ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2-82-727

В.К.Мельников

СИММЕТРИИ, НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЯ

Направлено в Оргкомитет
2 Международного семинара
"Теоретико-групповые методы в физике"
/Звенигород, 24-26 ноября 1982 г./

1982

В теории нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи, симметрии играют двоякую роль. Прежде всего, сами уравнения обладают высокой степенью симметрии, что выражается в существовании бесконечномерной группы нелинейных преобразований, сохраняющих вид этих уравнений. Но помимо этого, линейные операторы, с помощью которых интегрируются эти уравнения, обладают, как правило, симметрией, играющей важную роль как при получении уравнений, так и при изучении их свойств. Однако связь между симметриями линейных операторов и свойствами интегрируемых с их помощью нелинейных эволюционных уравнений изучена к настоящему времени явно недостаточно.

Для иллюстрации сказанного выше рассмотрим следующий пример. Возьмем оператор

$$X = \partial_x + P - \zeta\Lambda, \qquad /1/$$

где ∂_x - оператор дифференцирования по пространственной переменной x, ζ - спектральный параметр, а матрицы P и Λ имеют вид:

$$P = \begin{vmatrix} 0 & p_0 & p_1 \cdots & p_{k_0} & q \\ p_{k_0} & 0 & p_0 \cdots & p_{k_0-1} & q \\ p_{k_2-1} & p_{k_0} & 0 \cdots & p_{k_0-2} & q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 \cdots & 0 & q \\ w & w & w \cdots & w & 0 \end{vmatrix}, \quad k_0 \geq 0, \qquad /2/$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}\,(1, \epsilon, \ldots, \epsilon^{k_0+1}, 0), \quad \epsilon = \exp\left(i\frac{2\pi}{k_0+2}\right). \qquad /3/$$

Возьмем, далее, матрицу

$$J = \begin{vmatrix} 0 & E_{k_0+1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad /4/$$

где E_{k_0+1} - единичная матрица порядка k_0+1, а стоящие в /4/ нули означают, что все остальные элементы этой матрицы равны нулю. Нетрудно видеть, что в силу /2/-/4/ справедливы равенства

$$[J, P] = 0, \qquad J\Lambda = \epsilon\Lambda J. \qquad /5/$$

Отсюда следует, что фундаментальную матрицу решений Φ уравнения

$$X\Phi = 0 \qquad /6/$$

можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$\Psi(x, \zeta) = J\,\Phi(x, \zeta)\,J^{-1} = \Phi(x, \epsilon\zeta),$$

Таким образом, матрица

$$A = \Phi(x, \zeta)\,C(\zeta)\,\Phi^{-1}(x, \zeta) \qquad /7/$$

удовлетворяет соотношению

$$JA(x, \zeta)J^{-1} = \epsilon^{\kappa}A(x, \epsilon\zeta), \quad \kappa \geq 0, \qquad /8/$$

если справедливо равенство

$$J\,C(\zeta)\,J^{-1} = \epsilon^{\kappa}\,C(\epsilon\zeta).$$

Согласно /5/, этому условию удовлетворяет любая матрица вида

$$C = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \Lambda^{\kappa + (k_0+1)m} \zeta^{-m},$$

где c_m - произвольные константы. Отметим, что матрица A вида /7/ удовлетворяет уравнению

$$[X, A] = \frac{\partial A}{\partial x} + [P, A] - \zeta[\Lambda, A] = 0. \qquad /9/$$

С матрицей A указанного выше вида можно сопоставить формальный ряд

$$A \sim \sum_{m=0}^{\infty} A_m \zeta^{-m}, \qquad /10/$$

где

$$A_0 = c_0\,\Lambda^{\kappa}, \quad \kappa \geq 0, \qquad /11/$$

а при $m>0$ матрицы A_m удовлетворяют соотношению

$$[\Lambda, A_m] - [P, A_{m-1}] - \frac{\partial}{\partial x} A_{m-1} = 0 \qquad /12/$$

и условию

$$A_m \equiv c_m \Lambda^{\kappa + (k_0+1)m}, \text{если} P \equiv 0.$$

Этими требованиями матрицы A_m определяются однозначно. Далее, нетрудно убедиться, что полученные таким образом матрицы A_m удовлетворяют равенству

$$J A_m J^{-1} = \epsilon^{\kappa - m} A_m . \qquad /13/$$

Следовательно, ряд /10/ является формальным решением уравнения /9/. Далее, равенство /13/ означает, что ряд /10/ удовлетворяет условию /8/. Возьмем теперь оператор T вида

$$T = \partial_t + \sum_{m=0}^{n} A_m \cdot \zeta^{n-m} ,$$

где ∂_t - оператор дифференцирования по времени t, и рассмотрим условие совместности линейных систем

$$X\Phi = 0, \quad T\Phi = 0 .$$

Это условие, как известно, имеет вид

$$[T, X] = 0$$

и в рассматриваемом нами случае согласно /11/ и /12/ может быть записано так:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = [\Lambda, A_{n+1}]. \qquad /14/$$

Это значит, что равенство /14/ в силу /5/ и /13/ определяет корректным образом некоторую нелинейную эволюционную систему, если фигурировавшие при ее определении целые числа κ и n удовлетворяют условию $n = \kappa + (k_0+2)s$, где s - произвольное целое число.

