

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

1853/82

19/4-82

P2-82-74

З.Омбоо

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ
ГЛАУБЕРОВСКИХ АМПЛИТУД

2. Сечение реакции $A + B \rightarrow A + X$

1982

Рассмотрим задачу вычисления сечения реакции



где A и B - ядра, а система X не содержит новых частиц помимо нуклонов ядра B .

Согласно принципам эйконального приближения сечение реакции /1/ дается выражением /1/:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{p^2}{(2\pi)^2} \sum_f |F_{fi}(q)|^2,$$

$$F_{fi}(q) = \frac{i p}{2\pi} \int d^2b e^{i q \cdot \vec{b}} \langle \Psi_{A_f} \Psi_{B_f} | \{ 1 - \prod_{i=1}^A \prod_{j=1}^B (1 - \gamma(\vec{b} - \vec{s}_i + \vec{r}_j)) \} \rangle \times \\ \times | \Psi_{A_i} \Psi_{B_i} \rangle,$$

в котором \vec{b} - прицельный параметр; Ψ_{A_i}, Ψ_{B_i} (Ψ_{A_f}, Ψ_{B_f}) - начальные /конечные/ волновые функции; $\gamma(\vec{b} - \vec{s}_i + \vec{r}_j)$ - амплитуда упругого NN-рассеяния в представлении прицельного параметра; $\{\vec{s}_i\}$, $\{\vec{r}_j\}$ - прицельные координаты нуклонов ядер A и B . При вычислении таких сечений традиционным является использование условия полноты системы конечных состояний, заключающегося в том, что

$$\sum_f | \Psi_{B_f} \rangle \langle \Psi_{B_f} | = \prod_{i=1}^B \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_i). \quad /2/$$

При этом

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{p^2}{(2\pi)^2} \langle \Psi_{B_i} | \int d^2b e^{i q \cdot \vec{b}} \langle \Psi_{A_i} | \{ 1 - \prod_{i=1}^A \prod_{j=1}^B (1 - \gamma(\vec{b} - \vec{s}_i + \vec{r}_j)) \} \rangle \times \\ \times | \Psi_{A_i} \rangle \{ \}^2 | \Psi_{B_i} \rangle. \quad /3/$$

Выберем функции плотностей ядер A и B , а также функции $\gamma(\vec{b})$ в виде

$$| \Psi_{A_i} \rangle^2 = C_1 \delta(\sum_{i=1}^A \vec{r}_i / A) \prod_{i=1}^A e^{-t \vec{s}_i^2}$$

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
БИБЛИОТЕКА

$$|\Psi_{B_i}|^2 = C_2 \delta \left(\sum_{i=1}^m (\vec{r}_i / B) \prod_{i=1}^n e^{-d \vec{r}_i^2} \right) \quad /4/$$

$$\gamma(\vec{b}) = C_3 e^{-ab^2}.$$

Тогда общий член разложения выражения, заключенного в фигурные скобки в /3/, имеет вид

$$N \int \exp \{-x^T Q x - 2b_0^T x - b^2 C + i q b\} d^m s d b, \quad /5/$$

где

$$x = \begin{pmatrix} S \\ r \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} s_{i_1} \\ s_{i_2} \\ \vdots \\ s_{i_n} \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r_{i_1} \\ r_{i_2} \\ \vdots \\ r_{i_m} \end{pmatrix}.$$

s_{i_1}, \dots, s_{i_n} и r_{i_1}, \dots, r_{i_m} - некоторые выборки из множества x - проекции векторов $\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n$ и $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_m$; b_0 - x -проекция прицельного параметра; o - матрица-столбец; C - скаляр; x^T, o^T - транспонированные матрицы. Явный вид коэффициенты N будет определен ниже.

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести диаграммное представление выражений типа /5/. Диаграмма рассеяния, представляющая общий член ряда /5/, строится следующим образом. Нарисуем m вертикальных линий и n горизонтальных линий, пересекающихся вертикальные / m и n - соответственно мощности множества $\{s_i\}$ и $\{r_i\}$. Взаимодействие i -й частицы ядра A с j -й частицей ядра B отмечается точкой на пересечении i -й вертикальной линии с j -й горизонтальной линией диаграммы.

Будем рассматривать каждую диаграмму рассеяния как реберный граф некоторого двураскрашенного помеченного графа. Двураскрашенный помеченный граф может быть задан матрицей смежностей, имеющей в нашем случае следующий вид:

$$V = \begin{pmatrix} z_1 & E \\ E^T & z_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь z_1 - $(m \times m)$ - нулевая матрица; z_2 - $(n \times n)$ - нулевая матрица; E - $(m \times n)$ - матрица, элемент E_{ij} которой равен 1, если i и j - смежные вершины, и равен нулю в противном случае.

