$.

Тогда уравнение /4/ примет вид

$$\bar{t}(z', v')\,\bar{t}(z, v) = R(z, v), \tag{34}$$

где

$$R(z,v)=\frac{\left[1+\frac{2(1+\frac{3}{4}z-\frac{3}{4}z^2)p(z)}{1+z}v+\frac{p(z)}{1+z}v^2\right]^3\left[1+\frac{v}{(1-z)^2}\right]\left[1+\frac{v}{(1-z)(1+\frac{z}{2})}\right]}{\left[1+\frac{v}{(1+\frac{z}{2})^2}\right]\left[1+\frac{v}{1-z^2}\right]^2\left[1+(1-\frac{3}{2}z)p(z)v\right]^2}.$$

Будем решать это уравнение, разлагая $\bar{t}(z,v)$ и $R(z,v)$ аналогично /13-15/ в функциональный ряд по степеням $z^2v$:

$$\bar{t}(z,v)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{t}^{(k)}(z)(z^2v)^k, \qquad /35/$$

$$R(z,v)=\sum_{k=0}^{\infty}R^{(k)}(z)(z^2v)^k.$$

Подставляя /35/ в /34/ и приравнивая члены при одинаковых степенях $z^2v$, получим рекуррентную систему разностных уравнений для $\bar{t}^{(k)}(z)$:

$$\bar{t}^{(0)}(z)\equiv 1,$$

$$(-1)^{\ell}\,\bar{t}^{\ell}(z+1)+\bar{t}^{(\ell)}(z)=R^{(\ell)}(z)-\sum_{k=1}^{\ell-1}\mathfrak{L}\,\bar{t}^{(k)}(z)- \qquad /36/$$

$$-\sum_{m=1}^{\ell-1}\bar{t}^{(\ell-m)}(z)\Big(\sum_{k=1}^{m}\mathfrak{L}\,\bar{t}^{(k)}(z)\Big),$$

$\ell=1,2,\ldots,$

где действие оператора $\mathfrak{L}$ на $\bar{t}^{(k)}(z)$ задано /18/.

Легко видеть, что решения уравнений /36/ определены при каждом $\ell$ с точностью до произвольной четной периодической /антипериодической в зависимости от $\ell$/ функции $z$. Это обстоятельство есть следствие допустимого D-произвола. Мы распорядимся этим, выбирая регулярные в нуле решения уравнения /36/:

$$\bar{t}^{(k)}(z)\underset{z\to 0}{\sim}\mathrm{const}+O(z^2), \qquad /37/$$

причем при $z=\pm n$ /$n=1,2,\ldots$/ $\bar{t}^{(k)}(z)$ будут иметь полюса порядка $2k$. Поскольку $vz^2$ в соответствии с /27/, /30/, /31/ ведет себя как $w^2$ при малых $w$, то члены ряда /35/ для $\bar{t}(z,v)$ будут иметь порядок $\sim w^{2k}$.

Решая уравнение /36/ при $\ell=1,2$, получим

$$\bar{t}^{(1)}(z)=\frac{4}{z^2(z^2-1)^2}-4\delta_1(z), \qquad /38/$$

$$\bar{t}^{(2)}(z)=-\frac{6+51z^2-55z^4+93z^6-63z^8+16z^{10}}{6z^4(z^2-1)^4}+\frac{16}{3}\phi(z)+\frac{1}{2}\phi''(z)+$$



$$+\frac{1}{2}[\bar{t}^{(1)}(z)]^2-4\delta_1(z)F^{(2)}(z)-4\bar{\phi}^{(1)}(z)\frac{d}{dz}\delta_1(z)+\delta_2(z),$$

где

$$\delta_1(z+1)=\delta_1(z),\quad \delta_1(-z)=\delta_1(z),$$

$$\delta_2(z+1)=-\delta_2(z),\quad \delta_2(-z)=\delta_2(z), \qquad /39/$$

$$\delta_1(z)\underset{z\to 0}{\sim}\frac{1}{z^2}+\mathrm{const}+O(z^2),$$

$$\delta_2(z)\underset{z\to 0}{\sim}\frac{1}{z^4}+\Big(\frac{25}{2}+4F^{(2)}(0)-8\bar{\phi}^{(1)\prime}(0)\Big)\frac{1}{z^2}+\mathrm{const}+O(z^2).$$

