объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-82 721

В.П.Гердт, А.Ю.Жарков

КУБИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ И ЛОКАЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОИЗВОЛ В ОБЩЕМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ

Направлено в журнал "Теоретическая
и математическая физика"

1982

Хорошо известно, что уравнениям Чу-Лоу [3] можно придать вид следующей системы нелинейных разностных уравнений [4]:

$$S_i(w+1)=\frac{1}{\sum_{j=1}^{3}A_{ij}S_j(w)},\qquad A=\frac{1}{9}\left\|\begin{array}{rrr}1&-8&16\\-2&7&4\\4&4&1\end{array}\right\|. \qquad /1/$$

Здесь S_i $(i=1-3)$ - матричные элементы S-матрицы для статического P-волнового πN-рассеяния, а $w=\arcsin\nu/\pi$ / ν - энергия пиона в единицах его массы/ - униформизующая переменная, в терминах которой функции $S_i(w)$ являются мероморфными.

Общее решение /1/ как системы трех разностных уравнений первого порядка зависит от трех произвольных периодических функций. Две из них, так называемый β и D-произвол [5], всегда можно учесть посредством замены

$$S_i(w)\to D(w)S_i(w+\beta(w)), \qquad /2/$$

которая, в силу структуры уравнений /1/, переводит одно решение в другое, если функции $\beta(w)$ и $D(w)$ являются мероморфными и обладают свойствами

$$\beta(w+1)=\beta(w),\qquad \beta(w)=-\beta(-w),$$
$$D(w+1)D(w)=1,\qquad D(w)=D(-w). \qquad /3/$$

Третья произвольная мероморфная функция $C(w)$, впервые введенная в работе [6], является наиболее важной для построения общего решения и обладает свойствами

$$C(w+1)=-C(w),\qquad C(w)=C(-w). \qquad /4/$$

В работах [1,2] было предложено искать общее решение уравнений /1/ в виде разложения

$$S_i(w)=S_{i0}(w)+\sum_{j=1}^{\infty}S_{ij}(w)C^j(w) \qquad /5/$$

около известного частного решения уравнений Чу-Лоу, которое, в пренебрежении произволом /3/, имеет вид [5]

$$S_{10}(w)=\frac{w^2(w-2)^2}{(w^2-1)^2},\ S_{20}(w)=\frac{w^2(w-2)}{(w-1)^2(w+1)},\ S_{30}(w)=\frac{w^2}{(w-1)^2}. \qquad /6/$$

Будучи естественным обобщением строгих результатов работы [6], разложение /5/ позволяет линеаризовать исходную нелинейную задачу /1/. Последняя сводится [1] к цепочке линейных разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. В работах [1,2] рассмотрена структура уравнений линейной цепочки и описан общий метод их решения, на основе которого найдены линейные и квадратичные по $C(w)$ вклады в разложение /5/.

Прямо следуя технике, изложенной в [1,2], мы нашли явный вид коэффициентов $S_{i3}(w)$ для кубичных членов разложения /5/. Ввиду громоздкости промежуточных выражений, в настоящей работе мы приводим лишь окончательный результат, вынесенный в Приложение. Выражения /П.1/-/П.3/ согласуются с вычислениями недавней работы [7], в которой методом, по-существу совпадающим с методом работ [1,2], получено кубическое приближение для величин $x(w)$, $y(w)$, $t(w)$, связанных с функциями $S_i(w)$ дробно-линейным преобразованием

$$x = \frac{-S_1 - S_2 + 2S_3}{S_1 + 4S_2 + 4S_3}, \quad y = \frac{S_1 - 2S_2 + S_3}{S_1 + 4S_2 + 4S_3}, \quad t = \frac{9}{S_1 + 4S_2 + 4S_3}. \qquad /7/$$

Как и в работе [2], мы использовали программную систему REDUCE-2 [8] для выполнения на ЭВМ громоздких аналитических преобразований, связанных с получением и решением линейных разностных уравнений для кубичного приближения.