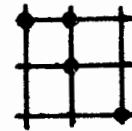


Рис. 1

Например, матрица смежности, соответствующая диаграмме на рис. 1, имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Диаграммы рассеяния и матрица E тесно связаны с матрицами Q , o и скаляром C . Матрица Q обладает следующей блочной структурой:

$$Q = \begin{pmatrix} T & a \times E \\ a \times E^T & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & a \\ a^T & D \end{pmatrix}. \quad /6/$$

Между матрицей a и диаграммой рассеяния существует однозначная связь: точке диаграммы, находящейся на пересечении i -й горизонтальной и j -й вертикальной линии, соответствует элемент матрицы a , $a_{ij} = -a$. Пустым узлам диаграммы соответствуют матрицы a , равные нулю. Матрицы T и D диагональны. Элемент матрицы T t_{ii} равен $t + n_i a$, где n_i есть число всех точек, находящихся на i -й горизонтальной линии диаграммы, а элемент матрицы D d_{jj} равен $d + n_j a$, где n_j - число всех точек, находящихся на j -й вертикальной линии диаграммы. Матрица o имеет следующую структуру:

$$o = \begin{pmatrix} a \times I \\ -a^T I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o' \\ o'' \end{pmatrix} \quad \because \quad C = -\frac{1}{2} o^T o I_1, \quad /7/$$

где

$$I_1 = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \vdots \\ u_m^1 \end{pmatrix} \quad u_1^1 = u_2^1 = u_3^1 = \dots = u_m^1 = 1$$

и

$$I_2 = \begin{pmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ \vdots \\ u_n^2 \end{pmatrix} \quad u_1^2 = u_2^2 = u_3^2 = \dots = u_n^2 = 1.$$

Заметим, что

$$-x^T Q x - 2b_0^T x - b^2 C + i q b =$$

$$\Lambda_{33} = (n_1 + n_2 + n_3) a - \left(\frac{(n_1 + n_2) a^2}{t+a} + \frac{2n_3 a^2}{t+2a} \right),$$

$$\lambda^T = ((n_2 + n_3) a - \left(\frac{n_2 a^2}{t+a} + \frac{2n_3 a^2}{t+2a} \right),$$

$$(n_1 + n_3) a - \left(\frac{n_1 a^2}{t+a} + \frac{2n_3 a^2}{t+2a} \right)),$$

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} (n_2 + n_3) a - \left(\frac{n_2 a^2}{t+a} + \frac{n_3 a^2}{t+2a} \right) - \frac{n_3 a t}{t+2a} & \\ \frac{-n_3 a t}{t+2a} & (n_1 + n_3) a - \left(\frac{n_1 a^2}{t+a} + \frac{n_3 a^2}{t+2a} \right) \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\Omega} &= K(q) \frac{p^2}{(2\pi)^2} \sum_{\substack{A \\ C_A}} \frac{n_1 + n_2 + n_3}{C_A} \frac{m_1 + m_2 + m_3}{C_A} \frac{(n_1 + n_2 + n_3)!}{n_1! n_2! n_3!} \times \\ &\quad \left(\begin{array}{l} n_1 n_2 n_3 m_1 m_2 m_3 = 0 \\ n_1 + n_2 + n_3 \leq A \\ m_1 + m_2 + m_3 \leq A \\ n_1 + n_2 + n_3 + m_1 + m_2 + m_3 \neq 0 \end{array} \right) \\ &\times \frac{(m_1 + m_2 + m_3)!}{m_1! m_2! m_3!} \frac{t^{n_1 + n_2 + n_3 + m_1 + m_2 + m_3}}{\text{Det } t(n_1, n_2, n_3) \text{Det } t(m_1, m_2, m_3)} \times \\ &\times \frac{\pi^2}{\Lambda_{33}(n_1, n_2, n_3) \Lambda_{33}(m_1, m_2, m_3)} \left(\frac{d}{\pi} \right)^2 \text{Re} \left\{ \left(-\frac{\tilde{\sigma} d}{2\pi} \right)^{n_1 + n_2 + 2n_3} \times \right. \\ &\times \left. \left(-\frac{\tilde{\sigma}^* a}{2\pi} \right)^{m_1 + m_2 + 2m_3} \frac{1}{\text{Det } \Lambda(n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3)} \exp \left\{ -\lambda^T(n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3) \right\} \right. \\ &\times \Lambda^{-1}(n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3) \lambda(n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3) + D(2) - \\ &\left. - \frac{q^2}{4} \left(\frac{1}{\Lambda'(n_1, n_2, n_3)} + \frac{1}{\Lambda'(m_1, m_2, m_3)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Lambda(n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3) &= \Lambda'(n_1) + \Lambda'(n_2) + \Lambda'(n_3) + \Lambda'(m_1) + \Lambda'(m_2) + \Lambda'(m_3) + \\ &+ \frac{\lambda^T(n_1) \lambda(n_1)}{\Lambda_{33}(n_1)} + \frac{\lambda^T(n_2) \lambda(n_2)}{\Lambda_{33}(n_2)} + \frac{\lambda^T(n_3)}{\Lambda_{33}(n_3)} + \\ &+ \frac{\lambda^T(m_1) \lambda(m_1)}{\Lambda_{33}(m_1)} + \frac{\lambda^T(m_2)}{\Lambda_{33}(m_2)} + \frac{\lambda^T(m_3)}{\Lambda_{33}(m_3)}, \\ \lambda(n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3) &= i q \left(\frac{\lambda(n_1)}{\Lambda_{33}(n_1)} + \frac{\lambda(n_2)}{\Lambda_{33}(n_2)} + \frac{\lambda(n_3)}{\Lambda(n_3)} - \right. \\ &\left. - \frac{\lambda(m_1)}{\Lambda_{33}(m_1)} - \frac{\lambda(m_2)}{\Lambda_{33}(m_2)} - \frac{\lambda(m_3)}{\Lambda_{31}(m_3)} \right), \quad D(2) = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Общий вид диаграммы при $V=3$ и произвольном A приведен на рис. 4.