Возьмем теперь матрицу

$$\mathcal{E} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \dots & \epsilon^{k_0+1} & 0 \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \dots & \epsilon^{2k_0+2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & \epsilon^{k_0+1} & \epsilon^{2k_0+2} & \dots & \epsilon^{(k_0+1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и совершим в уравнении /6/ замену

$$\Psi = \mathcal{E}\Phi .$$

В результате получим систему

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi_0 + \hat{p}_0 \Psi_0 + (k_0+2) q \Psi_{k_0+2} = \zeta \Psi_1 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi_k + \hat{p}_k \Psi_k = \zeta \Psi_{k+1} , \quad k = 1, \dots, k_0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi_{k_0+1} + \hat{p}_{k_0+1} \Psi_{k_0+1} = \zeta \Psi_0 , \quad \frac{\partial}{\partial x}\Psi_{k_0+2} + w\Psi_0 = 0 ,$$

где

$$\hat{p}_k = \sum_{\kappa=0}^{k_0} \epsilon^{-(\kappa+1)k} p_\kappa , \quad k = 0, 1, \dots, k_0+1 . \qquad /15/$$

Определим теперь операторы

$$D' = (\partial_x + \hat{p}_{k_0+1}) \dots (\partial_x + \hat{p}_1), \quad D = D' \cdot (\partial_x + \hat{p}_0) .$$

Тогда пара функций $\phi = \Psi_0$ и $\psi = \Psi_{k_0+2}$ удовлетворяет системе уравнений

$$D\phi + (k_0+2) D'(q\psi) = \zeta^{k_0+2} \phi , \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} + w\phi = 0 .$$

Эта система может быть представлена в следующем виде:

$$L\phi + v\psi = \zeta^{k_0+2}\phi, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} + w\phi = 0, \qquad /16/$$

где оператор L, согласно /15/, имеет вид

$$L = \partial_x^{k_0+2} + \sum_{k=0}^{k_0} u_k \partial_x^k, \qquad /17/$$

а функции $u_0,\dots,u_{k_0}$, v являются полиномами от функций $p_0, \dots, p_{k_0}$, q, w и их производных по x, т.е.

$$u_k = P_k(p_0,\dots,p_{k_0}, q, w), \quad k = 0,\dots,k_0,$$
$$v = Q(p_0,\dots,p_{k_0}, q, w). \qquad /18/$$

Система /16/ может быть записана в виде

$$(\mathfrak{L} - \eta I)h = 0, \quad \tilde{h} = (\phi, \psi), \quad \eta = \zeta^{k_0+2}, \quad I = \mathrm{diag}(1,0), \qquad /19/$$

где знак " ~ " над вектором-столбцом h означает транспонирование, а оператор $\mathfrak{L}$ имеет вид

$$\mathfrak{L} = \begin{vmatrix} L & v \\ w & \partial_x \end{vmatrix}. \qquad /20/$$

Оператор $\mathfrak{L}$ порождает семейство нелинейных эволюционных уравнений, определяемых с помощью операторного соотношения

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t} + [\mathfrak{A}, \mathfrak{L} - \eta I] = \mathfrak{B}\cdot(\mathfrak{L} - \eta I). \qquad /21/$$

При этом операторы $\mathfrak{A}$ и $\hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ не зависят от параметра η и имеют следующую матричную структуру:

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} H & 0 \\ \tau & 0 \end{vmatrix}, \qquad \hat{\mathfrak{A}} = \begin{vmatrix} H & \sigma\cdot \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad /22/$$

где H, σ и τ - дифференциальные по x операторы. Позже мы покажем, что получаемые таким образом уравнения имеют вид

$$\dot{u}_k = f_k(u_0,\dots,u_{k_0}, v, w), \quad k = 0,\dots,k_0,$$
$$\dot{v} = g(u_0,\dots,u_{k_0}, v, w), \quad \dot{w} = h(u_0,\dots,u_{k_0}, v, w), \qquad /23/$$

где $f_0,\dots,f_{k_0}, g$ и h являются полиномами от функций $u_0,\dots,u_{k_0}$, v, w и их производных по x. Более того, определяемый таким образом класс уравнений совпадает с тем, который получается с помощью соотношения /21/ в случае, когда операторы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ зависят полиномиально от параметра η. Наконец, можно показать, что система /23/ связана с уравнением /14/ преобразованием /18/. А сейчас укажем простой аллгоритм, пригодный для практического нахождения операторов H, σ и τ.

В силу /22/ соотношение /21/ эквивалентно следующей системе:

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [H,L] + \sigma\cdot w - v\tau = 0,$$
$$\dot{v} + H\cdot v + \sigma\partial_x = 0, \qquad \dot{w} = wH + \partial_x\cdot\tau. \qquad /24/$$

Пусть H_0 - произвольный дифференциальный по x оператор вида

$$H_0 = \partial_x^{n_0+2} + \sum_{n=0}^{n_0} h_n \partial_x^n, \quad n_0 \geq 0, \qquad /25/$$

такой, что порядок оператора

$$\delta_0 = [H_0, L]$$

не превосходит k_0. Определим теперь операторы σ_0 и τ_0 из условия, что операторы

$$\hat{\sigma}_0 = H_0\cdot v + \sigma_0\partial_x, \qquad \hat{\tau}_0 = wH_0 + \partial_x\cdot\tau_0 \qquad /26/$$

имеют нулевой порядок, т.е. являются операторами умножения на функцию. Очевидно, что это условие определяет операторы σ_0 и τ_0 единственным образом. Далее, из /25/ и /26/ следует, что так определенные операторы σ_0 и τ_0 имеют вид

$$\sigma_0 = -v\partial_x^{n_0+1} + \alpha_0, \qquad \tau_0 = -w\partial_x^{n_0+1} + \beta_0,$$

где порядок операторов α_0 и β_0 не превосходит n_0. Таким образом, порядок оператора

$$\gamma_0 = \sigma_0\cdot w - v\tau_0$$

также не превосходит n_0. Это значит, что при $k_0 \geq n_0$ равенства /24/, если в них подставить вместо H, σ и τ найденные нами операторы H_0, σ_0 и τ_0, определяют корректным образом некоторую нелинейную эволюционную систему. В том случае, когда $k_0 < n_0$, процесс нахождения операторов H, σ и τ на этом не заканчивается и продолжается следующим образом. Возьмем оператор H_1 вида

$$H_1 = \sum_{n=0}^{n_0-k_0-1} h_n^* \partial_x^{n_0-k_0-n-1}, \qquad /27/$$

такой, что порядок оператора

$$\delta_1 = [H_1, L] + \gamma_0$$

не превосходит k_0. Определим, далее, операторы σ_1 и τ_1 из условия, что операторы

$$\hat{\sigma}_1 = H_1 \cdot v + \sigma_1 \partial_x, \qquad \hat{\tau}_1 = wH_1 + \partial_x \cdot \tau_1 \qquad /28/$$