Рассмотрим поведение разложения /5/ в окрестности точки $w=0$. Важность такого рассмотрения обусловлена дополнительным требованием на физически интересные решения уравнений /1/

$$S_i(w) \underset{w \to 0}{\sim} \frac{\lambda_i}{w}, \quad \lambda = (-4, -1, 2), \qquad /8/$$

обеспечивающим наличие борновского полюса [5].

Из формул /П.1/-/П.3/ следует, что, в отличие от коэффициентов $S_{i2}(w)$, которые ведут себя в соответствии с /8/ [2], коэффициенты $S_{i3}(w)$ имеют в нуле полюс второго порядка

$$S_{i3}(w) \underset{w \to 0}{\sim} \frac{q_i}{w^2}, \quad q = \left(\frac{40}{3}, -\frac{11}{3}, \frac{29}{9}\right).$$

Исходя из структуры линеаризованной формы уравнений /1/ [1,2], можно ожидать, что старшие коэффициенты разложения /5/ ведут себя в нуле еще более сингулярно

$$S_{ij}(w) \underset{w \to 0}{\sim} \frac{1}{w^{2(j-2)}} \quad (j \geq 3).$$

Покажем, что в классе решений, удовлетворяющих условию /8/, такое сингулярное поведение коэффициентов разложения /5/ не может быть устранено посредством функционального произвола /3/-/4/. Уравнения /1/ в переменных $x(w)$ и $y(w)$, определенных соотношениями /7/, имеют вид [1,2,5-7]:

$$\begin{cases} x(w+1) = F(x(w), y(w)), \\ y(w+1) = -F(y(w), x(w)), \end{cases} \qquad F(x,y) = \frac{x + 2x^2 - xy - 2y^2}{1 + 3x + 3y - 2x^2 - 3xy - 2y^2} \qquad /9/$$

и могут рассматриваться как преобразование фазовой плоскости x, y. Хорошо известно [5,6], что последовательными итерациями по формулам /9/ точка, соответствующая борновскому полюсу /8/, переводится в окрестность начала координат. Асимптотически образ этой точки входит в начало координат вдоль одной из кривых параболического семейства [5], представляемого рядом

$$y = x^2 + \sum_{i=2}^{\infty} \beta_i(C) x^{2i}, \qquad /10/$$

сходящимся при достаточно малых x [6]. Коэффициенты ряда /10/ являются полиномами по произвольной функции /4/ и обладают свойством

$$\beta_i(0) = 0. \qquad /11/$$

Отсюда немедленно следует, что

$$C(0) \neq 0. \qquad /12/$$

В противном случае, в силу /4/, /10/ и /11/, образ борновского полюса должен был бы лежать на параболе $y = x^2$. Последняя является инвариантом преобразования /9/ и соответствует точному решению /6/ уравнений Чу-Лоу. Однако это решение, даже с учетом произвола /3/, не обладает борновским полюсом /8/ [5].

Доказанное свойство /12/ закрывает возможность компенсации сингулярности коэффициентов $S_{ij}(w)$ разложения /5/ посредством функции $C(w)$. Это показывает, в частности, несостоятельность предложенного в работе [7] "механизма получения борновского полюса в общем решении", основанного на предположении

$$C(w) = \sin^2 \pi w \, C_1(w), \quad C_1(0) \neq 0.$$

Ниже, в дополнение к /12/, мы приведем численную оценку величины $C(0)$.