В соответствии с /37/, /31/ $\bar{t}(z,v)$ при $w\to 0$ будет иметь поведение

$$\bar{t}(z,v)\underset{w\to 0}{\sim}1+O(w^2). \qquad /40/$$

Тогда, выбирая $D(w)$ в виде

$$D(w)=D_1(w)/\mathrm{tg}^4\frac{\pi}{2}w,\quad D_1(0)=\mathrm{const}\neq 0,$$

получим в соответствии с /5/, /32/, /33/, /40/ правильное поведение общего решения в борновском полюсе:

$$\mathrm{Res}\,S_i(0)=-\lambda_i D_1(0)\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{-4}.$$

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, изложенный выше метод рекуррентного построения общего решения уравнений Чу-Лоу позволяет находить общее решение, имеющее правильное поведение в борновском полюсе, в любом приближении по степеням $C(w)$. Нахождение высших приближений /кубичных [6] и выше/ не представляет принципиальных трудностей и лишь технически сложно.

Поскольку, как легко видеть из /22/, /38/ и /28/, /29/, коэффициенты функциональных рядов /35/, /13/, /14/, вообще говоря, являются сложными трансцендентными функциями и трудно надеяться на получение замкнутых выражений для $x(w)$, $y(w)$ и $t(w)$, то целесообразно рассмотреть вопрос об описании экспериментальной информации на основе приближенного выражения для общего решения $S_i(w)$ [6]:

$$S_i^{(n)}(w)=D(w)\frac{\xi_i+\sum_{k=0}^{n}[\eta_i\,y^{(k)}(w^*)+\lambda_i x^{(k)}(w^*)]C^k(w)}{\sum_{k=0}^{n}t^{(k)}(w^*)C^k(w)},$$

где $w^*=w+\beta(w)$.

С этой целью приведем для $n=2$ выражения для $x^{(k)}(w)$, $y^{(k)}(w)$ и $t^{(k)}(w)$ при $k=0,1,2$:

$$x^{(0)}(w) = \frac{1}{w}, \quad x^{(1)}(w) = \frac{2}{w^3(w^2-1)} + \frac{2}{w^2}\gamma_1(w),$$

$$x^{(2)}(w) = \frac{w^4-3w^2+12}{3w^5(w^2-1)^2} + \frac{4}{3(w^2-1)w^3}\left(\phi(w) - \frac{9}{2}a_1(w)\right) + \frac{4(5w^2-3)}{w^4(w^2-1)^2}\gamma_1(w) + \qquad /41/$$

$$+ \frac{4}{w^3}\gamma_1^2(w) + \frac{1}{w^2}\bar{\psi}(w) + \frac{1}{w^2}\gamma_2(w);$$

$$y^{(0)}(w) = \frac{1}{w^2}, \quad y^{(1)}(w) = \frac{w^2+3}{w^4(w^2-1)} + \frac{4}{w^3}\gamma_1(w),$$

$$y^{(2)}(w) = \frac{w^4-2w^2+21}{3w^6(w^2-1)^2} + \frac{2}{3}\,\frac{(w^2+3)}{w^4(w^2-1)}\left(\phi(w) - \frac{9}{2}a_1(w)\right) + \qquad /42/$$

$$+ \frac{8(w^4+4w^2-3)}{w^5(w^2-1)^2}\gamma_1(w) + \frac{2}{w^3}\bar{\psi}(w) + \frac{12}{w^4}\gamma_1^2(w) + \frac{2}{w^3}\gamma_2(w);$$

$$t^{(0)}(w) = \frac{(w^2-1)^2}{w^4}, \quad t^{(1)}(w) = -4\left[\frac{1}{w^6} + \frac{(w^2-1)^2}{w^4}\delta_1(w) + \frac{2(w^2-1)}{w^5}\gamma_1(w)\right],$$

$$t^{(2)}(w) = -\frac{66-25w^2+54w^4-47w^6+16w^8}{6w^8(w^2-1)} - \frac{8}{3}\,\frac{(1-2w^2+4w^4-2w^6)}{w^6}\phi(w) -$$