имеют нулевой порядок. С учетом /27/ из /28/ следует, что при $n_0 = k_0 + 1$ справедливо равенство $\sigma_1 = \tau_1 = 0$, а при $n_0 > k_0 + 1$ операторы σ_1 и τ_1 имеют вид

$$\sigma_1 = -h_0^* \, v \partial_x^{n_0-k_0-2} + \alpha_1, \qquad \tau_1 = -h_0^* \, w \partial_x^{n_0-k_0-2} + \beta_1,$$

где операторы α_1 и β_1 имеют порядок не выше $n_0 - k_0 - 3$. Это значит, что порядок оператора

$$\gamma_1 = \sigma_1 \cdot w - v\tau_1$$

также не превосходит $n_0 - k_0 - 3$. Таким образом, при $k_0 < n_0 < 2k_0 + 4$ равенства /24/, если в них подставить вместо H, σ и τ операторы $H_0 + H_1$, $\sigma_0 + \sigma_1$ и $\tau_0 + \tau_1$, снова определяют корректным образом некоторую нелинейную эволюционную систему. При $2k_0 + 3 < n_0$ процесс нахождения требуемых операторов H, σ и τ на этом не заканчивается и должен быть продолжен, как указано выше. Ясно, что если выполнено неравенство $(m-1)k_0 + 3(m-2) < n_0 \le mk_0 + 3(m-1)$, $m > 1$, то для нахождения операторов H, σ и τ потребуется ровно m шагов.

Умножим теперь второе уравнение системы /24/ справа на оператор $\partial_x^{-1} \cdot w$ и сложим с последним уравнением этой же системы, умноженным слева на оператор $v\partial_x^{-1}$. В результате получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}(v\partial_x^{-1} \cdot w) + [H, v\partial_x^{-1} \cdot w] + \sigma \cdot w - v\tau = 0.$$

Вычитая это равенство из первого уравнения системы /24/, получаем уравнение Гейзенберга

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial t} + [H, \hat{L}] = 0, \qquad /29/$$

где оператор $\hat{L}$ связан с оператором L вида /17/ соотношением

$$\hat{L} = L - v\partial_x^{-1} \cdot w \qquad /30/$$

и, следовательно, является интегро-дифференциальным оператором.

С другой стороны, определенный посредством /19/ и /20/ оператор $\mathfrak{L} - \eta I$ эквивалентен матричному оператору первого порядка

$$\hat{X} = \partial_x + U - \Gamma, \qquad /31/$$

где

$$U = \begin{vmatrix} & & 0 & & & \\ u_0 & u_1 & \dots & u_{k_0} & 0 & v \\ w & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma = \begin{vmatrix} 0 & E_{k_0+1} & 0 \\ \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \qquad /32/$$

При этом матрица Γ связана с матрицей J вида /4/ соотношением

$$\Gamma = J\beta = \gamma J, \qquad \gamma = J\beta J^{-1},$$

где

$$\beta = \mathrm{diag}(\eta, 1, \dots, 1, 0), \qquad \gamma = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \eta, 0).$$

Значит, система уравнений /24/, кроме представления /29/, /30/, должна еще обладать представлением в виде условия совместности для операторов первого порядка $\hat{X}$ вида /31/ и

$$\hat{T} = \partial_t + \sum_{m=0}^{n} F_m \eta^{n-m}, \qquad /33/$$

где матрицы F_m не зависят от параметра η. Возникает вопрос - возможно ли и как найти матрицы F_m, чтобы равенство

$$[\hat{T}, \hat{X}] = 0 \qquad /34/$$

определяло корректным образом некоторую нелинейную эволюционную систему на многообразии M_0 матриц U вида /32/. Нетривиальность этого вопроса видна уже из следующего факта. Пусть Γ_0 равно значению при $\eta = 0$ определенной посредством /32/ матрицы Γ, а $\Gamma_1 = \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}$. Согласно /31/ и /33/, равенство /34/ эквивалентно соотношениям

$$[\Gamma_1, F_0] = 0,$$

$$[\Gamma_1, F_m] + [\Gamma_0, F_{m-1}] - [U, F_{m-1}] - \frac{\partial F_{m-1}}{\partial x} = 0, \quad m = 1, \dots, n,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial F_n}{\partial x} - [U, F_n] + [\Gamma_0, F_n] = 0 . \qquad /35/$$

Отсюда, в частности, видно, что если взять матрицу F_{n+1}, удовлетворяющую условию

$$[\Gamma_1 , F_{n+1}] + [\Gamma_0 , F_n] - [U, F_n] - \frac{\partial F_n}{\partial x} = 0,$$

то уравнение /35/ может быть записано в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [\Gamma_1 , F_{n+1}]. \qquad /36/$$

Однако матрица $[\Gamma_1 , F_{n+1}]$ имеет, вообще говоря, иную структуру, нежели матрица U, и поэтому равенство /36/ может оказаться бессмысленным. Следовательно, выяснение истинной структуры матрицы

$$K_n = [\Gamma_0 , F_n] - [U, F_n] - \frac{\partial F_n}{\partial x}$$

необходимо для выяснения вопроса о корректности уравнения /35/. Важность этой задачи усиливается следующим обстоятельством. Заменим в соотношении /21/ параметр η на оператор $c\partial_y$, где c - константа, а ∂_y - оператор дифференцирования по второй пространственной переменной y. Возникает тесно связанный с предыдущим вопрос - возможно ли и как найти операторы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, такие, что операторное соотношение

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + [\mathcal{P}, \mathcal{L} - c I \partial_y] = \mathcal{Q}\cdot(\mathcal{L} - c I \partial_y) \qquad /37/$$

определяет корректным образом некоторую нелинейную эволюционную систему. При этом ясно, что если положительный ответ на первый вопрос следует из наличия связи между уравнениями /14/ и /23/, задаваемой преобразованием /18/, то для выяснения второго вопроса этот факт, очевидно, не имеет никакого значения. Забегая вперед, все же отметим, что ответ на этот вопрос положителен, а среди получаемых с помощью соотношения /37/ уравнений находится несколько имеющих приложение в гидродинамике и в физике плазмы [2].