Учтем теперь функциональный произвол /3/. Функция $\beta(w)$, будучи нечетной мероморфной функцией, может иметь в нуле либо нуль, либо полюс. Покажем, что наличие у $\beta(w)$ полюса в нуле несовместимо с условием /8/. В самом деле, решение уравнений /9/, удовлетворяющее /8/, в окрестности начала координат представимо сходящимися рядами вида [6]:

$$x(w) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i[C(w)]}{[w + \beta(w)]^{2i+1}}, \quad y(w) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu_i[C(w)]}{[w + \beta(w)]^{2i+2}}, \qquad /13/$$

коэффициенты которых λ_i и μ_i полиномиально зависят от функции /4/. Выше отмечалось, что конечным числом итераций по формулам /9/ точка, соответствующая борновскому полюсу /8/, переводится в область применимости разложений /13/. В этой области полюс $\beta(w)$ соответствует точке покоя $x = y = 0$ преобразований /9/. Поэтому наличие у $\beta(w)$ полюса в нуле означало бы, что борновский полюс конечным числом преобразований по формулам /9/ переводится в точку покоя. В силу обратимости преобразования /9/ [6] это заведомо неверно, так как точка, соответствующая полюсу /8/, не является точкой покоя преобразования /9/. Следовательно, остается единственная возможность

$$\beta(0) = 0. \qquad /14/$$

Условие /14/ означает, что учет произвольной функции $\beta(w)$ не может устранить сингулярности коэффициентов разложения /5/ в точке $w=0$. Наконец, учет третьей произвольной функции $D(w)$, от которой, согласно /2/, функции $S_i(w)$ зависят мультипликативно, очевидно, также не может обеспечить поведения /8/ в рамках разложения /5/.

Таким образом, представление общего решения уравнений Чу-Лоу в виде разложения /5/ неприменимо в окрестности борновского полюса.

Тот факт, что после конечного числа итераций по формулам /9/ точка, соответствующая борновскому полюсу /8/, ложится на вполне определенную кривую семейства /10/ и асимптотически стремится к началу координат, позволяет получить численную оценку величины $C(0)$. Для этой цели удобно переписать разложение /10/ в виде:

$$y = x^2 + C(w)x^4 + C^2(w)x^4\left[-\frac{2}{3}\xi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{9x^6 - 20x^4 - x^2}{3(x^2-1)^2}\right] + \ldots . \qquad /15/$$

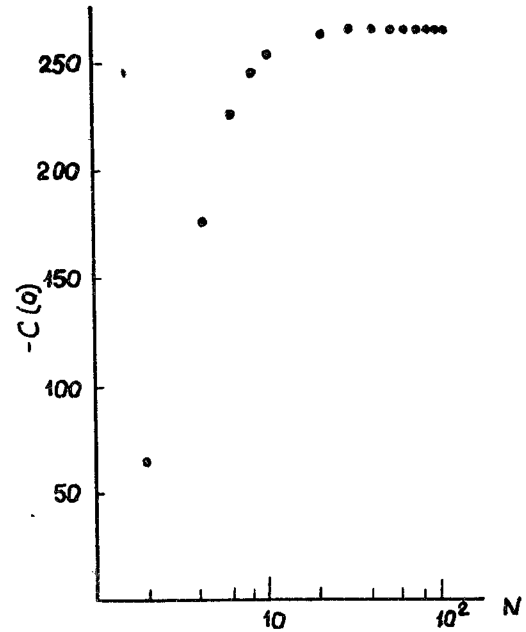
Ряд /15/ соответствует разложению /5/ и может быть получен из локального разложения /10/ путем суммирования степенного ряда по x при фиксированных степенях C [1]. В выражении /15/ мы привели явный вид линейного и квадратичного по $C(w)$ вкладов с функцией $\xi(w)$, определенной в Приложении.

На рисунке отложены значения $C(0)$, вычисленные исходя из выражения /15/ в линейном по $C(w)$ приближении и при различном /четном/ числе итераций N по формулам /9/, начиная с точки, соответствующей борновскому полюсу /8/. Заметим, что после нечетного числа итераций функция $C(w)$ в силу свойства /4/ меняет знак. Видно, что, начиная с $N \geq 20$, точки выходят на асимптотическое значение

$$C(0) \approx -265{,}25.$$

Большая величина $|C(0)|$ является еще одним свидетельством неприменимости разложения /5/ для представления общего решения уравнений Чу-Лоу в окрестности борновского полюса.