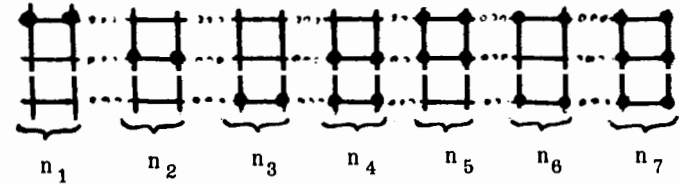


Рис. 4

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Lambda_{44} &= \sum_{i=1}^8 n_i a - \left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{t+a} + \frac{2(n_4 + n_5 + n_6)}{t+2a} + \frac{3n_7}{t+3a} \right) a^2, \\ \lambda^T &= ((n_3 + n_4 + n_5 + n_6) a - \left(\frac{n_3}{t+a} + \frac{2(n_4 + n_6)}{t+2a} + \frac{3n_7}{t+3a} \right) a^2, \\ &(n_2 + n_4 + n_5 + n_7) a - \left(\frac{n_2}{t+a} + \frac{2(n_5 + n_6)}{t+2a} + \frac{3n_7}{t+3a} \right) a^2, \\ &(n_1 + n_5 + n_6 + n_7) a - \left(\frac{n_1}{t+a} + \frac{2(n_5 + n_6)}{t+2a} + \frac{3n_7}{t+3a} \right) a^2 = \lambda(x, y, z), \end{aligned}$$

а элементы матрицы Λ имеют следующий вид:

$$\Lambda_{11} = \lambda(x, 0, 0),$$

$$\Lambda_{12} = - \left(\frac{n_4}{t+2a} + \frac{n_7}{t+3a} \right) a^2,$$

$$\Lambda_{22} = \lambda(0, y, 0),$$

$$\Lambda_{13} = - \left(\frac{n_6}{t+2a} + \frac{n_7}{t+3a} \right) a^2,$$

$$\Lambda_{23} = \left(\frac{n_5}{t+2a} + \frac{n_7}{t+3a} \right) a^2,$$

$$\Lambda_{33} = \lambda(0, 0, z).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & K (q) \frac{p^2}{(2\pi)^2} \sum_A \sum_A C_A^{n_1+\dots+n_7} \times \\ & \begin{pmatrix} n_1, \dots, n_7 = 0, m_1, \dots, m_7 = 0 \\ n_1+\dots+n_7 \leq \tilde{A}, m_1+\dots+m_7 \leq \tilde{A} \\ n_1+\dots+n_7+m_1+\dots+m_7 \neq 0 \end{pmatrix} \times \\ & \times C_A^{m_1+\dots+m_7} \frac{(n_1+\dots+n_7)!}{n_1! n_2! \dots n_7!} \frac{(m_1+\dots+m_7)!}{m_1! m_2! \dots m_7!} \times \\ & \times \frac{t^{n_1+\dots+n_7+m_1+\dots+m_7}}{\text{Det } t(n_1, \dots, n_7) \text{Det } t(m_1, \dots, m_7)} \frac{\pi^2}{\Lambda_{44}(n_1, \dots, n_7) \Lambda_{44}(m_1, \dots, m_7)} \times \\ & \times \left(\frac{d}{\pi} \right)^3 \text{Re} \left\{ \left(-\frac{\sigma a}{2\pi} \right)^{n_1+n_2+n_3+2(n_4+n_5+n_6)+3n_7} \left(\frac{\sigma^* a}{2\pi} \right)^{m_1+m_2+m_3+2(m_4+m_5+m_6)+3m_7} \right\} \\ & \times \frac{1}{\text{Det } \Lambda(n_1, \dots, n_7, m_1, \dots, m_7)} \exp \{ -\lambda^T(n_1, \dots, n_7, m_1, \dots, m_7) \} \times \\ & \times \Lambda^{-1}(n_1, \dots, n_7, m_1, \dots, m_7) \lambda(n_1, \dots, n_7, m_1, \dots, m_7) + D(3) - \\ & - \frac{q^2}{4} \left(\frac{1}{\Lambda'(n_1, \dots, n_7)} + \frac{1}{\Lambda'(m_1, \dots, m_7)} \right) \}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Lambda(n_1, \dots, n_7, m_1, \dots, m_7) = & \Lambda'(n_1) + \dots + \Lambda'(n_7) + \\ & + \Lambda'(m_1) + \dots + \Lambda'(m_7) + \frac{\lambda^T(n_1) \lambda(n_1)}{\Lambda_{44}(n_1)} + \dots + \frac{\lambda^T(n_7) \dots}{\Lambda_{44}(n_7)} + \\ & + \frac{\lambda^T(m_1) \lambda(m_1)}{\Lambda_{44}(m_1)} + \dots + \frac{\lambda^T(m_7) \lambda(m_7)}{\Lambda_{44}(m_7)}, \\ \lambda(n_1, \dots, n_7, m_1, \dots, m_7) = & iq \left(\frac{\lambda(n_1)}{\Lambda_{44}(n_1)} + \dots + \frac{\lambda(n_7)}{\Lambda_{44}(n_7)} - \right. \\ & \left. - \frac{\lambda(m_1)}{\Lambda_{44}(m_1)} - \dots - \frac{\lambda(m_7)}{\Lambda_{44}(m_7)} \right), \\ D(3) = & \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Итак, установлена связь между диаграммами рассеяния и структурой членов глауберовского ряда для сечения процесса $A+B \rightarrow A+X$.

Найден общий вид диаграмм при $B=1, 2, 3$ и произвольном A и получены выражения для соответствующих сечений.

Я благодарен В.В.Ужинскому за ряд ценных замечаний и постоянный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Glauber R.J. Lectures in Theoretical Physics (eds. W.E.Brittin et al.). Interscience Publishers, Inc., New York, 1959, vol.1, p.315.
2. Ужинский В.В. ОИЯИ, P2-13054, Дубна, 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 января 1982 года.

Омбоо З.

P2-82-74

Метод вычисления глауберовских амплитуд.

2. Сечение реакции $A+B \rightarrow A+X$

В рамках эйконального подхода рассматривается задача вычисления сечения квазиупругого рассеяния составных систем, одночастичные плотности которых так же, как и амплитуда упругого рассеяния конститuentов, заданы гауссианами. Предложен алгоритм вычисления указанных сечений, использующий диаграммное представление членов глауберовского ряда. Сущность предлагаемого алгоритма состоит в том, что после интегрирования многомерных гауссовских функций по одной из прицельных координат конститuentов использовано понятие диаграммы рассеяния. Это дает возможность автоматически выполнять процесс приведения подобных членов глауберовского ряда.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Omboo Z.

P2-82-74

Glauber Amplitude Calculation Method.

2. The $A+B \rightarrow A+X$ Reaction Cross Section

In the framework of eikonal approach the problem of calculating quasi-elastic scattering composed system is considered. The one-particle densities of the system as well as the constituent elastic scattering amplitude are given by Gaussian functions. The calculation algorithm of these cross sections based on using diagram representation of Glauber expansion terms is proposed. By this algorithm after having integrated the multidimensional Gaussian functions by any coordinate of constituent system a concept of a scattering diagram was used. It enables one to execute reducing of similar members of Glauber's series.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.