Для выяснения всех этих вопросов рассмотрим многообразие M матриц общего положения $U = |u_{\mu,\nu}|$, $\mu,\nu = 0,1,\dots, k_0 + 2$. Определим сначала, при каких условиях уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial x} + [U, F] = [\Gamma, F] \qquad /38/$$

имеет формальное решение вида

$$F \sim \sum_{m=0}^{\infty} F_m \eta^{-m}, \qquad /39/$$

где элементы матриц F_m не зависят от параметра η и являются полиномами от элементов матрицы U и ее производных по x соответствующего порядка. С помощью метода работы [1] получаем, что для существования указанного выше решения уравнения /38/ достаточно выполнение условий

$$u_{\mu,\nu} = 0 \quad \text{при } \mu - \nu < 0, \text{ если } \mu = 0,\dots,k_0, \text{ а } \nu = 1,\dots, k_0 + 1, \qquad /40/$$

и, кроме того, при $\mu = k_0 + 2$ пусть

$$u_{k_0+2,\nu} = 0, \qquad \text{если } \nu = 1,\dots, k_0 + 1. \qquad /41/$$

Доказательство этого утверждения основано на следующем.

Пусть $\epsilon_k = \exp\left(i\frac{2\pi k}{k_0+2}\right)$. Пусть, далее,

$$\Theta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \zeta & \epsilon_1\zeta & \dots & \epsilon_{k_0+1}\zeta & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \zeta^{k_0+1} & (\epsilon_1\zeta)^{k_0+1} & \dots & (\epsilon_{k_0+1}\zeta)^{k_0+1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad /42/$$

Положим

$$F = \Theta G \Theta^{-1} , \qquad \eta = \zeta^{k_0+2}.$$

В результате уравнение /38/ примет вид

$$\frac{\partial G}{\partial x} + [V, G] = \zeta [\Lambda, G], \qquad /43/$$

где

$$V = \Theta^{-1} U \Theta , \qquad \zeta\Lambda = \Theta^{-1}\Gamma \Theta .$$

В силу /32/ справедливо равенство

$$\Lambda = \mathrm{diag}\,(1, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{k_0+1}, 0).$$

Далее, согласно /42/, имеем

$$V = \sum_{k=0}^{2k_0+2} V_k \zeta^{k-k_0-1}, \qquad /44/$$

где матрицы V_k от параметра ζ не зависят. Из результатов работы /1/ следует, что уравнение /43/ имеет формальное решение вида

$$G \sim \sum_{m=0}^{\infty} G_m \zeta^{-m}, \qquad /45/$$

где элементы матриц G_m не зависят от ζ и являются полиномами от элементов матриц V_k и их производных по x, если выполнено условие

$$V_k \equiv 0 \quad \text{при} \quad k > k_0 + 1, \qquad /46/$$

т.е. в разложении /44/ равны нулю коэффициенты при положительных степенях ζ. Выясним, что означает условие /46/ для матрицы U. Пусть $v_{\mu,\nu}$ - элемент матрицы V, стоящий на пересечении $(\mu+1)$-й строки и $(\nu+1)$-го столбца. При $\mu,\nu = 0,1,\dots, k_0+1$ имеем

$$v_{\mu,\nu} = \frac{1}{k_0+2} \sum_{\alpha,\beta=0}^{k_0+1} (\epsilon_\mu \zeta)^{-\alpha} u_{\alpha,\beta} (\epsilon_\nu \zeta)^{\beta}. \qquad /47/$$

Таким образом, на основании /47/ из /46/ следует /40/. Далее, при $\mu = 0,1,\dots,k_0+1$ имеем

$$v_{\mu,k_0+2} = \frac{1}{k_0+2} \sum_{\alpha=0}^{k_0+1} (\epsilon_\mu \zeta)^{-\alpha} u_{\alpha,k_0+2}, \qquad /48/$$

а при $\nu = 0,1,\dots,k_0+1$ справедливо равенство

$$v_{k_0+2,\nu} = \sum_{\beta=0}^{k_0+1} u_{k_0+2,\beta} (\epsilon_\nu \zeta)^{\beta}. \qquad /49/$$

Отсюда, согласно /46/, получаем /41/. Наконец, имеет место равенство

$$v_{k_0+2,\, k_0+2} = u_{k_0+2,\, k_0+2}. \qquad /50/$$

Таким образом, в силу /47/-/50/ условия /40/, /41/ эквивалентны условиям /46/.