В заключение авторы выражают благодарность В.А.Мещерякову за интерес к работе и полезные замечания.



ПРИЛОЖЕНИЕ

$$S_{13}(w) = -\frac{1}{36w^2(w^2-1)^8}(10w^{16} - 40w^{15} - 15w^{14} + 200w^{13} - 1431w^{12} + 2904w^{11} -$$

$$-2668w^{10} - 3296w^9 + 12116w^8 - 8152w^7 - 6239w^6 + 14056w^5 -$$

$$-10439w^4 + 1768w^3 - 2278w^2 + 1776w - 576) +$$

$$+\frac{2}{9w(w^2-1)^6}(95w^9 - 180w^8 + 79w^7 + 172w^6 - 357w^5 + 284w^4 - \qquad /П1/$$

$$-223w^3 + 84w^2 - 74w + 24)\xi(w) + \frac{16(w^4 - 2w^3 + 3w^2 - 2w + 1)}{9(w^2-1)^4}\xi^2(w) -$$

$$-\frac{5w(w^3 - 3w^2 + 3w - 2)}{9(w^2-1)^3}\xi'(w) + \frac{2(w^4 - 2w^3 + 3w^2 - 2w + 1)}{(w^2-1)^4}\xi''(w) -$$

$$-\frac{8(2w^5 - 5w^4 + 11w^3 - 10w^2 + 7w - 1)}{(w^2-1)^5}\eta(w) -$$

$$-\frac{5w^8 - 20w^7 + 10w^6 + 40w^5 + 37w^4 - 164w^3 + 236w^2 - 144w + 72}{36(w^2-1)^4}\eta'(w) -$$

$$-\frac{8w(w^3 - 3w^2 + 3w - 2)}{3(w^2-1)^3}b(w) - \frac{4w^2(w-2)^2}{3(w^2-1)^2}d(w),$$

$$
\begin{aligned}
S_{23}(w) = &-\frac{1}{36w^2(w-1)^8(w+1)^4}(10w^{12}-50w^{11}+65w^{10}+50w^9+527w^8-1892w^7+\\
&+2199w^6-426w^5-2173w^4+2306w^3-232w^2-276w+180)-\\
&-\frac{2(49w^6-102w^5+62w^4+28w^3-81w^2+26w-6)}{9w(w-1)^6(w+1)^3}\xi(w)-\\
&-\frac{8(w^2-w+1)}{9(w-1)^4(w+1)^2}\xi^2(w)-\frac{5w(w^2-w+4)}{36(w-1)^3(w+1)^2}\xi'(w)-\frac{w^2-w+1}{(w-1)^4(w+1)^2}\xi''(w)+\\
&+\frac{2(4w^3-3w^2+6w+1)}{(w-1)^5(w+1)^3}\eta(w)-\frac{5w^6-15w^5+5w^4+15w^3-46w^2+36w-36}{36(w-1)^4(w+1)^2}\eta'(w)-\\
&-\frac{2w(w^2-w+4)}{3(w-1)^3(w+1)^2}b(w)-\frac{4w^2(w-2)}{3(w-1)^2(w+1)}d(w)\,,
\end{aligned}
\qquad /П2/
$$

$$
\begin{aligned}
S_{33}(w) = &-\frac{10w^8-60w^7+155w^6-220w^5-172w^4+1044w^3-1291w^2+696w-198}{36w^2(w-1)^8}+\\
&+\frac{2(23w^3-48w^2+31w-12)}{9w(w-1)^6}\xi(w)+\frac{4}{9(w-1)^4}\xi^2(w)+\\
&+\frac{5w}{18(w-1)^3}\xi'(w)+\frac{1}{2(w-1)^4}\xi''(w)-\frac{4}{(w-1)^5}\eta(w)-\\
&-\frac{5w^4-10w^3+5w^2+18}{36(w-1)^4}\eta'(w)+\frac{4w}{3(w-1)^3}b(w)-\frac{4w^2}{3(w-1)^2}d(w)\,.
\end{aligned}
\qquad /П3/
$$