$$- \frac{4(w^2-1)}{w^5}\bar{\psi}(w) + \frac{1}{2}\,\frac{(w^2-1)^2}{w^4}\phi''(w) + \frac{4}{w^6}\left[4\delta_1(w) + 3a_1(w) - \frac{12}{w}\gamma_1(w)\right] -$$

$$/43/$$

$$- \frac{8(3w^2-5)}{w^6}\gamma_1^2(w) - \frac{4(w^2-1)}{w^5}\left(\gamma_2(w) - 8\gamma_1(w)\delta_1(w)\right) +$$

$$+ \frac{(w^2-1)^2}{w^4}\left(\delta_2 + 8\delta_1^2\right).$$

Эти выражения при $(\gamma_i, a_i, \delta_i) = 0$ совпадают, естественно, с /25-27/ и /30-32/ из /6/. Функции $(a_i(w), \gamma_i(w), \delta_i(w)$ /$i=1,2$/ удовлетворяют условиям /23/, /24/, /39/, обеспечивающим правильное поведение решения в борновском полюсе. Можно показать /аналогично /6/ /, что их введение сводится к переопределению $\beta(w)$, $D(w)$ и $C(w)$ произвольных функций, в котором $a_i, \gamma_i, \delta_i$ отведена роль параметров. Возможный критерий выбора $a_i, \gamma_i$ и $\delta_i$ с целью упрощения коэффициентов функциональных рядов по $C(w)$ $x^{(k)}(w)$, $y^{(k)}(w)$ и $t^{(k)}(w)$ неэффективен из-за сложной трансцендентной природы выражений /41-43/. Поэтому, возможно, лишь замкнутое выражение для общего решения, зависящего от $C(w)$, позволит сделать определенный выбор.



В заключение автор выражает благодарность В.А.Мещерякову, С.Б.Герасимову, А.Б.Говоркову, В.М.Дубовику и В.И.Журавлеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА


1. Рерих К.В. ТМФ, 1982, 50, №2, с. 251.
2. Chew G.F., Low F.E. Phys.Rev., 1956, 101, No.5, p. 1570.
3. Рерих К.В. ОИЯИ, Р2-80-718, Дубна, 1980.
4. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-5906, Дубна, 1971; Р2-7047, Дубна, 1973.
5. Гердт В.П., Мещеряков В.А. ТМФ, 1975, 24, в.2, с. 155.
6. Рерих К.В. ОИЯИ, Р2-81-701, Дубна, 1981.
7. Гердт В.П. ТМФ, 1981, 48, №3, с. 346.
8. Гердт В.П., Жарков А.Ю. ТМФ, 1982, 52, №3, с. 384.
9. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-2369, Дубна, 1965.
10. Meshcheryakov V.A., Rerikh K.V. Ann of Phys., 1970, 59, No.2, p. 408; ТМФ, 1970, 3, в.1, с. 78.
11. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. "Наука", М., 1969.


Рукопись поступила в издательский отдел
2 декабря 1982 года.

## НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.



Рерих К.В. Р2-82-813

Метод рекуррентного построения общих интегралов и общего решения уравнений Чу-Лоу


Сформулирован метод решения полученных ранее автором функциональных уравнений, определяющих два общих интеграла уравнений Чу-Лоу - $w+\beta(w)$ и $C(w)$, что позволяет выразить две из трех искомых функций, входящих в уравнения Чу-Лоу, через интегралы. Предложен метод построения третьей функции как функции двух первых, что позволяет найти в любом приближении по $C(w)$ общее решение уравнений Чу-Лоу, которое приведено в заключении в квадратичном по $C(w)$ приближении. Указанный метод построения общего решения обеспечивает правильное поведение его в борновском полюсе.



Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982


Rerikh K.V. P2-82-813

The Method of Recurrent Construction of the General Integrals and the General Solution of the Chew-Low Equations


The method of solving the obtained earlier the functional equations, which define two general integrals, $w+\beta(w)$ and $C(w)$ of the Chew-Low equations is formulated. This makes it possible for us to define two of three being included in the Chew-Low equations unknown functions through the integrals. The method of construction of the third function as a function of the first two ones is proposed, that makes it possible for us to construct in any approximation with respect to $C(w)$ the general solution of the Chew-Low equations, which is given in conclusion in the quadratic approximation with respect to $C(w)$. The formulated method of construction of the general solution provides its correct behaviour in the Born pole.



The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод Г.Г.Сандуковской.