Положим теперь

$$G_0 = \mathrm{diag}(c_0, c_1, \dots, c_{k_0+2}),$$

где $c_0, c_1, \dots, c_{k_0+2}$ - произвольные константы, а при $m > 0$ потребуем, чтобы матрицы G_m удовлетворяли условию

$$G_m \equiv 0, \quad \text{если} \quad V \equiv 0.$$

Этими условиями ряд /45/ определяется однозначно. Рассмотрим теперь ряд

$$\hat{F} \sim \sum_{m=0}^{\infty} \Theta G_m \Theta^{-1} \zeta^{-m}.$$

Ясно, что этот ряд имеет вид

$$\hat{F} \sim \sum_{m=-k_0-1}^{\infty} \hat{F}_m \zeta^{-m}$$

и формально удовлетворяет уравнению /38/ при $\eta = \zeta^{k_0+2}$. Отсюда следует, что последовательность матриц $\hat{F}_m$, $m \geq -k_0-1$, распадается на k_0+2 бесконечные серии, образуемые матрицами с номерами $m = (k_0+2)s$, $m = (k_0+2)s-1, \dots, m = (k_0+2)s-k_0-1$, $s \geq 0$. Положим теперь

$$F_m = \sum_{k=0}^{k_0+1} \hat{F}_{(k_0+2)m-k}, \quad m \geq 0. \qquad /51/$$

Очевидно, что образованный с помощью матриц F_m вида /51/ ряд /39/ является формальным решением уравнения /38/. Таким образом, на многообразии $\mathfrak{M} \subset M$ матриц U, удовлетворяющих условиям /40/ и /41/, равенство /36/ определяет корректным образом некоторую нелинейную эволюционную систему. Более того, согласно определению матрицы Γ_1, в правой части равенства /36/ будут отличны от нуля только элементы первого столбца и предпоследней строки. Это значит, что многообразие $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$, образованное матрицами U, у которых отличны от нуля только элементы первого столбца и предпоследней строки и удовлетворяющими условию $\mathrm{Sp}\, U = 0$, будет инвариантным относительно сдвигов по траекториям системы /36/. Однако многообразие M_0 матриц U вида /32/ инвариантным относительно сдвигов по траекториям системы /36/, вообще говоря, не будет. Это значит, что определение оператора $\hat{T}$ посредством равенства /33/ здесь не подходит. Чтобы получить правильное выражение для оператора $\hat{T}$, поступим следующим образом.

Пусть $F_{m,\mu,\nu}$ - элемент матрицы F_m вида /51/, стоящий на пересечении $(\mu+1)$-ой строки и $(\nu+1)$-го столбца, $\mu,\nu = 0,1,\dots k_0+2$. Определим операторы

$$D_{m,\mu} = \sum_{k=0}^{k_0+1} F_{m,\mu,k}\,\partial_x^k\,, \quad \mu = 0,1,\dots,k_0+2\,,$$

$$\hat{D}_{m,\nu} = \sum_{k=0}^{k_0+1} \partial_x^{k_0-k+1}\cdot F_{m,k,\nu} \;+ \qquad /52/$$

$$+ \sum_{k=1}^{k_0} u_k \sum_{k'=0}^{k-1} \partial_x^{k-k'-1}\cdot F_{m,k',\nu}\,, \quad \nu = 0,1,\dots,k_0+2.$$

Далее, положим

$$a_m = \begin{vmatrix} D_{m,0} & F_{m,0,k_0+2} \\ D_{m,k_0+2} & F_{m,k_0+2,k_0+2} \end{vmatrix}, \qquad /53/$$

$$\hat{a}_m = \begin{vmatrix} \hat{D}_{m,k_0+1} & \hat{D}_{m,k_0+2} \\ F_{m,k_0+2,k_0+1} & F_{m,k_0+2,k_0+2} \end{vmatrix}. \qquad /54/$$

Из определения матриц F_m согласно /52/-/54/ следует, что операторы a_0 и $\hat{a}_0$ удовлетворяют условию

$$I\, a_0 = \hat{a}_0 \cdot I\,, \qquad /55/$$

а при $m>0$ справедливо рекуррентное соотношение

$$I\, a_m - \mathfrak{L}\cdot a_{m-1} = \hat{a}_m \cdot I - \hat{a}_{m-1}\cdot\mathfrak{L}\,, \qquad /56/$$

где матрица I и оператор $\mathfrak{L}$ определены посредством равенств /19/ и /20/. Положим теперь

$$\mathfrak{A} = \sum_{m=0}^{n} a_m \eta^{n-m}\,, \quad \hat{\mathfrak{A}} = \sum_{m=0}^{n} \hat{a}_m \eta^{n-m}. \qquad /57/$$

Полагая $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} - \hat{\mathfrak{A}}$ и подставляя в /21/, с учетом /55/ и /56/ почаем

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t} + \hat{a}_n \cdot \mathfrak{L} - \mathfrak{L}\cdot a_n = 0\,,$$

т.е. согласно /56/, имеем

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t} + \hat{a}_{n+1}\cdot I - I\, a_{n+1} = 0.$$

На основании /53/ и /54/ отсюда вытекает система уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \hat{D}_{n+1,k_0+1} - D_{n+1,0} = 0\,, \qquad /58/$$
$$\dot{v} = F_{n+1,0,k_0+2}\,, \quad \dot{w} + F_{n+1,k_0+2,k_0+1} = 0\,,$$

причем в силу /52/ порядок оператора

$$\beta_{n+1} = D_{n+1,0} - \hat{D}_{n+1,k_0+1}$$

не превосходит k_0 и, таким образом, система /58/ определена корректно.

Теперь мы в состоянии написать правильное выражение для оператора $\hat{T}$. Положим

$$\mathcal{T} = \partial_t + \mathfrak{A}\,, \quad \hat{\mathcal{T}} = \partial_t + \hat{\mathfrak{A}}\,, \qquad /59/$$

где операторы $\mathfrak{A}$ и $\hat{\mathfrak{A}}$ определены посредством /57/. С учетом /59/ соотношение /21/ может быть записано в виде

$$(\mathfrak{L} - \eta I)\cdot\mathcal{T} = \hat{\mathcal{T}}\cdot(\mathfrak{L} - \eta I). \qquad /60/$$

Отсюда следует, что оператор $\mathcal{T}$ переводит любое решение h уравнения /19/ в решение этого же уравнения. Далее, согласно /52/, /53/ и /57/, положим

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \sum_{k=0}^{k_0+1} \mathcal{F}_{0,k}\,\partial_x^k & \mathcal{F}_{0,k_0+2} \\ \sum_{k=0}^{k_0+1} \mathcal{F}_{k_0+2,k}\,\partial_x^k & \mathcal{F}_{k_0+2,k_0+2} \end{vmatrix}. \qquad /61/$$