Функции $\xi(w)$ и $\eta(w)$ введены нами в работе /2/ и выражаются через дигамма-функцию $\Psi(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z)$

$$
\xi(w)=\frac{\Psi(1+\frac{w}{2})+\Psi(1-\frac{w}{2})-\Psi(\frac{1+w}{2})-\Psi(\frac{1-w}{2})}{2}\,.
$$

$$
\eta(w)=\psi'(w)-\Psi'(-w).
$$

Функции $b(w)$ и $d(w)$ определены в работе /7/ и являются решением уравнений

$$
b(w+1)+b(w)=\frac{1}{w^2(w+1)^2}\left[2\xi(w)+\frac{1}{w(w+1)}\right],\quad b(w)=-b(-w)\,,
$$

$$
d(w+1)-d(w)=\frac{w^2+w+3}{3w^3(w+1)^3}\left[\xi(w)+\frac{1}{2w(w+1)}\right],\quad d(w)=d(-w)\,.
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гердт В.П. ТМФ, 1981, т.48, №3, с. 346-355.
2. Гердт В.П., Жарков А.Ю. ТМФ, 1982, т. 52, №3, с. 384-392.
3. Chew G.F., Low F.E. Phys.Rev., 1956, v. 101, No. 5, p. 1570-1579.
4. Мещеряков В.А., Рерих К.В. ТМФ, 1970, т. 3, №1, с. 78-93.
5. Журавлев В.И., Мещеряков В.А. ЭЧАЯ, 1974, т. 5, вып. 1, с. 172-222.
6. Гердт В.П., Мещеряков В.А. ТМФ, 1975, т. 24, №2, с. 155-163.
7. Рерих К.В. ОИЯИ, Р2-81-701, Дубна, 1981.
8. Hearn A.C. REDUCE User's Manual. Second Edition, Univ. of Utah, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 октября 1982 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д13-11182	Труды IX Международного симпозиума по ядерной электронике. Варна, 1977.	5 р. 00 к.
Д17-11490	Труды Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1977.	6 р. 00 к.
Д6-11574	Сборник аннотаций XV совещания по ядерной спектроскопии и теории ядра. Дубна, 1978.	2 р. 50 к.
Д3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Гердт В.П., Жарков А.Ю. Р2-82-721

Кубичное приближение и локальные ограничения на функциональный произвол в общем решении уравнений Чу-Лоу

Предложенное в [1,2] степенное разложение общего решения уравнений Чу-Лоу [3] рассмотрено в окрестности точки $w=0$. Показано, что, в отличие от квадратичного, кубичное приближение не обладает в этой точке требуемым борновским полюсом. Отсюда сделано заключение о неприменимости данного разложения вблизи борновского полюса. В классе физически интересных решений получены локальные ограничения $\beta(0)=0$ и $C(0)\neq 0$ для произвольных периодических функций $\beta(w)$ и $C(w)$, определяющих общее решение. С помощью численного анализа найдено значение $C(0)\approx -265$ для решений с борновским полюсом.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Gerdt V.P., Zharkov A.Yu. P2-82-721

Cubic Approximation and Local Limitations to Functional Arbitrariness in the General Solution of the Chew-Low Equations

The power series expansion of the general solution of the Chew-Low equations suggested has been considered at the neighbourhood of the point $w=0$. It is shown that as distinct from the quadratic approximation the cubic approximation does not posses the required Born pole in this point. In consequence of this the conclusion about invalidity of the considered expansion near the Born pole is made. Within the class of physically interesting solutions the local boundings $\beta(0)=0$ and $C(0)\neq 0$ for arbitrary periodic functions determining the general solutions are obtained. By means of numerical analysis the value $C(0)\approx -265$ for the solutions possesing the Born pole is found.

The investigation has been performed at the Laboratory of Techniques and Automations, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.