Таким образом, на основании /60/ и /61/ для любого решения (ϕ_ν,ψ_ν), $\nu = 0,1,\dots,k_0+2$, уравнения /19/ справедливы равенства

$$\frac{\partial\phi_\nu}{\partial t} + \sum_{\kappa=0}^{k_0+1} \mathcal{F}_{0,\kappa}\,\frac{\partial^\kappa\phi_\nu}{\partial x^\kappa} + \mathcal{F}_{0,k_0+2}\,\psi_\nu = \sum_{\mu=0}^{k_0+2} \phi_\mu\,\beta_{\mu,\nu}\,, \qquad /62/$$

$$\frac{\partial\psi_\nu}{\partial t} + \sum_{\kappa=0}^{k_0+1} \mathcal{F}_{k_0+2,\kappa}\,\frac{\partial^\kappa\phi_\nu}{\partial x^\kappa} + \mathcal{F}_{k_0+2,k_0+2}\,\psi_\nu = \sum_{\mu=0}^{k_0+2} \psi_\mu\,\beta_{\mu,\nu}\,, \qquad /63/$$

где величины $\beta_{\mu,\nu}$ не зависят от x. Дифференцируя равенство /62/ k раз по x, $k = 1,\dots,k_0+1$, с учетом уравнения /19/ получаем

$$\frac{\partial^{k+1}\phi_\nu}{\partial t\,\partial x^k}+\sum_{\kappa=0}^{k_0+1}\mathfrak{F}_{k,\kappa}\frac{\partial^\kappa\phi_\nu}{\partial x^\kappa}+\mathfrak{F}_{k,k_0+2}\,\psi_\nu=\sum_{\mu=0}^{k_0+2}\frac{\partial^k\phi_\mu}{\partial x^k}\,\beta_{\mu,\nu}, \qquad /64/$$

где при $0\le k\le k_0$ и $1\le\kappa\le k_0+1$ имеем,

$$\mathfrak{F}_{k+1,\kappa}=\frac{\partial\mathfrak{F}_{k,\kappa}}{\partial x}+\mathfrak{F}_{k,\kappa-1}-\mathfrak{F}_{k,k_0+1}\,u_\kappa,$$

а при $\kappa=0$ или $\kappa=k_0+2$ и $0\le k\le k_0$ справедливы равенства

$$\mathfrak{F}_{k+1,0}=\frac{\partial\mathfrak{F}_{k,0}}{\partial x}+\eta\,\mathfrak{F}_{k,k_0+1}-\mathfrak{F}_{k,k_0+1}\,u_0-\mathfrak{F}_{k,k_0+2}\,w,$$

$$\mathfrak{F}_{k+1,k_0+2}=\frac{\partial\mathfrak{F}_{k,k_0+2}}{\partial x}-\mathfrak{F}_{k,k_0+1}\,v.$$

Полученные таким образом величины $\mathfrak{F}_{\mu,\nu}$ образуют матрицу $\mathfrak{F}$, у которой на пересечении $(\mu+1)$-ой строки и $(\nu+1)$-го столбца стоит $\mathfrak{F}_{\mu,\nu}$, $\mu,\nu=0,1,\ldots,k_0+2$. Равенства /62/-/64/ означают, что оператор T^* вида

$$T^*=\partial_t+\mathfrak{F} \qquad /65/$$

переводит фундаментальную матрицу W решений уравнения

$$\hat{X}\,W=0$$

в решение этого же уравнения. Следовательно, операторы T^* и $\hat{X}$ коммутируют между собой в силу /21/, т.е.

$$[T^*,\hat{X}]=0. \qquad /66/$$

Покажем теперь, что справедливо равенство

$$T^*=\hat{T}-F_n^*, \qquad /67/$$

где оператор $\hat{T}$ определен с помощью равенства /33/, а матрица F_n^* не зависит от параметра η. Действительно, подставляя /67/ в /66/, на основании /34/-/36/ получаем уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t}=[\Gamma_1,F_{n+1}]-\Delta_n^*, \qquad /68/$$

где

$$\Delta_n^*=\frac{\partial F_n^*}{\partial x}+[U,F_n^*]-[\Gamma_0,F_n^*].$$

Пусть $F^*_{n,\mu,\nu}$ - элемент матрицы F_n^*, стоящий на пересечении $(\mu+1)$-ой строки и $(\nu+1)$-го столбца, $\mu,\nu=0,1,\ldots,k_0+2$. Положим

$$F^*_{n,\mu,\nu}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{\mu-\nu-1}C^k_{\nu+k}\frac{\partial^k}{\partial x^k}F_{n+1,\mu-\nu-k-1,k_0+1}, & \text{если } 0\le\nu<\mu\le k_0+1,\\ 0, & 0\le\mu\le\nu\le k_0+2 \text{ или } \mu=k_0+2,\ 0\le\nu\le k_0+2.\end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что при $\mu=0,\ldots,k_0$ и $\nu=1,\ldots,k_0+1$ справедливо соотношение

$$\frac{\partial F^*_{n,\mu,\nu}}{\partial x}-F^*_{n,\mu+1,\nu}+F^*_{n,\mu,\nu-1}=0,$$

а при $\mu=0,\ldots,k_0$ имеем

$$\frac{\partial F^*_{n,\mu,0}}{\partial x}-F^*_{n,\mu+1,0}+F_{n+1,\mu,k_0+1}=0.$$

Отсюда следует, что отличные от нуля элементы у матрицы, стоящей в правой части равенства /68/, имеются только в двух последних строках. Далее, нетрудно видеть, что у матрицы Δ_n^* последняя строка нулевая. Наконец, из равенства $\mathrm{Sp}\,\Delta_n^*=0$ следует, что на пересечении предпоследней строки и предпоследнего столбца в правой части равенства /68/ стоит нуль. Таким образом, равенство /68/ определяет корректным образом на многообразии M_0 матриц U вида /32/ некоторую нелинейную эволюционную систему.

Покажем теперь, что полученные согласно /65/ и /67/ выражения для оператора T^* совпадают. Для этого нам нужно убедиться, что матрица

$$F=\mathfrak{F}+F_n^*-\sum_{m=0}^{n}F_m\,\eta^{n-m}$$

нулевая. Действительно, из определения матрицы $\mathfrak{F}$ следует, что у матрицы F первая и последняя строки нулевые. Отсюда легко получаем, что все остальные строки матрицы F также нулевые, т.е. $F\equiv 0$.

Убедимся теперь, что класс уравнений, получаемых с помощью соотношения /21/ в случае, когда операторы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ зависят полиномиально от параметра η, совпадает с тем, который был получен ранее при указанном выше специальном выборе этих операторов. Действительно, положим $\hat{\mathfrak{A}}=\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$ и пусть операторы $\mathfrak{A}$ и $\hat{\mathfrak{A}}$ имеют вид

$$\mathfrak{A}=\sum_{m=0}^{n+1}a_m\,\eta^{n-m+1},\qquad \hat{\mathfrak{A}}=\sum_{m=0}^{n+1}\hat{a}_m\,\eta^{n-m+1},\qquad n\ge 0. \qquad /69/$$

Тогда в силу /21/ справедливы равенства

$$I\,\alpha_0 = \hat{\alpha}_0 \cdot I, \qquad /70/$$

$$I\,\alpha_1 + \hat{\alpha}_0 \cdot \mathfrak{L} = \hat{\alpha}_1 \cdot I + \mathfrak{L} \cdot \alpha_0 . \qquad /71/$$

Согласно /70/, получаем, что операторы α_0 и $\hat{\alpha}_0$ имеют следующую матричную структуру

$$\alpha_0 = \begin{vmatrix} H_0 & 0 \\ r_0 & R_0 \end{vmatrix}, \qquad \hat{\alpha}_0 = \begin{vmatrix} H_0 & \sigma_0 \\ 0 & \hat{R}_0 \end{vmatrix},$$

а из /71/ вытекает равенство

$$\partial_x \cdot R_0 = \hat{R}_0 \partial_x .$$

На основании этого равенства существуют оператор ρ_0 и не зависящая от x величина c_0, такие, что

$$R_0 + \rho_0 \partial_x = \hat{R}_0 + \partial_x \cdot \rho_0 = c_0 .$$

Поскольку при замене

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} + c_0 E_2 \eta^{n+1}, \quad \hat{\mathfrak{A}} \to \hat{\mathfrak{A}} + c_0 E_2 \eta^{n+1}$$

соотношение /21/ сохраняет свою силу, то, не ограничивая общности, можно считать, что $c_0=0$. Пусть теперь

$$f_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 \end{vmatrix}, \qquad g_0 = \begin{vmatrix} H_0 & \sigma_0 + v\rho_0 \\ r_0 + \rho_0 \cdot w & 0 \end{vmatrix} .$$

Легко убедиться в справедливости равенств

$$\alpha_0 + f_0 \cdot \mathfrak{L} - g_0 \cdot I = \hat{\alpha}_0 + \mathfrak{L} \cdot f_0 - I \cdot g_0 = 0. \qquad /72/$$

Совершим преобразование

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + (f_0 \eta + g_0) \cdot (\mathfrak{L} - \eta I)\, \eta^n ,$$

$$\hat{\mathfrak{A}}' = \hat{\mathfrak{A}} + (\mathfrak{L} - \eta I) \cdot (f_0 \eta + g_0)\, \eta^n .$$

Нетрудно видеть, что полученные таким образом операторы $\mathfrak{A}'$ и $\hat{\mathfrak{A}}'$ зависят полиномиально от параметра η, но в силу /72/ степень полиномов будет на единицу меньше по сравнению с /69/. Повторив эту операцию еще n раз, мы получим удовлетворяющие соотношению /21/ операторы $\mathfrak{A}$ и $\hat{\mathfrak{A}}$, которые от параметра η не зависят. В этом

случае в силу /21/ справедливо соотношение

$$I\,\mathfrak{A} = \hat{\mathfrak{A}} \cdot I$$

и, следовательно, операторы $\mathfrak{A}$ и $\hat{\mathfrak{A}}$ имеют вид

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} H & 0 \\ r & R \end{vmatrix}, \qquad \hat{\mathfrak{A}} = \begin{vmatrix} H & \sigma \\ 0 & \hat{R} \end{vmatrix},$$

причем операторы R и $\hat{R}$ удовлетворяют условию

$$\partial_x \cdot R = \hat{R}\, \partial_x .$$

На основании этого условия найдутся оператор ρ и не зависящая от x величина c, такие, что

$$R + \rho\, \partial_x = \hat{R} + \partial_x \cdot \rho = c .$$

Как уже отмечалось выше, не ограничивая общности, можно считать, что $c=0$. Совершим теперь замену

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + f \cdot (\mathfrak{L} - \eta I), \qquad \hat{\mathfrak{A}}' = \hat{\mathfrak{A}} + (\mathfrak{L} - \eta I) \cdot f ,$$

где

$$f = \mathrm{diag}\,(0, \rho) .$$

Нетрудно проверить, что после замены получим

$$\mathfrak{A}' = \begin{vmatrix} H & 0 \\ r + \rho \cdot w & 0 \end{vmatrix}, \qquad \hat{\mathfrak{A}}' = \begin{vmatrix} H & \sigma + v\rho \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

т.е. операторы $\mathfrak{A}'$ и $\hat{\mathfrak{A}}'$ имеют вид /22/.

Выясним теперь причину, по которой оказалось возможным определить нелинейную эволюционную систему на матрицах U вида /32/. Ответ состоит в следующем. Для любой матрицы U, удовлетворяющей условиям /40/, /41/, существует калибровочное преобразование

$$\Psi = R\,\Phi \qquad /73/$$

уравнения

$$\hat{X}\,\Phi = 0, \qquad \hat{X} = \partial_x + U - \Gamma ,$$

в результате которого оператор $\hat{X}$ сохраняет свою структуру, но матрица U будет иметь вид /32/.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим систему

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial x} + \sum_{\kappa=0}^{k} u_{k,\kappa}\, \phi_\kappa + u_{k,k_0+2}\, \phi_{k_0+2} = \phi_{k+1}, \quad k = 0,\dots,k_0, \qquad /74/$$

$$\frac{\partial \phi_{k_0+1}}{\partial x} + \sum_{\kappa=0}^{k_0+2} u_{k_0+1,\kappa}\, \phi_\kappa = \eta \phi_0, \qquad /75/$$

$$\frac{\partial \phi_{k_0+2}}{\partial x} + u_{k_0+2,0}\, \phi_0 + u_{k_0+2,k_0+2}\, \phi_{k_0+2} = 0 \qquad /76/$$

и совершим в ней замену

$$\phi_0 = p\psi_0, \qquad /77/$$

$$\phi_k = \sum_{\kappa=0}^{k-1} p_{k,\kappa}\, \psi_\kappa + p\psi_k + q_k\, \psi_{k_0+2}, \quad k = 1,\dots,k_0+1, \qquad /78/$$

$$\phi_{k_0+2} = q_{k_0+2}\, \psi_{k_0+2}. \qquad /79/$$

Полагая

$$q_{k_0+2} = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} u_{k_0+2,k_0+2}(z)\, dz\right),$$

получаем, что в новых переменных уравнение /76/ имеет вид

$$\frac{\partial \psi_{k_0+2}}{\partial x} + w\psi_0 = 0, \qquad /80/$$

где

$$w = \frac{u_{k_0+2,0}}{q_{k_0+2}}\, p,$$

причем величина p пока еще не определена. Далее, из уравнения /74/ при $k=0$ получаем, что, если в /78/ положить

$$p_{1,0} = \frac{\partial p}{\partial x} + u_{0,0}\, p, \qquad q_1 = u_{0,k_0+2}\, q_{k_0+2},$$

то в новых переменных мы будем иметь уравнение

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial x} = \psi_1.$$

Предположим теперь, что нами найдены функции $p_{k,0}$, $p_{k,1}$, ..., $p_{k,k-1}$ и q_k при всех $k=1,\dots,k'$, $0<k'<k_0$, такие, что в новых переменных уравнение /74/ имеет вид

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x} = \psi_{k+1}, \quad k = 0,\dots,k'-1. \qquad /81/$$

Покажем, как определить эти функции при $k=k'+1$, чтобы получить уравнение /81/ и при $k=k'$. С этой целью возьмем уравнение /74/ при $k=k'$ и совершим в нем замену /77/, /78/. Полагая

$$\begin{aligned}
p_{k'+1,0} &= \frac{\partial p_{k',0}}{\partial x} - w q_{k'} + p u_{k',0} + \sum_{\kappa=1}^{k'} u_{k',\kappa}\, p_{\kappa,0},\\
p_{k'+1,k} &= \frac{\partial p_{k',k}}{\partial x} + p_{k',k-1} + p u_{k',k} + \sum_{\kappa=k+1}^{k'} u_{k',\kappa}\, p_{\kappa,k}, \quad 0<k<k',\\
p_{k'+1,k'} &= \frac{\partial p}{\partial x} + p_{k',k'-1} + p u_{k',k'},\\
q_{k'+1} &= \frac{\partial q_{k'}}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k'} u_{k',k}\, q_k + u_{k',k_0+2}\, q_{k_0+2},
\end{aligned} \qquad /82/$$

получаем, что в новых переменных уравнение /81/ справедливо и при $k=k'$. Таким образом, мы можем определить все входящие в преобразование /77/-/79/ функции, кроме величины p. Определим ее из условия, чтобы в новых переменных уравнение /75/ имело вид

$$\frac{\partial \psi_{k_0+1}}{\partial x} + \sum_{k=0}^{k_0} u_k \psi_k + v\psi_{k_0+2} = \eta\psi_0. \qquad /83/$$

В результате мы приходим к условию

$$\frac{\partial p}{\partial x} + u_{k_0+1,k_0+1}\, p + p_{k_0+1,k_0} = 0.$$

В силу /82/ это условие можно записать в виде

$$(k_0+2)\frac{\partial p}{\partial x} + \sum_{k=0}^{k_0+1} u_{k,k}\, p = 0$$

и, следовательно, p может быть задано с помощью равенства

$$p = \exp\left(-\frac{1}{k_0+2}\sum_{k=0}^{k_0+1}\int_{x_0}^{x} u_{k,k}(z)\, dz\right).$$

Итак, преобразование /73/ полностью определено, а преобразованная система, согласно /80/, /81/ и /83/, имеет требуемый вид.

В заключение отметим, что при $k_0 = 0$ с помощью калибровочного преобразования более общего вида, нежели /73/, рассматриваемая нами система может быть приведена к виду /80/, /81/, /83/ в самом общем случае. Однако при $k_0 > 0$ это невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельников В.К. Матем. сб., 1979, 108, с.378-392.
2. Мельников В.К. В кн.: Труды Международного семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля. ИФВЭ, Протвино, 1982, т.1, с.93-114.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 октября 1982 года.

Мельников В.К. Р2-82-727

Симметрии, нелинейные преобразования и интегрируемые методом обратной задачи уравнения

Рассмотрена связь между свойствами некоторого класса линейных дифференциальных операторов и свойствами интегрируемых с помощью этих операторов нелинейных эволюционных уравнений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Mel'nikov V.K. P2-82-727

Symmetries, Nonlinear Transformations and Equations Solvable by the Inverse Scattering Method

A relation is considered between the properties of a certain class of nonlinear differential operators and of the nonlinear evolution equations solvable with the help of these operators.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.